2. 출제 의도

문제 1 두 직선의 수직 조건, 지수함수의 접선의 방정식, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 수열의 극한, 급수의 합 등 수학과 미적분 교과에서 기본이 되는 개념을 충실하게 학습하고 이를 활용할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하기 위해 출제하였다.

문제 2 직선의 기울기로 주어진 탄젠트 값과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 각을 구할 수 있는지 살펴본다. 또, 삼각형에서 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는지 그리고 사인법칙을 이용하여 변의 길이를 나타내고, 삼각함수의 극한을 구하는 과정을 논리적으로 설명할 수 있는지 평가하고자 한다.

문제 3 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구하는 과정을 이해하고 이를 이용하여 다항함수들이 포함된 문제를 해결할 수 있는지 살펴본다. 또한, 도함수를 활용하여 두 함수가 공통접선을 가지는 조건을 해석할 수 있는지 확인한다. 미분계수의 정의를 정확하게 이용하여 함수의 미분가능성을 확인할 수 있는지 평가하고자 한다.

문제 4 유리함수의 성질을 이해하고 이를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 유리함수를 구할 수 있는지 살펴보고자 한다. 또한 도형의 이동과 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다. 그리고 부등식을 이용하여 요구하는 조건을 만족하는 자연수의 범위를 구할 수 있는지 평가한다.

3. 출제 근거

가. 교육과정 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

문제 1	교육과정	[수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식 [미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 [미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수 [미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용
	성취기준/영역별 내용	[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

문제 2	교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
	성취기준/영역별 내용	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
문제 3	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - 1 미분계수와 도함수 [수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수의 활용 [수학 II] - (3) 적분 - 1 부정적분과 정적분 [수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분의 활용
	성취기준/영역별 내용	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
문제 4	교육과정	[수학] - (2) 방정식과 부등식 - 3 여러 가지 방정식과 부등식 [수학] - (3) 도형의 방정식 - 1 평면좌표 [수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식 [수학] - (3) 도형의 방정식 - 4 도형의 이동 [수학] - (5) 함수 - 2 유리함수와 무리함수 [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용
	성취기준/영역별 내용	[10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. [10수학04-04] 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다. [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. [10수학04-04] 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

문항	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
문제1	수학	김원경 외 14인	비상	2018	116-119
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2018	128-130
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	16-25, 34-39, 106-108, 166-167
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	16-23, 34-38, 101-103, 156-160
문제2	수학 I	박교식 외 19인	동아출판	2018	86-91
	수학 II	고성은 외 5인	신사고	2018	19-22
	미적분	황선욱 외 인	미래엔	2019	65-69, 71-74
문제3	수학 II	고성은 외 7인	신사고	2018	55-58, 133-137
	수학 II	배종숙 외 7인	금성출판사	2019	57, 60,127,139
	수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	55, 57, 125, 141
	수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2018	55, 56, 122, 136
문제4	수학	김원경 외 14인	비상	2018	76-87, 99-119, 140-150, 221-225
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2018	89-98, 114-130, 153-161, 236-242
	미적분	권오남 외 14인	교학사	2019	108-111, 140-148, 173-175
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	101-103, 127-133, 156-158

5. 문제 해설

문제 1 곡선 위에 있지 않은 한 점 $(n,0)$을 지나는 직선이 곡선 $y=e^{-x}$과 한 점에서 접할 때, 이 접선의 방정식과 접점을 구한다. 그리고 주어진 곡선과 이 곡선 위의 한 점에서의 접선 및 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 적분을 활용하여 구한 후 이러한 도형의 넓이로 주어진 수열의 극한을 계산한다. 또한 두 직선의 수직 조건을 이용하여 구해지는 직선과 또 다른 두 직선으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하고 이로부터 정의되는 등비급수의 합을 계산한다.

문제 2

(1) 두 직선 $y=2\sqrt{3}(x-1)$과 $y=\frac{\sqrt{3}}{7}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\angle\mathrm{OPQ}=\alpha-\beta$이고, $\tan\alpha=2\sqrt{3}$, $\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{7}$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}}{1+2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{7}}=\sqrt{3}$$

따라서 $\alpha-\beta=\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{3}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{OPQ})=\frac{1}{2}$이다.

(2) 두 직선 $y=2\sqrt{3}(x-1)$과 $y=\frac{\sqrt{3}}{7}x$의 교점 $\mathrm{P}(x,y)$의 좌표를 구하면 $2\sqrt{3}(x-1)=\frac{\sqrt{3}}{7}x$, $14(x-1)=x$로부터 $x=\frac{14}{13}$이고 $y=\frac{2\sqrt{3}}{13}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{1}{13}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$이다.

그리고 (1)에서 $\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{RQ}}^2=2^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2-2\times2\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos\frac{\pi}{3}=4+\frac{1}{13}-\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{53-2\sqrt{13}}{13}$$

이다.

(3) 두 직선 $y=(\tan k\theta)(x-1)$과 $y=(\tan\theta)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $k\theta$, θ이다.

따라서 $\angle\mathrm{OPQ}=k\theta-\theta=(k-1)\theta$, $\angle\mathrm{OQP}=\pi-k\theta$

이므로 $\triangle\mathrm{OPQ}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\pi-k\theta)}=\frac{f(\theta)}{\sin k\theta}=\frac{1}{\sin(k-1)\theta}$$

이다. 따라서 $f(\theta)=\frac{\sin k\theta}{\sin(k-1)\theta}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}f(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin k\theta}{\sin(k-1)\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{k\times\frac{\sin k\theta}{k\theta}}{(k-1)\times\frac{\sin(k-1)\theta}{(k-1)\theta}}$$

$$=\frac{k\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin k\theta}{k\theta}}{(k-1)\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin(k-1)\theta}{(k-1)\theta}}=\frac{k}{k-1}$$이다.

문제 3

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $f(x)-g(x)=x\{x^2-(2a-1)x+3a\}=0$의 근이다. 이때 4보다 큰 양의 실수 a에 대하여 $x^2-(2a-1)x+3a=0$에서 두 근의 합이 $2a-1>0$이고, 두 근의 곱이 $3a>0$이므로 두 근은 모두 양수이다. 따라서 두 곡선의 교점의 x좌표 중 $x=0$을 제외한 두 값은 0보다 크다. 구간 $[-2,0]$에서 $f(x)\le g(x)$이므로 직선 $x=-2$와 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_{-2}^{0}\{g(x)-f(x)\}dx=58$이다.

$$\int_{-2}^{0}\{-ax^2-3ax-x^3+(3a-1)x^2\}dx=\int_{-2}^{0}\{-x^3+(2a-1)x^2-3ax\}dx$$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(2a-1)x^3-\frac{3}{2}ax^2\right]_{-2}^{0}=4+\frac{8}{3}(2a-1)+6a=58$이므로 $a=5$이다.

(2) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)+b$가 어떤 한 점에서 공통접선을 가지려면 그 점에서 함숫값이 같고 접선의 기울기가 같아야 한다. $f'(x)=g'(x)$인 x값을 찾는다. $3x^2-28x=-10x-15$로부터 $x=1$ 또는 $x=5$이다. $x=1$일 때 $f(1)=g(1)+b$가 되어야 하므로 $1-14=-5-15+b$로부터 $b=7$이다. $x=5$일 때 $f(5)=g(5)+b$가 되어야 하므로 $125-350=-200+b$로부터 $b=-25$이다. 이 중 양수는 $b=7$이다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)+7$이 $x=1$에서 공통접선을 가지므로

$f(x)-\{g(x)+7\}=x^3-14x^2-(-5x^2-15x+7)=x^3-9x^2+15x-7=(x-1)^2(x-7)$이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)+7$의 교점의 x좌표는 $x=1$ 또는 $x=7$이다. 구간 $[1,7]$에서 $g(x)+7\ge f(x)$이므로 이 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{1}^{7}(-x^3+9x^2-15x+7)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^3-\frac{15}{2}x+7x\right]_{1}^{7}=108$이다.

(3) 주어진 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 그리고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하려면 $h(x)$가 $x=c$에서 미분가능하면 된다.

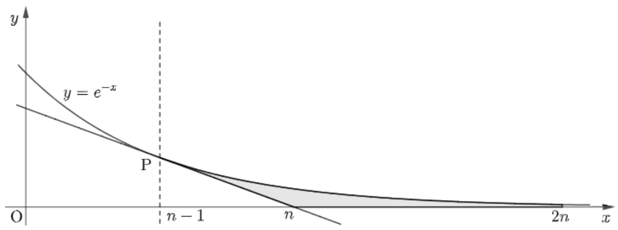
$$\lim_{t\to 0-}\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{h(c+t)-h(c)}{t}\ \cdots\cdots\ (\text{가})$$

(가)가 성립하도록 하는 실수 c를 찾으면 된다. 실수 t가 음수인 경우, $c+t<c$이므로 $\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\frac{f(c+t)-f(c)}{t}$가 되어, (가)의 좌변은 $f'(c)$가 된다. 실수 t가 양수인 경우, $c+t>c$이므로 $\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\frac{f(c-t)-f(c)}{t}=(-1)\times\frac{f(c-t)-f(t)}{-t}$가 되어, (가)의 우변은 $-f'(c)$가 된다. 따라서 (가)가 성립하기 위해서는 $f'(c)=-f'(c)$가 성립해야 하고, $f'(c)=0$이 되는 실수 c를 찾는다. $f'(x)=3x^2-28x$이므로, $f'(c)=0$인 실수 c는 $c=0,\ \frac{28}{3}$이다.

문제 4 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (단, $ad-bc \neq 0$, $c \neq 0$)인 유리함수 $f(x)$가 자연수 n에 대하여 주어진 두 조건을 만족할 때, 유리함수가 갖고 있는 성질을 이용하면 $f(x)$를 구체적으로 구할 수 있다. 그리고 주어진 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 활용하여 계산한다. 또한 $n+2 \leq x \leq n+3$인 모든 실수 x에 대하여 $(n+1)^2 f(x) \leq n^2 f(x-1)$이 성립하는 자연수 n의 최솟값을 유리함수의 성질과 부등식을 이용하여 구한다.

6. 채점 기준

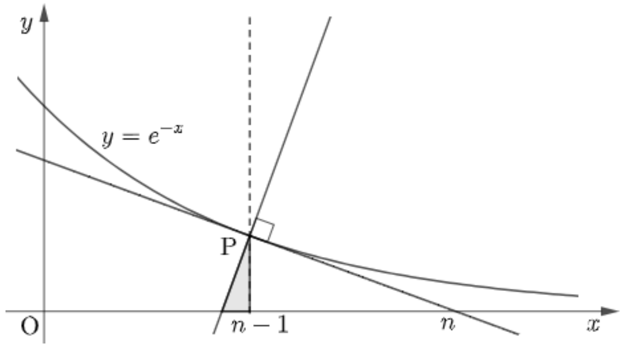
문제 1

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	① 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(c,\ e^{-c})$에서의 접선의 기울기를 m이라 두면 $(e^{-x})'=-e^{-x}$으로부터 $m=-e^{-c}$이고 ② 접선의 방정식 $y=-e^{-c}(x-c)+e^{-c}$이 점 $(n,\ 0)$을 지나므로 ③ $0=-e^{-c}(n-c)+e^{-c}=e^{-c}(c-n+1)$이고 $e^{-c}\neq 0$이므로 $c=n-1$이다. ④ 접선의 방정식은 $y=-e^{1-n}(x-n)$, ⑤ 접점은 $\mathrm{P}(n-1,\ e^{1-n})$이다. (별해: ①에서 점 $(n,\ 0)$을 지나는 직선을 $y=m(x-n)$으로 놓고 접선 조건을 이용해 기울기 m을 계산해도 된다.) **[채점 기준]** 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ①~③단계를 옳게 서술하고 ④ 또는 ⑤ 중 1개의 오류가 있는 경우 3등급 : ①~③단계까지만 옳게 서술한 경우 4등급 : ①~②단계까지만 옳게 서술한 경우 5등급 : ①~②단계에서 미분으로 직선의 기울기만 구했거나, 직선 위의 점 $(n,\ 0)$을 이용해 $y=m(x-n)$형태의 식만 세운 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지 답안	8점
(2)	① $a_n=\int_{n-1}^{n}\{e^{-x}-(-e^{1-n}x+ne^{1-n})\}\,dx+\int_{n}^{2n}e^{-x}\,dx$  ② $\int_{n-1}^{n}\{e^{-x}-(-e^{1-n}x+ne^{1-n})\}\,dx=e^{1-n}-e^{-n}-\frac{e^{1-n}}{2}$ ③ $\int_{n}^{2n}e^{-x}\,dx=e^{-n}-e^{-2n}$ ④ $a_n=\int_{n-1}^{n}\{e^{-x}-(-e^{1-n}x+ne^{1-n})\}\,dx+\int_{n}^{2n}e^{-x}\,dx$ $=\frac{e^{1-n}}{2}-e^{-2n}$ ⑤ $0<\frac{1}{e}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}e^{n}a_n=\frac{e}{2}-\lim_{n\to\infty}e^{-n}=\frac{e}{2}$이다.	8점

<table>
<tr>
<td></td>
<td>[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ①~④단계를 옳게 서술하고 ⑤의 과정에서 오류가 있는 경우
3등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 1개 있는 경우
4등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 2개 이상인 경우
5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>(3)</td>
<td>① 점 P를 지나고 접선 ℓ에 수직인 직선의 방정식은
$y=e^{n-1}(x-n+1)+e^{1-n}$이고,

② 이 직선의 x절편은 $n-1-e^{2-2n}$이므로

③ 삼각형의 넓이는 $b_n=\dfrac{1}{2}\times e^{2-2n}\times e^{1-n}=\dfrac{1}{2}e^{3-3n}$이다.



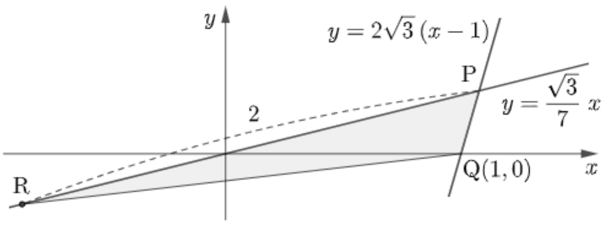
④ $b_n=\dfrac{e^3}{2}\left(\dfrac{1}{e^3}\right)^n$이고 $0<\dfrac{1}{e^3}<1$이므로

⑤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^3}{2}\left(\frac{1}{e^3}\right)^n=\frac{e^3}{2(e^3-1)}$이다.

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ①~③단계를 옳게 서술하고 ④ 또는 ⑤ 중 1개의 오류가 있는 경우
3등급 : ①~③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급 : ①~②단계까지만 옳게 제시한 경우
5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안</td>
<td>9점</td>
</tr>
</table>

문제 2

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>
① 두 직선 $y = 2\sqrt{3}\,(x-1)$과 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{7}x$ 가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\angle \mathrm{OPQ} = \alpha - \beta$ 이고,
② $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$, $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$ 이므로
③ 삼각함수의 덧셈정리에 의하여
$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{7}}{1+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{7}} = \sqrt{3}$
④ 따라서 $\alpha-\beta = \angle \mathrm{OPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $\cos(\angle \mathrm{OPQ}) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음
2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지만 맞은 경우
4등급: ②단계까지만 맞은 경우
5등급: ①단계 또는 ②단계 중 하나만 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안
</td><td>7점</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>
① 두 직선 $y = 2\sqrt{3}\,(x-1)$과 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{7}x$ 의 교점 $\mathrm{P}(x, y)$의 좌표를 구하면
$2\sqrt{3}\,(x-1) = \dfrac{\sqrt{3}}{7}x$, $14(x-1) = x$로부터
② $x = \dfrac{14}{13}$ 이고 $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{13}$ 이다.
③ 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{13}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$ 이다.
④ 그리고 (1)에서 $\angle \mathrm{OPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{RQ}}^2 = 2^2 + \overline{\mathrm{PQ}}^2 - 2\times 2\times \overline{\mathrm{PQ}}\times\cos\dfrac{\pi}{3} = 4 + \dfrac{1}{13} - \dfrac{2\sqrt{13}}{13} = \dfrac{53-2\sqrt{13}}{13}$
이다.


[다른 풀이]
① 점 $\mathrm{Q}(1, 0)$에서 직선 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{7}x$, 즉 $\sqrt{3}x - 7y = 0$에 내린 수선의 발을 T라 하면
$\overline{\mathrm{QT}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+49}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{39}}{26}$ 이다.
</td><td>8점</td></tr>
</table>

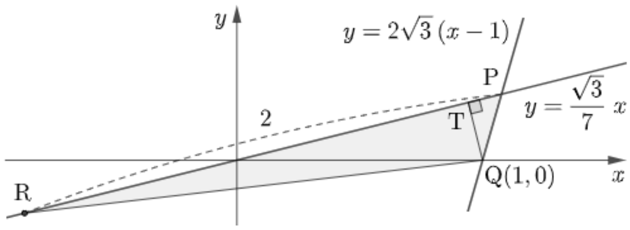
② (1)에서 $\angle \mathrm{OPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PT}} = \overline{\mathrm{QT}}\cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{26}$$

③ $\overline{\mathrm{RT}} = 2 - \dfrac{\sqrt{13}}{26}$ 이다.

④ 따라서 $\overline{\mathrm{RQ}}^2 = \overline{\mathrm{RT}}^2 + \overline{\mathrm{QT}}^2 = \left(2 - \dfrac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2 + \dfrac{3}{52}$

$$= 4 - \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{52} + \frac{3}{52} = 4 - \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{13} = \frac{53 - 2\sqrt{13}}{13}$$ 이다.



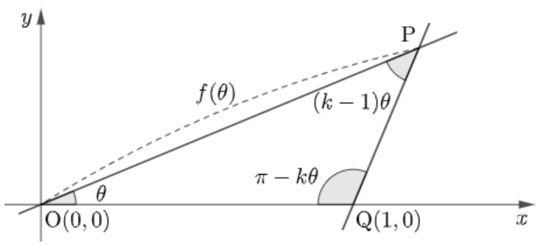
[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음
2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지만 맞은 경우
4등급: ②단계까지만 맞은 경우
5등급: ①단계까지만 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

(3)

① 두 직선 $y = (\tan k\theta)(x-1)$과 $y = (\tan\theta)x$ 가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $k\theta$, θ이다.

② 따라서
$\angle \mathrm{OPQ} = k\theta - \theta = (k-1)\theta$, $\angle \mathrm{OQP} = \pi - k\theta$
이므로



③ $\triangle \mathrm{OPQ}$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\pi - k\theta)} = \frac{f(\theta)}{\sin k\theta} = \frac{1}{\sin(k-1)\theta}$$ 이다.

④ 따라서 $f(\theta) = \dfrac{\sin k\theta}{\sin(k-1)\theta}$ 이므로

⑤ $$\lim_{\theta\to0+} f(\theta) = \lim_{\theta\to0+}\frac{\sin k\theta}{\sin(k-1)\theta} = \lim_{\theta\to0+}\frac{k \times \dfrac{\sin k\theta}{k\theta}}{(k-1)\times\dfrac{\sin(k-1)\theta}{(k-1)\theta}}$$

10점

<table>
<tr><td></td><td>

$$= \frac{k \times \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin k\theta}{k\theta}}{(k-1) \times \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin (k-1)\theta}{(k-1)\theta}} = \frac{k}{k-1} \text{이다.}$$

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ⑤단계까지의 과정 중 단순 계산 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지만 서술한 경우
4등급: ②단계까지만 서술한 경우
5등급: ①단계까지만 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안
</td><td></td></tr>
</table>

문제 3

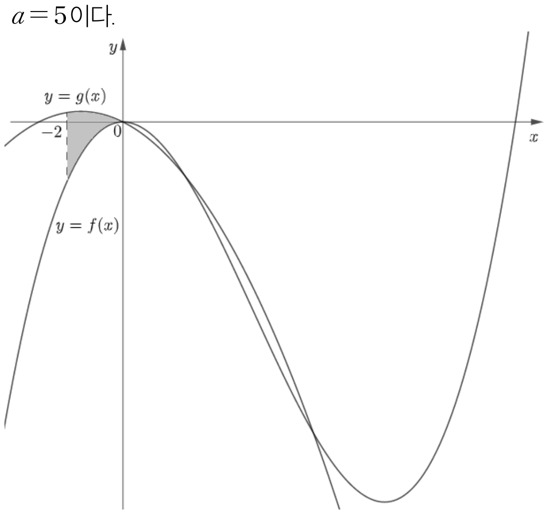
<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>

① 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 교점의 x좌표는
$f(x) - g(x) = x\{x^2 - (2a-1)x + 3a\} = 0$의 근이다. 이때 4보다 큰 양의 실수 a에 대하여 $x^2 - (2a-1)x + 3a = 0$에서 두 근의 합이 $2a - 1 > 0$이고, 두 근의 곱이 $3a > 0$이므로 두 근은 모두 양수이다. 따라서 두 곡선의 교점의 x좌표 중 $x = 0$을 제외한 두 값은 0보다 크다.

② 구간 $[-2, 0]$에서 $f(x) \leq g(x)$이므로 직선 $x = -2$와 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\int_{-2}^{0} \{g(x) - f(x)\}dx = 58$이다.

③ $\int_{-2}^{0} \{-ax^2 - 3ax - x^3 + (3a-1)x^2\}dx$
$= \int_{-2}^{0} \{-x^3 + (2a-1)x^2 - 3ax\}dx$
$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(2a-1)x^3 - \frac{3}{2}ax^2\right]_{-2}^{0}$
$= 4 + \frac{8}{3}(2a-1) + 6a$
$= 58$이므로

④ $a = 5$이다.



</td><td>8점</td></tr>
</table>

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 서술했으나 답 혹은 과정에 오류가 1개 있는 경우 (②단계에서 부호가 틀린 경우 등)
3등급 : ③단계까지 맞은 경우
4등급 : ②단계까지 맞은 경우
5등급 : ①단계까지 맞은 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 과정이 전혀 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

(2)

① 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)+b$가 어떤 한 점에서 공통접선을 가지려면 그 점에서 함숫값이 같고 접선의 기울기가 같아야 한다.

② $f'(x)=g'(x)$인 x값을 찾는다. $3x^2-28x=-10x-15$로부터 $x=1$ 또는 $x=5$이다.
$x=1$일 때 $f(1)=g(1)+b$가 되어야 하므로 $1-14=-5-15+b$로부터 $b=7$이다.
$x=5$일 때 $f(5)=g(5)+b$가 되어야 하므로 $125-350=-200+b$로부터 $b=-25$이다. 이 중 양수는 $b=7$이다.

③ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)+7$이 $x=1$에서 공통접선을 가지므로

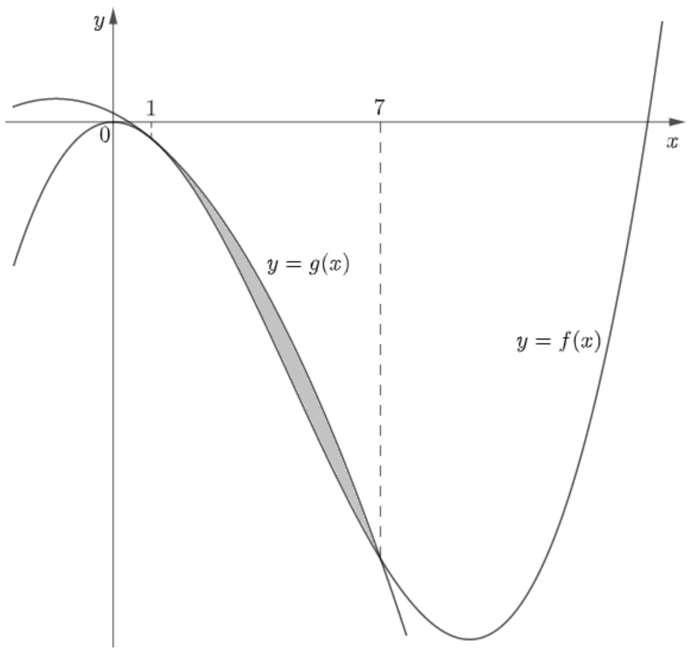
$$f(x)-\{g(x)+7\}=x^3-14x^2-(-5x^2-15x+7)=x^3-9x^2+15x-7$$
$$=(x-1)^2(x-7)$$

이다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)+7$의 교점의 x좌표는 $x=1$ 또는 $x=7$이다.

④ 구간 $[1,7]$에서 $g(x)+7\geq f(x)$이므로 이 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^7(-x^3+9x^2-15x+7)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^3-\frac{15}{2}x^2+7x\right]_1^7=108$$

이다.



8점

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 서술하였으나 답 혹은 과정에 오류가 1개 있는 경우
3등급 : ③단계까지 맞은 경우
4등급 : ②단계까지 맞은 경우
5등급 : ①단계까지 맞은 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 과정이 전혀 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

(3)	① 주어진 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 그리고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하려면 $h(x)$가 $x=c$에서 미분가능하면 된다. $\lim_{t\to 0-}\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{h(c+t)-h(c)}{t}$ ⋯ (가) (가)가 성립하도록 하는 실수 c를 찾으면 된다. ② 실수 t가 음수인 경우, $c+t<c$이므로 $\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\frac{f(c+t)-f(c)}{t}$가 되어, (가)의 좌변은 $f'(c)$가 된다. ③ 실수 t가 양수인 경우, $c+t>c$이므로 $\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\frac{f(c-t)-f(c)}{t}=(-1)\times\frac{f(c-t)-f(t)}{-t}$가 되어, (가)의 우변은 $-f'(c)$가 된다. 따라서 (가)가 성립하기 위해서는 $f'(c)=-f'(c)$가 성립해야 하고, $f'(c)=0$이 되는 실수 c를 찾는다. ④ $f'(x)=3x^2-28x$이므로, $f'(c)=0$인 실수 c는 $c=0,\ \frac{28}{3}$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계까지 서술하였으나 답 혹은 과정에 오류가 1개 있는 경우 3등급 : ③단계까지 맞은 경우 4등급 : ②단계까지 맞은 경우 5등급 : ①단계에서 미분의 정의를 사용하지 않았으나 대략적인 설명이 맞은 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 과정이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지 답안	9점

문제 4

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	① 구하는 유리함수는 $y=\frac{k}{x-p}+q$ (단, $k\neq 0$인 상수) 형태로 표현되고 ② 조건 (가)에 의하여 $p=n,\ q=0$이다. ③ 조건 (나)로부터 $\mathrm{P}\left(2n,\ \frac{k}{n}\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ -\frac{k}{n}\right)$이고 ④ $k>0$이므로 주어진 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2n)\times\frac{2k}{n}=\frac{2}{n^2}$이고 $k=\frac{1}{n^2}$이다. 따라서 $f(x)=\frac{\frac{1}{n^2}}{x-n}=\frac{1}{n^2(x-n)}$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ①~④단계에서 1개의 오류가 있는 경우 3등급 : ①~④단계에서 오류가 2개 있는 경우 4등급 : ①~④단계에서 오류가 3개 이상인 경우 5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지 답안	8점

(2)

① $n=1$일 때 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$이고

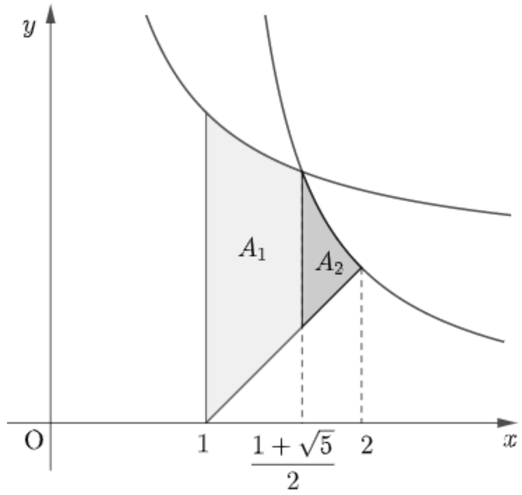
② 곡선 $y=\dfrac{1}{x-1}$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은
$y=\dfrac{1}{x}+1$이다.

③ 이 두 곡선의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\dfrac{1}{x-1}=x$로부터 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$이고 제1사분면 위의 점은 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$이다.

④ 그림과 같이 도형의 넓이는 A_1+A_2이고

$$A_1=\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left\{1+\frac{1}{x}-(x-1)\right\}dx=\left[\ln\mid x\mid+2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$=\frac{-5+3\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$A_2=\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2}\left\{\frac{1}{x-1}-(x-1)\right\}dx=\left[\ln\mid x-1\mid-\frac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2}$$
$$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

이므로 도형의 넓이는 $A_1+A_2=\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}+2\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$이다.



(별해: ④의 계산에서 $\displaystyle\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2}\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}$을 계산하여도 된다.)

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ①~③단계를 옳게 서술하고 ④의 과정에서 오류가 있는 경우
3등급 : ①~③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급 : ①~②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

8점

(3)

① $f(x)=\dfrac{1}{n^2(x-n)}$, $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}f(x-1)=\dfrac{1}{(n+1)^2\{x-(n+1)\}}$이므로

$x>n+1$이면 $f(x)>0$, $f(x-1)>0$이다.

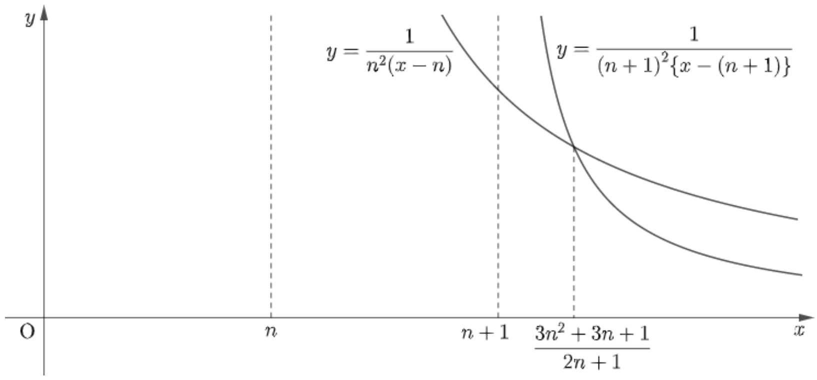
$x>n+1$일 때 $n^2f(x-1)\ge(n+1)^2f(x)$가 성립하는 x의 범위를

구하면 $\dfrac{1}{(n+1)^2x-(n+1)^3}\ge\dfrac{1}{n^2x-n^3}$이므로

$n^2x-n^3\ge(n+1)^2x-(n+1)^3$이고 이를 정리하면

$(2n+1)x\le 3n^2+3n+1$이다.

② n이 자연수이므로 $2n+1>0$이고 양변을 $2n+1$로 나누면 $x\le\dfrac{3n^2+3n+1}{2n+1}$이다.



③ $n+2\le x\le n+3$인 모든 실수 x에 대하여

$n^2f(x-1)\ge(n+1)^2f(x)$가 성립하려면 $n+3\le\dfrac{3n^2+3n+1}{2n+1}$

이어야 하고, 이를 정리하면 $n^2-4n-2\ge0$이다.

④ 따라서 $n\le 2-\sqrt{6}$ 또는 $n\ge 2+\sqrt{6}$이므로 이를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ①~③단계를 옳게 서술하고 ④의 과정에서 오류가 있는 경우
3등급 : ①~③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급 : ①~③단계까지 서술하였지만 ②~③단계에서 오류가 있는 경우
5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

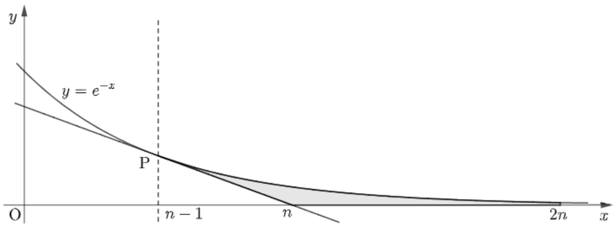
9점

7. 예시 답안

문제 1

(1) 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(c,\ e^{-c})$에서의 접선의 기울기를 m이라 두면 $(e^{-x})'=-e^{-x}$으로부터 $m=-e^{-c}$이고 접선의 방정식 $y=-e^{-c}(x-c)+e^{-c}$이 점 $(n,\ 0)$을 지나므로 $0=-e^{-c}(n-c)+e^{-c}=e^{-c}(c-n+1)$이고 $e^{-c}\neq 0$이므로 $c=n-1$이다. 접선의 방정식은 $y=-e^{1-n}(x-n)$, 접점은 $\mathrm{P}(n-1,\ e^{1-n})$이다.

(2) $a_n=\displaystyle\int_{n-1}^{n}\{e^{-x}-(-e^{1-n}x+ne^{1-n})\}\ dx+\int_{n}^{2n}e^{-x}\,dx$이고



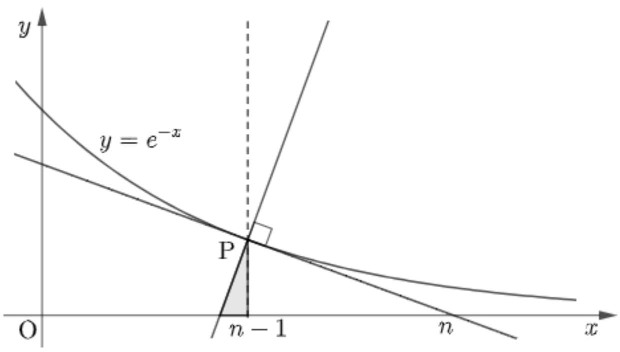
$$\int_{n-1}^{n}\{e^{-x}-(-e^{1-n}x+ne^{1-n})\}\ dx=e^{1-n}-e^{-n}-\frac{e^{1-n}}{2}$$

$\displaystyle\int_{n}^{2n}e^{-x}\,dx=e^{-n}-e^{-2n}$이므로

$a_n=\displaystyle\int_{n-1}^{n}\{e^{-x}-(-e^{1-n}x+ne^{1-n})\}\ dx+\int_{n}^{2n}e^{-x}\,dx=\frac{e^{1-n}}{2}-e^{-2n}$이다.

그러므로 $0<\dfrac{1}{e}<1$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{n}a_n=\frac{e}{2}-\lim_{n\to\infty}e^{-n}=\frac{e}{2}$이다.

(3) 점 P를 지나고 접선 ℓ에 수직인 직선의 방정식은 $y=e^{n-1}(x-n+1)+e^{1-n}$이고, 이 직선의 x절편은 $n-1-e^{2-2n}$이므로 삼각형의 넓이는 $b_n=\dfrac{1}{2}\times e^{2-2n}\times e^{1-n}=\dfrac{1}{2}e^{3-3n}$이다.



$b_n=\dfrac{e^3}{2}\left(\dfrac{1}{e^3}\right)^n$이고 $0<\dfrac{1}{e^3}<1$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^3}{2}\left(\frac{1}{e^3}\right)^n=\frac{e^3}{2(e^3-1)}$이다.

문제 2

(1) 두 직선 $y=2\sqrt{3}(x-1)$과 $y=\frac{\sqrt{3}}{7}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\angle \mathrm{OPQ}=\alpha-\beta$이고, $\tan\alpha=2\sqrt{3}$, $\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{7}$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}}{1+2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{7}}=\sqrt{3}$$

따라서 $\alpha-\beta=\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{3}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{OPQ})=\frac{1}{2}$이다.

(2) 두 직선 $y=2\sqrt{3}(x-1)$과 $y=\frac{\sqrt{3}}{7}x$의 교점 $\mathrm{P}(x,y)$의 좌표를 구하면 $2\sqrt{3}(x-1)=\frac{\sqrt{3}}{7}x$, $14(x-1)=x$로부터 $x=\frac{14}{13}$이고 $y=\frac{2\sqrt{3}}{13}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{1}{13}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$이다. 그리고

(1)에서 $\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{RQ}}^2=2^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2-2\times2\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos\frac{\pi}{3}=4+\frac{1}{13}-\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{53-2\sqrt{13}}{13}$$

이다.

(3) 두 직선 $y=(\tan k\theta)(x-1)$과 $y=(\tan\theta)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $k\theta$, θ이다.

따라서 $\angle\mathrm{OPQ}=k\theta-\theta=(k-1)\theta$, $\angle\mathrm{OQP}=\pi-k\theta$

이므로 $\Delta\,\mathrm{OPQ}$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\pi-k\theta)}=\frac{f(\theta)}{\sin k\theta}=\frac{1}{\sin(k-1)\theta}$$

이다. 따라서 $f(\theta)=\frac{\sin k\theta}{\sin(k-1)\theta}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}f(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin k\theta}{\sin(k-1)\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{k\times\frac{\sin k\theta}{k\theta}}{(k-1)\times\frac{\sin(k-1)\theta}{(k-1)\theta}}$$

$$=\frac{k\times\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin k\theta}{k\theta}}{(k-1)\times\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin(k-1)\theta}{(k-1)\theta}}=\frac{k}{k-1}$$ 이다.

문제 3

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $f(x)-g(x)=x\{x^2-(2a-1)x+3a\}=0$의 근이다. 이때 4보다 큰 양의 실수 a에 대하여 $x^2-(2a-1)x+3a=0$에서 두 근의 합이 $2a-1>0$이고, 두 근의 곱이 $3a>0$이므로 두 근은 모두 양수이다. 따라서 두 곡선의 교점의 x좌표 중 $x=0$을 제외한 두 값은 0보다 크다. 구간 $[-2,0]$에서 $f(x)\le g(x)$이므로 직선 $x=-2$와 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_{-2}^{0}\{g(x)-f(x)\}dx=58$이다.

$$\int_{-2}^{0}\{-ax^2-3ax-x^3+(3a-1)x^2\}dx=\int_{-2}^{0}\{-x^3+(2a-1)x^2-3ax\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(2a-1)x^3-\frac{3}{2}ax^2\right]_{-2}^{0}=4+\frac{8}{3}(2a-1)+6a=58$$이므로 $a=5$이다.

(2) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)+b$가 어떤 한 점에서 공통접선을 가지려면 그 점에서 함숫값이 같고 접선의 기울기가 같아야 한다. $f'(x)=g'(x)$인 x값을 찾는다. $3x^2-28x=-10x-15$로부터 $x=1$ 또는 $x=5$이다. $x=1$일 때 $f(1)=g(1)+b$가 되어야 하므로 $1-14=-5-15+b$로부터 $b=7$이다. $x=5$일 때 $f(5)=g(5)+b$가 되어야 하므로 $125-350=-200+b$로부터 $b=-25$이다. 이 중 양수는 $b=7$이다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)+7$이 $x=1$에서 공통접선을 가지므로

$f(x)-\{g(x)+7\}=x^3-14x^2-(-5x^2-15x+7)=x^3-9x^2+15x-7=(x-1)^2(x-7)$이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)+7$의 교점의 x좌표는 $x=1$ 또는 $x=7$이다. 구간 $[1,7]$에서 $g(x)+7\ge f(x)$이므로 이 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{1}^{7}(-x^3+9x^2-15x+7)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^3-\frac{15}{2}x+7x\right]_{1}^{7}=108$$이다.

(3) 주어진 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 그리고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하려면 $h(x)$가 $x=c$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{t\to0-}\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{h(c+t)-h(c)}{t}\quad\cdots\text{(가)}$$

(가)가 성립하도록 하는 실수 c를 찾으면 된다. 실수 t가 음수인 경우, $c+t<c$이므로

$\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\frac{f(c+t)-f(c)}{t}$가 되어, (가)의 좌변은 $f'(c)$가 된다. 실수 t가 양수인 경우, $c+t>c$이므로

$\frac{h(c+t)-h(c)}{t}=\frac{f(c-t)-f(c)}{t}=(-1)\times\frac{f(c-t)-f(t)}{-t}$가 되어, (가)의 우변은 $-f'(c)$가 된다. 따라서 (가)가 성립하기 위해서는 $f'(c)=-f'(c)$가 성립해야 하고, $f'(c)=0$이 되는 실수 c를 찾는다.

$f'(x)=3x^2-28x$이므로, $f'(c)=0$인 실수 c는 $c=0,\ \frac{28}{3}$이다.

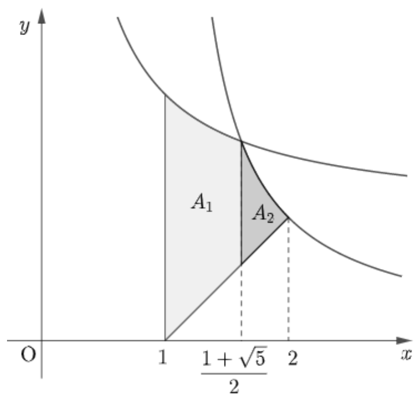
문제 4

(1) 구하는 유리함수는 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ (단, $k\neq 0$인 상수) 형태로 표현되고 조건 (가)에 의하여 $p=n,\ q=0$이다. 조건 (나)로부터 $\mathrm{P}\left(2n,\ \dfrac{k}{n}\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ -\dfrac{k}{n}\right)$이고 $k>0$이므로 주어진 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(2n)\times\dfrac{2k}{n}=\dfrac{2}{n^2}$이고 $k=\dfrac{1}{n^2}$이다. 따라서 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{n^2}}{x-n}=\dfrac{1}{n^2(x-n)}$이다.

(2) $n=1$일 때 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$이고 곡선 $y=\dfrac{1}{x-1}$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=\dfrac{1}{x}+1$이다. 이 두 곡선의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\dfrac{1}{x-1}=x$로부터 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$이고 제1사분면 위의 점은 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$이다. 오른쪽 그림과 같이 도형의 넓이는 A_1+A_2이고

$$A_1=\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left\{1+\frac{1}{x}-(x-1)\right\}dx=\left[\ln|x|+2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$=\frac{-5+3\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

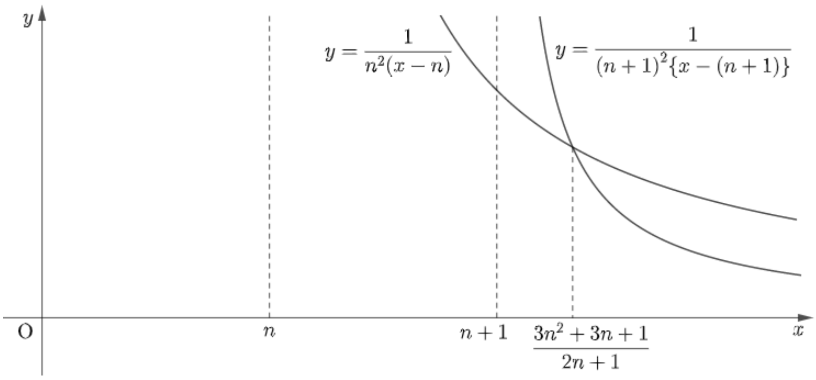
$$A_2=\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2}\left\{\frac{1}{x-1}-(x-1)\right\}dx=\left[\ln|x-1|-\frac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2}$$
$$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$



이므로 도형의 넓이는 $A_1+A_2=\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}+2\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$이다.

(별해: ④의 계산에서 $\displaystyle\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2}\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}$을 계산하여도 된다.)

(3) $f(x)=\dfrac{1}{n^2(x-n)}$, $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}f(x-1)=\dfrac{1}{(n+1)^2\{x-(n+1)\}}$이므로 $x>n+1$이면 $f(x)>0$, $f(x-1)>0$이다. $x>n+1$일 때 $n^2f(x-1)\ge(n+1)^2f(x)$가 성립하는 x의 범위를 구하면 $\dfrac{1}{(n+1)^2x-(n+1)^3}\ge\dfrac{1}{n^2x-n^3}$이므로 $n^2x-n^3\ge(n+1)^2x-(n+1)^3$이고 이를 정리하면 $(2n+1)x\le 3n^2+3n+1$이다. n이 자연수이므로 $2n+1>0$이고 양변을 $2n+1$로 나누면 $x\le\dfrac{3n^2+3n+1}{2n+1}$이다.



$n+2\le x\le n+3$인 모든 실수 x에 대하여 $n^2f(x-1)\ge(n+1)^2f(x)$가 성립하려면 $n+3\le\dfrac{3n^2+3n+1}{2n+1}$이어야 하고, 이를 정리하면 $n^2-4n-2\ge0$이다. 따라서 $n\le 2-\sqrt{6}$ 또는 $n\ge 2+\sqrt{6}$이므로 이를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.