2

2026학년도 모의 논술고사

성신여자대학교
SUNGSHIN WOMEN'S UNIVERSITY

자연계열

지원학과(부)	성 명	생년월일 (예: 050512)						수험번호										
		⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
		①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①
		②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②
		③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③
		④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④
		⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
		⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
		⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
		⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
		⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

유 의 사 항

1. 시험 시간은 100분입니다.

2. 답안 작성은 검은색 볼펜(연필 사용 불가)으로만 가능합니다.

3. 답안의 정해진 작성 분량을 준수하시기 바랍니다. 답안 영역에 작성한 내용만 인정됩니다.

4. 답안에 자신을 드러내거나 알릴 수 있는 표현 및 표시를 하면 안됩니다.

5. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시기 바랍니다.

1. 문제

※ <문제 1>에서부터 <문제 4>까지 총 4개의 문제가 있고, 각 문제마다 3개의 세부 문항이 있습니다. 답안지의 지정된 양식 안에 각 세부 문항 별로 해당 문항 번호를 쓰고 답을 작성하십시오. 수식과 논리를 명확히 전개하고 근거와 과정을 제시하십시오. (시험 시간: 100분, 답안 분량: 지정된 답안 양식 내 작성)

문제 1 **수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.**

(가) 모든 자연수 n에 대해서 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = n(n+1)(2n+1)$이다.

(나) 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 b이고 공차가 d인 등차수열이다. (단, d는 0이 아닌 실수.)

(다) 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \neq 0$이다.

다음 물음에 답하시오. [총 25점]

(1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 b와 d에 관한 식으로 나타내시오. [7점]

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$의 값을 d에 관한 식으로 나타내시오. [8점]

(3) d가 양수이고, $b = d$를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$의 값을 d에 관한 식으로 나타내시오. [10점]

문제 2 **수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가**

$$v(t)=\begin{cases} 15t^2+a & (0 \leq t < 1) \\ -t+b & (1 \leq t \leq 2) \\ ce^{-\sqrt{t/2}} & (t > 2) \end{cases}$$

이고, 점 P는 시각 $t=0$일 때, 원점에 위치한다. 다음 물음에 답하시오. (단, a, b, c는 실수.) [총 25점]

(1) 함수 $v(t)$가 $t \geq 0$에서 연속일 때, a와 b의 관계식 및 b와 c의 관계식을 구하시오. [5점]

(2) 함수 $v(t)$가 $t=2$에서 미분가능할 때, 미분계수의 정의를 이용하여 실수 c의 값을 구하시오. [10점]

(3) 함수 $v(t)$가 $t \geq 0$에서 연속이고 $t > 0$에서 $t=1$을 제외하고 미분가능할 때, 시각 $t=0$에서 원점을 출발한 점 P가 $2 < t < 8$에서 적어도 한 번 원점을 다시 통과하는 것을 보이시오. (단, e는 자연상수이고, $2 < e < 3$이다.) [10점]

문제 3 **실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를**

$$f(x) = 2^x,\ g(x) = \log_2 x$$

라 하자. 다음 물음에 답하시오. [총 25점]

(1) 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 직선 $y = -x + n + 2^n$, $y = -x + 1$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [8점]

(2) 0보다 크거나 같은 정수 n에 대하여 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2^n, g(2^n))$에서의 접선의 방정식과 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(g(2^n), f(g(2^n)))$에서의 접선의 방정식을 각각 구하고, $n = 0$인 경우 이 두 접선과 직선 $y = -x + n + 2^n$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오. [8점]

(3) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

$a_1 = g(2)$, $a_n = g(2f(a_{n-1}))\ (n \geq 2)$

$b_1 = f(0)$, $b_n = f(-1 + g(b_{n-1}))\ (n \geq 2)$

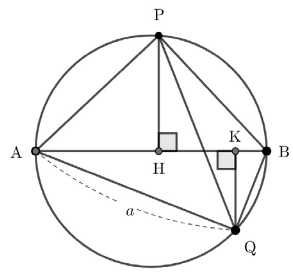
$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n}$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 각각 구하시오. [9점]

문제 4 **지름 AB의 길이가 2인 원 위에 놓인 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.**

(가) $\overline{\mathrm{AQ}} = a$ (a는 양의 실수)

(나) $\angle \mathrm{PAB} = 2\angle \mathrm{QAB}$

(다) 선분 AB와 선분 PQ는 원의 내부의 한 점에서 만난다.



다음 물음에 답하시오. [총 25점]

(1) 선분 AP의 길이를 a에 관한 식으로 나타내시오. [5점]

(2) 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, 점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 K라 할 때, 선분 HK의 길이의 최댓값을 구하시오. [10점]

(3) 위의 문항 (2)에서 구한 선분 HK의 길이가 최대일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 구하시오. [10점]

2. 출제 의도

가. 출제의 방향

우리대학의 자연계 논술 시험은 예년과 마찬가지로 수험생의 학업 부담을 경감시키고자 수학 문제로만 구성하여, 고등학교 수학의 기초 원리를 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 한다. 출제범위는 고등학교 공통 수학, 수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ, 미적분으로 한정한다. 고등학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있는 수리적 문제 상황을 제시하고, 논리적인 사고를 따르면 쉽게 해결할 수 있는 세부 문제로 구성하였다. 개별적인 교과 지식의 반복 학습과 암기를 통해 습득된 지식을 묻는 것을 지양하고, 수학적 원리에 대한 확실하고 통합적인 이해를 바탕으로 문제를 분석하여 해결하며 그 과정과 결과를 논리적으로 명확하게 기술할 수 있는지를 평가한다. 그리고 평가의 객관성을 위해 채점의 기준을 최대한 객관화할 수 있도록 출제하였다.

나. 문항별 출제의도

문제 1 수열의 합에서 수열의 일반항을 추론할 수 있는지 평가하며, 수열의 극한을 구할 수 있는지 평가한다. 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

문제 2 주어진 한 점 또는 구간에서 함수의 연속과 미분가능의 의미를 알고 있는지 평가하며, 사잇값 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

문제 3 지수함수와 로그함수의 의미를 알고 $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_2 x$가 서로 역함수 관계인 것을 이해한 후 미분을 활용하여 접선의 방정식을 구하고 정적분을 활용하여 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다. 그리고 귀납적으로 정의된 수열이 등차수열 및 등비수열임을 알고, 이를 활용하여 급수의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

문제 4 삼각함수의 뜻을 이해하고, 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 있는지를 평가한다. 그리고 주어진 선분의 길이를 삼각함수의 성질을 이용하여 함수로 표현하고, 이 함수의 변수의 범위를 정할 수 있고, 정의역이 제한된 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다. 마지막으로 삼각함수의 성질 또는 사인법칙 등을 이용하여 원에 내접하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

문제 1	교육과정	수학 Ⅰ-(3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 수학 Ⅰ-(3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합 미적분-(1) 수열의 극한-$\boxed{1}$ 수열의 극한
	성취기준/영역별 내용	[12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
문제 2	교육과정	수학-(3) 수와 연산-$\boxed{2}$ 명제 수학 Ⅱ-(1) 함수의 극한과 연속-$\boxed{2}$ 함수의 연속 수학 Ⅱ-(2) 미분-$\boxed{3}$ 도함수의 활용 수학 Ⅱ-(2) 적분-$\boxed{3}$ 정적분의 활용 미적분-(2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 미적분-(2) 미분법-$\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 미적분-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준/영역별 내용	[10수학03-06] 충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있다. [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12수학Ⅱ03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제 3	교육과정	수학 Ⅰ-(1) 지수함수와 로그함수-$\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수 수학 Ⅰ-(1) 지수함수와 로그함수-$\boxed{1}$ 지수와 로그 미적분-(1) 수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수 미적분-(2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 미적분-(2) 미분법-$\boxed{3}$ 도함수의 활용 미적분-(3) 적분법-$\boxed{2}$ 정적분의 활용
	성취기준/영역별 내용	[12수학Ⅰ01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 4	교육과정	수학-(1) 문자와 식-$\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 수학 Ⅰ-(2) 삼각함수-$\boxed{1}$ 삼각함수 수학 Ⅰ-(2) 삼각함수-$\boxed{2}$ 삼각함수의 활용 미적분-(2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
	성취기준/영역별 내용	[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

2) 자료 출처

도서명	
문제 1	[수학 1] 교학사, 권오남 외 14인, 2018년, 116쪽, 118쪽, 138쪽, 141쪽 [미적분] 천재교과서, 류희찬 외 9인, 2019년, 12쪽
문제 2	[수학] 동아출판 박교식 외 19인, 2018년, 193쪽 [수학 II] 천재교과서. 류희찬 외 10인, 2018년, 29쪽, 34쪽, 98쪽, 140쪽 [미적분] 천재교과서, 류희찬 외 9인, 2019년, 62쪽, 103쪽, 156쪽
문제 3	[수학 1] 교학사, 권오남 외 14인, 12쪽, 30쪽, 46쪽 [미적분] 천재교과서, 류희찬 외 9인, 2019년, 30쪽, 35쪽, 62쪽, 124쪽, 183쪽
문제 4	[수학] 동아출판, 박교식 외 18인, 2018년, 64쪽 [수학 I] 교학사, 권오남 외 14인, 2018년, 80쪽, 97쪽 [미적분] 천재교과서, 류희찬 외 9인, 2019년, 68쪽

4. 문항 별 배점

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	7	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	8	
문제1(3)	10	
문제2(1)	5	
문제2(2)	10	
문제2(3)	10	
문제3(1)	8	
문제3(2)	8	
문제3(3)	9	
문제4(1)	5	
문제4(2)	10	
문제4(3)	10	

5. 채점 기준

* 각 문제에 대하여 아래에 제시된 예시답안과 같이 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다.
  이후 등급을 해당 문제의 점수로 환산하여 총점을 계산한다.
* 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1등급을 감점한다.
* 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1등급을 감점한다.
* 백지답안은 7등급을 부여한다.

문제 1 (1)

① $b_n = b + (n-1)d$ 이고

② $a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \ (n \geq 2)$이므로

③ $a_n b_n = n(n+1)(2n+1) - n(n-1)(2n-1) = 6n^2 \ (n \geq 2)$

④ $b_n \neq 0$이므로 양변을 b_n으로 나누면 $a_n = \dfrac{6n^2}{b+(n-1)d} \ (n \geq 2)$

⑤ $a_1 b_1 = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $a_1 = \dfrac{6}{b}$이므로 $a_n = \dfrac{6n^2}{b+(n-1)d} \ (n \geq 1)$

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ①,②단계 모두 옳게 서술한 경우
5등급: ①,②단계 중 하나를 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 1 (2)

① $a_n = \dfrac{6n^2}{b+(n-1)d}$, $b_n = b + (n-1)d$ 이고

② $b_n \neq 0$이므로 양변을 b_n으로 나누면

③ $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{6n^2}{\{b+(n-1)d\}^2} = \dfrac{6}{\left\{\dfrac{b}{n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)d\right\}^2}$

④ $n \to \infty$ 일 때 $\dfrac{1}{n} \to 0$이므로

⑤ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{6}{\left\{\dfrac{b}{n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)d\right\}^2} = \dfrac{6}{d^2}$.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 1 (3)

① $a_n = \dfrac{6n^2}{b+(n-1)d}$에서 $b=d$이므로 $a_n = \dfrac{6n^2}{nd} = \dfrac{6n}{d}$

② $\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k} \neq 0$이므로

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k}$

④ $a_{k+1} - a_k = \dfrac{6}{d}$이므로

⑤ $\displaystyle\frac{d}{6}\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) = \frac{d}{6}(\sqrt{a_{11}} - \sqrt{a_1}) = \sqrt{\frac{d}{6}}(\sqrt{11}-1) = \frac{\sqrt{6d}(\sqrt{11}-1)}{6}$

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 2 (1)

① $v(t)$가 $t \geq 0$에서 연속이기 위한 필요충분조건은 $v(t)$가 $t=1$, $t=2$에서 연속인 것이다.

② $v(t)$가 $t=1$에서 연속이면 $\displaystyle\lim_{t\to1-} v(t) = \lim_{t\to1+} v(t) = v(1)$을 만족해야 하므로

③ $15 + a = -1 + b$ 따라서 $a - b = -16$이다.

④ $v(t)$가 $t=2$에서 연속이면 $\displaystyle\lim_{t\to2-} v(t) = \lim_{t\to2+} v(t) = v(2)$를 만족해야 하므로

⑤ $-2 + b = ce^{-1}$. 따라서 $b - e^{-1}c = 2$이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 2 (2)

① $v(t)$가 $t=2$에서 미분가능하기 위해서는 $\lim_{h\to 0-}\frac{v(2+h)-v(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{v(2+h)-v(2)}{h}$를 만족해야 한다.

② $\lim_{h\to 0-}\frac{v(2+h)-v(2)}{h}=-1$이고,

③ $f(t)=ce^{-\sqrt{t/2}}$라고 하면 $\lim_{h\to 0+}\frac{v(2+h)-v(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{ce^{-\sqrt{2+h}}-ce^{-\sqrt{2}}}{h}=f'(2)$

④ $f'(t)=-\frac{c}{2\sqrt{2t}}e^{-\sqrt{t/2}}$이므로

⑤ $-\frac{c}{4e}=-1$. 따라서 $c=4e$.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 2 (3)

① $v(t)$가 $t\geq 0$에서 연속이므로 $a-b=-16$, $b-e^{-1}c=2$를 만족한다.

② $v(t)$가 $t=2$에서 미분가능하므로, $c=4e$이다. 따라서 $b=6$, $a=-10$이다.

③ 이 때, $\int_0^2 v(t)dt=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^2 v(t)dt=\int_0^1(15t^2-10)dt+\int_1^2(-t+6)dt=-5+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$

④ 또한, $\int_2^8 v(t)dt=4e\int_2^8 e^{-\sqrt{t/2}}dt=16e\int_1^2 xe^{-x}dx=16e\times\frac{2e-3}{e^2}=32-\frac{48}{e}>8\ (\because\ 2<e<3)$

⑤ 거리를 나타내는 함수 $D(t)=\int_0^t v(s)ds$가 $t\geq 0$에서 연속이고, $D(2)<0<D(8)$이므로 사잇값 정리에 의해 원점에서 출발한 점 P가 $2<t<8$일 때, 원점을 적어도 한 번 다시 통과한다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 3 (1)

① (가) x축과 y축, $x=n$, $y=2^x$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^n 2^x \ dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^n = \frac{2^n-1}{\ln 2}$$

② (나) x축과 $x=n$, $x=2^n$, $y=-x+n+2^n$로 둘러싸인 부분은 사다리꼴이고 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2^n-n)\times(n+2^n)$

③ (다) x축과 $x=2^n$, $y=\log_2 x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 y축과 $y=2^n$, $y=2^x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고 이는

$$n\times 2^n - \int_0^n 2^x \, dx = n\times 2^n - \frac{2^n-1}{\ln 2}$$

또는 부분적분을 사용하여 적분하면

$$\int_1^{2^n} \log_2 x \, dx = \left[x\log_2 x - \frac{x}{\ln 2}\right]_1^{2^n} = n\times 2^n - \frac{2^n-1}{\ln 2}$$

④ (라) x축과 y축, $y=-x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$

⑤ 따라서 구하는 넓이는 (가) + (나) - (다) - (라)이므로

$$\frac{2(2^n-1)}{\ln 2} + \frac{2^n(2^n-2n)-n^2-1}{2}$$

[채점 기준]

1등급: 오류가 없이 답을 정확하게 구하고 명확하게 서술함

2등급: ①~④ 과정을 옳게 서술하였으나 최종 답이 틀림

3등급: ①~④ 과정에서 3개 맞음

4등급: ①~④ 과정에서 2개 맞음

5등급: ①~④ 과정에서 1개 맞음

6등급: 서술은 있으나 전체적으로 풀이가 틀림

7등급: 백지 답안

문제 3 (2)

① 점 $(2^n, g(2^n))$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 방정식은 $g'(2^n)=\frac{1}{2^n\ln 2}$이고 $g(2^n)=n$이므로

$$y=\frac{1}{2^n\ln 2}(x-2^n)+n$$

② 점 $(g(2^n), f(g(2^n)))$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 $g(2^n)=n$, $f(g(2^n))=2^n$, $f'(n)=2^n\ln 2$이므로

$$y=2^n\ln 2(x-n)+2^n$$

③ $n=0$일 때, 두 접선은 $y=\frac{1}{\ln 2}(x-1)$과 $y=\ln 2\,x+1$이므로 두 직선의 교점은 $\left(\frac{1}{1-\ln 2}, \frac{1}{1-\ln 2}\right)$이고

④ 삼각형의 넓이는 $\left(\frac{1}{1-\ln 2}\right)^2-\left(\frac{1}{1-\ln 2}-1\right)\left(\frac{1}{1-\ln 2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1+\ln 2}{2(1-\ln 2)}=\frac{1+\ln 2}{2-\ln 4}$ 이다.

(또는, 삼각형의 밑변의 길이는 $\sqrt{2}$ 이고 높이는 $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\ln 2}-\frac{1}{2}\right)$이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\ln 2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\ln 2}{2-\ln 4}$ 이다.)

[채점 기준]
1등급: 오류가 없이 답을 정확하게 구하고 명확하게 서술함
2등급: ①~④ 과정을 옳게 서술하였으나 실수가 1개 있는 경우
3등급: ①~③ 과정을 옳게 구한 경우
4등급: ①~② 과정을 옳게 구한 경우
5등급: ① 또는 ②에서 1개의 접선을 맞게 구하였거나 2개의 기울기를 맞게 구한 경우
6등급: 서술은 있으나 전체적으로 풀이가 틀림
7등급: 백지 답안

문제 3 (3)

① $a_1=1$이고 $n\geq 2$일 때 $a_n=g(2)+g(f(a_{n-1}))=1+a_{n-1}$이므로 a_n은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열이고 $a_n=n$이다.

② 따라서 $s_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이고

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{k\to\infty}2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=2$이다.

④ $b_1=1$이고 $n\geq 2$일 때 $b_n=f(-1)f(g(b_{n-1}))=\frac{b_{n-1}}{2}$이므로 수열 b_n은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

⑤ 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$이다.

[채점 기준]
1등급: 오류가 없이 답을 정확하게 구하고 명확하게 서술함
2등급: ①~⑤ 과정에서 4개를 옳게 서술한 경우
3등급: ①~⑤ 과정에서 3개를 옳게 서술한 경우
4등급: ①~⑤ 과정에서 2개를 옳게 서술한 경우
5등급: ① 또는 ④를 옳게 서술한 경우
6등급: 서술은 있으나 전체적으로 풀이가 틀림
7등급: 백지 답안

문제 4 (1)

① 각 QAB의 크기를 θ라디안이라 하면, AB가 원의 지름이므로 각 AQB와 각 APB는 직각이고

② 따라서 삼각형 AQB에서 $\cos\theta = \frac{a}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$이다.

③ 삼각형 ABP에서 $\cos 2\theta = \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{2}$이므로

④ $\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)$

⑤ $\overline{\mathrm{AP}} = a^2 - 2$

[채점 기준]

1등급: 오류가 없이 답을 정확하게 구하고 명확하게 서술함

2등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 1개의 오류가 있는 경우

3등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 2개의 오류가 있는 경우

4등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 3개의 오류가 있는 경우

5등급: ①을 옳게 서술한 경우

6등급: 서술은 있으나 전체적으로 풀이가 틀림

7등급: 백지 답안

문제 4 (2)

① $\overline{\mathrm{HK}} = a\cos\theta - \overline{\mathrm{AP}}\cos 2\theta$이고 $a = 2\cos\theta$, $\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos 2\theta$이므로

② $\overline{\mathrm{HK}} = 2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta = 2\cos^2\theta - 2(2\cos^2\theta - 1)^2$

③ $= -8\left(\cos^2\theta - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{9}{8}$

④ 각 PAB는 직각보다 작으므로 $2\theta < \frac{\pi}{2}$이고 따라서 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다. 이 때, $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\theta < 1$이므로

⑤ 선분 HK의 길이의 최댓값은 $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$일 때 $\frac{9}{8}$이다.

[다른 풀이]

θ에 대한 식이 아닌 a에 대한 식으로 정리하여도 된다. 이 경우

① $\overline{\mathrm{HK}} = a\cos\theta - \overline{\mathrm{AP}}\cos 2\theta$

② $= \frac{a^2}{2} - \frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a^2 - (a^2-2)^2\right)$

③ $= -\frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$ 이고

④ 문제의 조건으로부터 $\sqrt{2} < a < 2$이므로 $2 < a^2 < 4$이고

⑤ $\overline{\mathrm{HK}}$의 최댓값은 $a^2 = \frac{5}{2}$일 때 $\frac{9}{8}$이다.

[채점 기준]
1등급: 오류가 없이 답을 정확하게 구하고 명확하게 서술함
2등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 1개의 오류가 있는 경우
3등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 2개의 오류가 있는 경우
4등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 3개의 오류가 있는 경우
5등급: ①을 옳게 서술한 경우
6등급: 서술은 있으나 전체적으로 풀이가 틀림
7등급: 백지 답안

문제 4 (3)

① 위의 (2)의 결과로부터 $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$이므로

② $\overline{\mathrm{AQ}} = a = 2\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = a^2 - 2 = \frac{1}{2}$이고,

③ $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\cos2\theta = \frac{1}{4}$, $\sin2\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$가 성립한다.

④ $\overline{\mathrm{PQ}}$는 밑변이 $\frac{9}{8}$이고 높이가 $\overline{\mathrm{PH}} + \overline{\mathrm{QK}}$인 직사각형의 대각선이며

$\overline{\mathrm{PH}} + \overline{\mathrm{QK}} = \overline{\mathrm{AP}}\sin2\theta + \overline{\mathrm{AQ}}\sin\theta = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{\mathrm{PQ}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$이다.

⑤ 삼각형 PAQ의 넓이는 $\frac{\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AQ}} \times \overline{\mathrm{PQ}}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{32}$이다.

[다른 풀이]
① 위의 (2)의 결과로부터 $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$이므로

② $\overline{\mathrm{AQ}} = a = 2\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = a^2 - 2 = \frac{1}{2}$이고,

③ $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\cos2\theta = \frac{1}{4}$, $\sin2\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$가 성립한다.

④ 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$\sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos2\theta + \cos\theta\sin2\theta = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$이다.

⑤ 따라서 삼각형 PAQ의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AQ}} \times \sin(\theta + 2\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{32}$이다.

[채점 기준]
1등급: 오류가 없이 답을 정확하게 구하고 명확하게 서술함

2등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 1개의 오류가 있는 경우

3등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 2개의 오류가 있는 경우

4등급: ①을 옳게 서술하고 ②~⑤에서 3개의 오류가 있는 경우

5등급: ①을 옳게 서술한 경우

6등급: 서술은 있으나 전체적으로 풀이가 틀림

7등급: 백지 답안