2023학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제지 [창의인재-의예과(수학)]

==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(30점)

(가) e는 무리수이고, 그 값은 $e=2.71828182845904\cdots$이다.

(나) 함수 $f(x)=e^{nx}+e^{-nx}$ $(n=1,2,3,\cdots)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서의 접선의 기울기는 $2n$이라고 하자. 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 Q라고 할 때 원점 O(0,0)와 두 점 P, Q에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이가 최대일 때의 P와 Q를 각각 P′와 Q′라고 하자.

(다) 제시문 (나)에서 주어진 함수 $f(x)$에 대해서 함수 $g(x)=\dfrac{1}{n}\ln f(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$라고 하자.

[문제 1-1] 제시문 (나)에서 주어진 함수 $f(x)$와 점 P의 x좌표를 a_n이라고 할 때 $\displaystyle\lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=\alpha$라고 하자. 제시문 (다)에서 주어진 함수 $g(x)$에 대해서 닫힌 구간 $[0,k]$에서 $g'(x)$의 최댓값이 $\dfrac{1}{3}e^{\frac{1}{\ln\alpha}}$일 때, k의 값을 구하시오.**(15점)**

[문제 1-2] 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 (a,b)에서의 접선과 제시문 (나)에서 주어진 함수 $f(x)$의 점 Q′에서의 접선이 서로 수직이다. 삼각형 OP′Q′의 넓이를 S라고 하자. $S\sqrt{ab}$의 값을 구하시오.**(15점)**

(가) 참가자가 고민없이 0초만에 강화유리와 일반유리를 구분할 확률은 1/2이다.

(나) $f(t)=1$을 만족시키는 t 값 중 가장 작은 값을 t^*라고 하자.

(다) $x\leq t^*$와 어떤 상수 a에 대해서 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=-\frac{\sin x+\cos x}{2}e^x+f(x)$가 성립한다.

(라) $x>t^*$에 대해서 $f(x)=1$이다.

[문항해설]

[문제 1-1] 함수 $f(x)$의 접선 기울기가 $2n$인 점 P의 좌표에서의 극한값 α를 구한다. 닫힌 구간 $[0,k]$에서 $g'(x)$의 그래프 개형을 통해 점 $x=k$에서 최댓값 $g'(k)=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{\ln\alpha}}$을 만족시키는 k의 값을 구한다.

[문제 1-2] 함수 $f(x)$의 접선 기울기가 $2n$인 점 P의 좌표를 통해 점 Q의 좌표를 알아내고 삼각형 OPQ의 넓이가 최대인 경우를 찾는다. 또 Q$'$에서의 접선의 기울기를 계산한다.

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 (a,b)에서의 접선과 제시문 (나)에서 주어진 함수 $f(x)$의 점 Q$'$에서의 접선이 서로 수직인 성질을 이용하여 문제의 답을 구한다.

[예시답안]

[문제 1-1] (답) $k=\frac{1}{2n}\ln(5+3\sqrt{2})$

(풀이) $f(x)=e^{nx}+e^{-nx}$라고 하면 $f'(x)=n(e^{nx}-e^{-nx})$이므로 $e^{nx}-e^{-nx}=2$ 이고 $e^{2nx}-2e^{nx}-1=0$이다. $e^{nx}=X(X>0)$로 놓으면 $X^2-2X-1=0$이고 $X=1\pm\sqrt{2}$이다. 그런데 $X>0$이므로 $e^{nx}=1+\sqrt{2}$이므로 $a_n=\frac{1}{n}\ln(1+\sqrt{2})$이다. 또

$$\lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{a_n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)^{\frac{a_n}{\ln(1+\sqrt{2})}}=\lim_{a_n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_n}+1\right)^{a_n}\right\}^{\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}}=e^{\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}}$$

이므로 $\alpha=e^{\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}}$이다.

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{nf(x)}=\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}=\frac{e^{nx}+e^{-nx}-2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}=1-\frac{2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\quad\cdots\cdots①$$

x의 값이 증가하면 $e^{nx}+e^{-nx}$의 값이 증가하고 $\frac{2}{e^{nx}+e^{-nx}}$와 e^{-nx}의 값은 감소하므로 $g'(x)$는 증가한다. 그러므로 닫힌 구간 $[0,k]$에서 함수 $g'(x)$는 $x=k$에서 최대이고 최댓값은 $g'(k)=1-\frac{2e^{-nk}}{e^{nk}+e^{-nk}}=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{\ln\alpha}}=\frac{1}{3}e^{\ln(1+\sqrt{2})}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$이므로 $1-\frac{2e^{-nk}}{e^{nk}+e^{-nk}}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$이고 이 식의 양변을 정리하면

$$\frac{2-\sqrt{2}}{6}=\frac{e^{-nk}}{e^{nk}+e^{-nk}}\quad\cdots\cdots②$$

이다. 이때 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}=t$라고 하고 ②에 대입하면 $t=\frac{e^{-nk}}{e^{nk}+e^{-nk}}$이고 식을 정리하면 $te^{nk}=e^{-nk}-te^{-nk}$이다. 이때 양변에 e^{nk}을 곱하면

$$e^{2nk}=\frac{1-t}{t}=\frac{1-\frac{2-\sqrt{2}}{6}}{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}=5+3\sqrt{2}$$

이다. 따라서 $k=\frac{1}{2n}\ln(5+3\sqrt{2})$이다.

[문제 1-2] (답) $24\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$

(풀이) 점 P의 x좌표는 $a_n=\frac{1}{n}\ln(1+\sqrt{2})$, y좌표는 $2\sqrt{2}$이고 점 Q의 x좌표 $b_n=-\frac{1}{n}\ln(1+\sqrt{2})$, y좌표는 $2\sqrt{2}$이다.

삼각형 OPQ의 넓이는 $2\sqrt{2}\frac{1}{n}\ln(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})\frac{1}{n}$이고 $n=1,2,3,\cdots$이므로 삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되는 경우는 $n=1$이고 이때

$$\mathrm{P}'(\ln(1+\sqrt{2}),2\sqrt{2}),\ \mathrm{Q}'(-\ln(1+\sqrt{2}),2\sqrt{2})$$

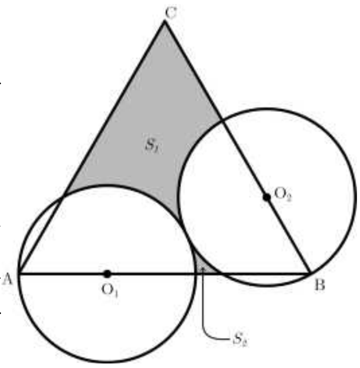
이다. 점 P′에서의 접선의 방정식은 $y-2\sqrt{2}=2(x-\ln(1+\sqrt{2}))$이며 이 접선을 y축 대칭하면 점 Q′에서의 접선이 된다. 따라서 점 Q′에서의 접선의 방정식은 $y-2\sqrt{2}=2(-x-\ln(1+\sqrt{2}))$이며 Q′에서의 접선의 기울기는 -2이다.

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 (a,b)에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{6}{b}x+\frac{6a}{b}$이고 이 접선은 점 Q′에서의 접선과 수직이므로 $b=12$이다. 점 (a,b)는 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로 $b^2=12a$이고 이 식에 $b=12$를 대입하여 풀면 $a=12$이다. 또 삼각형 OP′Q′의 넓이는 $S=2\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$이다. 따라서 $S\sqrt{ab}=24\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$이다.

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(30점)

(가) 잔디에 물을 주는 스프링클러(sprinkler)는 급수 노즐에서 물을 분사하여, 노즐로부터 일정한 거리 이내의 영역에 물을 뿌려주는 장치이다. 물이 뿌려지는 살수 범위는 노즐을 중심으로 하는 원의 내부이며, 이 원의 반지름을 살수반경이라 부른다.

(나) 오른쪽 그림과 같이 평평한 땅에 정삼각형 모양의 잔디밭이 있다. 이 잔디밭이 만드는 정삼각형을 삼각형 ABC라고 하자.



(다) 살수반경이 2 m인 스프링클러 2개를 이용하여 제시문 (나)에 있는 삼각형 모양의 잔디밭에 물을 뿌리고자 한다. 2개의 급수 노즐은 각각 선분 AB, 선분 BC 위에 있고, 이 2개의 스프링클러가 만드는 살수 범위는 각각 중심이 O_1인 원의 내부와 중심이 O_2인 원의 내부이다.

(라) 제시문 (다)에서 주어진 중심이 O_1인 원은 점 A를 지나고, 중심이 O_2인 원은 점 B를 지난다. 그리고 두 원은 서로 접한다.

(마) 잔디밭에서 물이 뿌려지지 않은 두 영역 중 큰 영역을 S_1, 작은 영역을 S_2라고 하자.

[문제 2-1] 영역 S_1과 S_2의 넓이를 구하시오. (15점)

[문제 2-2] 영역 S_1에 물을 뿌리기 위해 점 C에 새로운 급수 노즐을 놓는다고 하자. 이 노즐의 살수반경의 최솟값을 r이라 할 때, r^2을 구하시오. (15점)

[문항해설]

(문제 2-1)

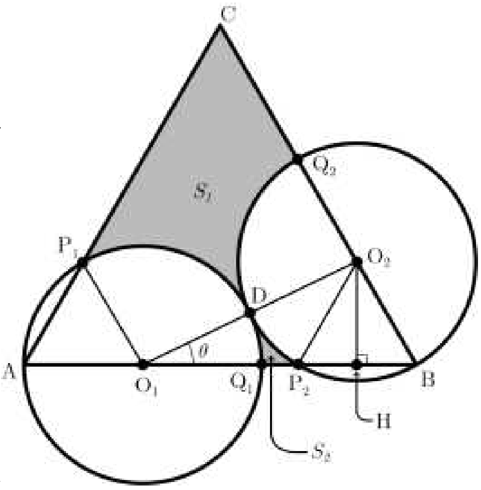
영역 S_1+S_2는 정삼각형 ABC에서 삼각형 $\mathrm{AO_1P_1}$, 삼각형 $\mathrm{BO_2P_2}$, 부채꼴 $\mathrm{O_1P_1Q_1}$, 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2Q_2}$을 뺀 영역이다. 삼각형 $\mathrm{O_1BO_2}$에 코사인법칙을 적용하여 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 구한다. 정삼각형 ABC의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{AO_1P_1}$, 삼각형 $\mathrm{BO_2P_2}$, 부채꼴 $\mathrm{O_1P_1Q_1}$, 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2Q_2}$의 넓이를 빼서 영역 S_1+S_2의 넓이를 구한다. 영역 S_2는 직각삼각형 $\mathrm{HO_1O_2}$에서 삼각형 $\mathrm{HO_2P_2}$, 부채꼴 $\mathrm{O_1Q_1D}$, 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2D}$를 뺀 영역이다. 부채꼴 $\mathrm{O_1Q_1D}$의 원주각이 θ일 때, 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2D}$의 원주각이 $\frac{\pi}{3}-\theta$임을 이용하여 S_2의 넓이를 구한다. S_1+S_2의 넓이와 S_2의 넓이로부터 S_1의 넓이를 구한다.

(문제 2-2)

살수반경의 최솟값 r은 $\overline{\mathrm{CP_1}}$과 $\overline{\mathrm{CD}}$중 큰 값이다. $\overline{\mathrm{CP_1}}$은 정삼각형 ABC의 한 변의 길이에서 원 $\mathrm{O_1}$의 반지름을 빼서 구한다. 삼각형 $\mathrm{O_2CD}$에 코사인법칙을 적용하고, 삼각함수의 덧셈정리를 사용하여 $\overline{\mathrm{CD}}^2$을 구한다. $\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{CP_1}}^2>0$이므로 $r^2=\overline{\mathrm{CD}}^2$이다.

[예시답안]

(문제 2-1) 우선 S_1+S_2의 넓이와 S_2의 넓이를 구한 후 두 값의 차를 이용하여 S_1의 넓이를 구한다. 오른쪽 그림과 같이 보조선을 사용한다.



〈 1 〉 S_1+S_2의 넓이를 구하자.

영역 S_1+S_2는 정삼각형 ABC에서 삼각형 $\mathrm{AO_1P_1}$, 삼각형 $\mathrm{BO_2P_2}$, 부채꼴 $\mathrm{O_1P_1Q_1}$, 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2Q_2}$을 뺀 영역이다. 삼각형 $\mathrm{O_1BO_2}$에서 $\overline{\mathrm{O_1B}}=x$라고 하면, $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=4$, $\overline{\mathrm{O_2B}}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙에 의해서 $4^2=x^2+2^2-4x\cos\frac{\pi}{3}$이다. 따라서 $0<x=\sqrt{13}+1$이고, 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{13}+3$이 된다. 삼각형 $\mathrm{AO_1P_1}$과 삼각형 $\mathrm{BO_2P_2}$는 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, 부채꼴 $\mathrm{O_1P_1Q_1}$과 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2Q_2}$는 모두 원주각이 $\frac{2\pi}{3}$이다. 그러므로 S_1+S_2의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{(\sqrt{13}+3)^2\sqrt{3}}{4}-2\times\left(\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)-2\times\left(\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{(22+6\sqrt{13})\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{39}}{2}-\frac{8\pi}{3}$$

〈 2 〉 S_2의 넓이를 구하자.

영역 S_2는 직각삼각형 $\mathrm{HO_1O_2}$에서 삼각형 $\mathrm{HO_2P_2}$, 부채꼴 $\mathrm{O_1Q_1D}$, 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2D}$를 뺀 영역이다. 직각삼각형 $\mathrm{HO_1O_2}$의 밑변 $\overline{\mathrm{O_1B}}-\overline{\mathrm{HB}}=x-1=\sqrt{13}$이고 높이 $\overline{\mathrm{O_2H}}=\sqrt{3}$이다. 삼각형 $\mathrm{HO_2P_2}$의 밑변 $\overline{\mathrm{HP_2}}=1$이고 높이 $\overline{\mathrm{O_2H}}=\sqrt{3}$이다. 부채꼴 $\mathrm{O_1Q_1D}$의 원주각은 θ이고, 부채꼴 $\mathrm{O_2P_2D}$의 원

주각은 $\frac{\pi}{3}-\theta$이다. 그러므로 S_2의 넓이는 다음과 같다.

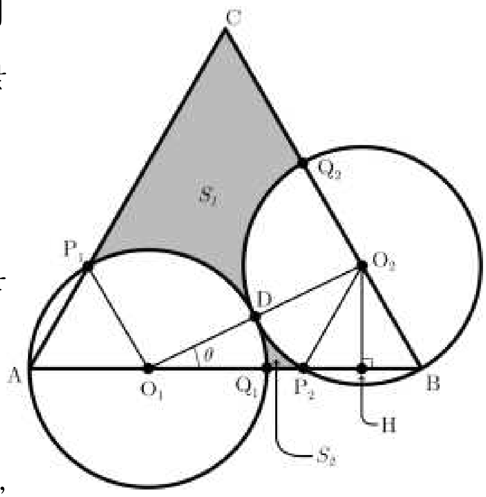
$$\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times2^2\times\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$
$$=\frac{\sqrt{39}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$$

< 3 > S_1의 넓이를 구하자.

S_1+S_2의 넓이는 $\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{39}}{2}-\frac{8\pi}{3}$이고 S_2의 넓이는 $\frac{\sqrt{39}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$이므로 S_1의 넓이는 다음과 같다.

$$\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{39}}{2}-\frac{8\pi}{3}\right)-\left(\frac{\sqrt{39}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)=4\sqrt{3}+\sqrt{39}-2\pi$$

(문제 2-2) 살수반경의 최솟값 r은 $\overline{CP_1}$과 $\overline{CD}$중 큰 값이다. $\overline{CP_1}^2$과 $\overline{CD}^2$을 각각 계산하고 이 두 값 중 큰 값을 찾자. 오른쪽 그림과 같이 보조선을 사용한다.



< 1 > $\overline{CP_1}^2$을 구하자.

$\overline{CP_1}$은 정삼각형 ABC의 한 변의 길이에서 원 O_1의 반지름을 뺀 값과 같다. 즉, $\overline{CP_1}^2=(\sqrt{13}+1)^2=14+2\sqrt{13}$이다.

< 2 > $\overline{CD}^2$을 구하자.

삼각형 O_2CD에 코사인법칙을 적용하자. $\overline{O_2C}=\sqrt{13}+1$, $\overline{O_2D}=2$, $\angle CO_2D=\theta+\frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{CD}^2=(\sqrt{13}+1)^2+2^2-2\times(\sqrt{13}+1)\times2\times\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(14+2\sqrt{13})+4-4(\sqrt{13}+1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

삼각함수의 덧셈정리에 의해서

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2}$$

직각삼각형 HO_1O_2에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{13}}{4}$이므로

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{13}}{4}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{13}-3}{8}$$

따라서

$$\overline{CD}^2=(18+2\sqrt{13})-4(\sqrt{13}+1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(18+2\sqrt{13})-4(\sqrt{13}+1)\times\frac{\sqrt{13}-3}{8}$$
$$=13+3\sqrt{13}$$

〈 3 〉 $\overline{\mathrm{CD}}^2$과 $\overline{\mathrm{CP_1}}^2$의 크기를 비교하자.

$$(\overline{\mathrm{CD}}^2 - \overline{\mathrm{CP_1}}^2) = (13+3\sqrt{13}) - (14+2\sqrt{13}) = \sqrt{13}-1 > 0$$

따라서 $\overline{\mathrm{CD}}^2 > \overline{\mathrm{CP_1}}^2$이므로 $r^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 = 13+3\sqrt{13}$이다.