2. 출제의도

가. 교육과정 근거

- 우리대학의 자연계 논술 시험은 예년과 마찬가지로 수험생의 학업 부담을 경감시키고자 수학 문제로만 구성하여, 고등학교 수학의 기초 원리를 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 한다. 출제범위는 고등학교 공통 수학, 수학 I, 수학 II, 미적분으로 한정한다. 고등학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있는 수리적 문제 상황을 제시하고, 논리적인 사고를 따르면 쉽게 해결할 수 있는 세부 문제로 구성하였다. 개별적인 교과 지식의 반복 학습과 암기를 통해 습득된 지식을 묻는 것을 지양하고, 수학적 원리에 대한 확실하고 통합적인 이해를 바탕으로 문제를 분석하여 해결하며 그 과정과 결과를 논리적으로 명확하게 기술할 수 있는지를 평가한다. 그리고 평가의 객관성을 위해 채점의 기준을 문제의 특성과 평가 방향에 따라 명확하게 제시할 수 있도록 출제하였다.

나. 문항별 출제의도

- [문제 1] 곱의 미분법 및 삼각함수의 미분을 이용하여 함수의 미분에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가하며, 접선의 방정식과 수열의 극한을 이해하고 있는지 확인한다.
- [문제 2] 주어진 극한값 조건을 만족하는 함수를 구할 수 있는지 평가하며, 두 곡선이 접하고 있을 때의 의미를 알고 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 적분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.
- [문제 3] 매개변수로 나타낸 함수의 미분을 이해하고 여러 가지 함수의 미분을 구할 수 있는지 확인한다. 또한 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리의 개념을 이해하고, 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있는지 평가한다.
- [문제 4] 주어진 도형을 만드는 각 단계를 이해하여 이 과정에서 등비급수의 공비를 찾을 수 있고, 등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이의 극한을 구하는 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

3. 출제근거

가. 교육과정 근거

문제 1	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{2}$ 미분계수와 도함수 [미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준/영역별 내용	[12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 2	교육과정	[수학]-(2) 기하 - $\boxed{2}$ 직선의 방정식 (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수 [수학II]-(2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수 $\boxed{3}$ 도함수의 활용 (3) 적분 - $\boxed{3}$ 정적분의 활용
	성취기준/영역별 내용	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 3	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용
	성취기준/영역별 내용	[12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 4	교육과정	[수학 I] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{2}$ 급수
	성취기준/영역별 내용	[12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

나. 자료 출처

문제	도서명
문제 1	[수학 II] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, p.73 [미적분] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2019년, p.62, p.76, p.87
문제 2	[수학 II] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, p.55, p.73 [미적분] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2019년, p.113, p.166
문제 3	[미적분] 좋은책신사고, 고성은 외 5인, 2019년, p.77, p.80, p.85, p.132, p.142, p.162
문제 4	[수학 I] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, p.115 [미적분] 천재교육, 류희찬 외 9인, 2019년, p.35, p.38

4. 배점기준표

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	5	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	12	
문제1(3)	8	
문제2(1)	5	
문제2(2)	10	
문제2(3)	10	
문제3(1)	10	
문제3(2)	5	
문제3(3)	10	
문제4(1)	5	
문제4(2)	10	
문제4(3)	15	

5. 채점 기준

* 각 문제에 대하여 아래에 제시된 예시답안과 같이 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다.
  이후 등급을 해당 문제의 점수로 환산하여 총점을 계산한다.
* 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1등급을 감점한다.
* 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1등급을 감점한다.
* 백지답안은 7등급을 부여한다.

문제 1

1)

① $n=1$일 때, $f(0)=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$이고

② $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

③ $f(0)=\frac{1}{2}$ 이다.

④ $f'(0)=\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$ 이고

⑤ $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $f'(0)=\frac{1}{2}(1+2)=\frac{3}{2}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 1

2)

① $f(0)=n\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{n}{2}$ 이다.

② $f'(0)=\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)+\left(2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}+3\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$+\cdots+\left(n\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}+(n+1)\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)$

③ $f'(0)=\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(1+\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}\right)$

④ 따라서 $f'(0)=\frac{1}{2}\{1+2(2+3+\cdots+n)+n+1\}$ 이므로

⑤ $f'(0)=\frac{1}{2}\times\{n(n+1)+n\}=\frac{n(n+2)}{2}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 1

3)

① 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ 이므로

② 접선의 방정식은 $y=\frac{n(n+2)}{2}x+\frac{n}{2}$ 이다.

③ 이 접선의 x절편은 $\left(-\frac{1}{n+2}, 0\right)$, y절편은 $\left(0, \frac{n}{2}\right)$이다.

④ 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형인 삼각형의 넓이 A_n은

$$A_n = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+2}\times\frac{n}{2} = \frac{n}{4(n+2)}$$ 이므로,

⑤ $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(n+2)} = \frac{1}{4}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 2

1)

① $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3} = 2$ 로부터 $f(3)=0$ 이므로

② $f(x) = (x-3)(x-k)$이 성립한다.

③ $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-k)}{x-3} = 3-k = 2$이다.

④ 따라서 $k=1$이므로

⑤ $f(x) = (x-3)(x-1) = x^2-4x+3$

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 2

2)

① 두 곡선 $y = x^3+x^2-7x+c$와 $y=f(x)=x^2-4x+3$이 만나는 점의 x좌표는
방정식 $x^3+x^2-7x+c = x^2-4x+3$의 해이다. 그런데

② 만나는 점에서 두 곡선이 같은 접선을 가지려면 그 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같아야 한다.
즉 $y' = 3x^2+2x-7$과 $y' = 2x-4$가 같은 값을 가져야 하므로

③ $3x^2+2x-7 = 2x-4$의 해를 구하면 $x=1,\ x=-1$이다.

④ $x=1$에서 두 곡선이 만나려면 ①의 방정식으로부터 $-5+c=0$, 즉 $c=5$이고,

⑤ $x=-1$에서 두 곡선이 만나려면 ①의 방정식으로부터 $7+c=8$, 즉 $c=1$이다.
따라서 $c=1$과 $c=5$이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 2

3)

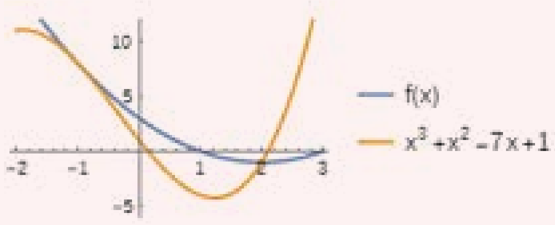
① 위 (2)에서 구한 c의 값 중에서 가장 작은 것은 $c=1$이다.

② 따라서 두 곡선 $y=x^3+x^2-7x+1$과 $y=x^2-4x+3$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구한다.

③ $x^3+x^2-7x+1 = x^2-4x+3$, 즉 $x^3-3x-2 = (x+1)^2(x-2) = 0$으로부터 두 곡선의 교점의 x좌표는
$x=1,\ x=2$이다.

④ $\int_{-1}^{2}(x^3-3x-2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{27}{4}$이므로

⑤ 구하는 넓이는 $\frac{27}{4}$이다.



[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
7등급: 백지 답안

문제 3

1)

① $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{4t}{t^2+1}$

② $\dfrac{dy}{dt}=2t-\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$

③ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

④ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t-\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{\frac{4t}{t^2+1}}=\dfrac{(t^2+1)^2-1}{2(t^2+1)}=\dfrac{t^2(t^2+2)}{2(t^2+1)}$

⑤ 따라서 $t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{4}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 3

2)

① $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\left(\dfrac{4t}{t^2+1}\right)^2+\left(2t-\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}\right)^2$

② $=4t^2\left\{\dfrac{4}{(t^2+1)^2}+\left(1-\dfrac{1}{(t^2+1)^2}\right)^2\right\}$

③ $=4t^2\left(1+\dfrac{1}{(t^2+1)^2}\right)^2=(f(t))^2$ 이고

④ $t\geq 0$ 이므로 $f(t)\geq 0$일 때 $f(t)=2t\left(1+\dfrac{1}{(t^2+1)^2}\right)$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계에서 방향은 옳으나 약간의 오류가 있는 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 3

3)

① $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리 L은 $L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ 이다.

② 앞의 (2)의 결과를 이용하여 L을 구하면

$$L=\int_0^1\sqrt{(f(t))^2}\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$=\int_0^1\left(2t+\frac{2t}{(t^2+1)^2}\right)dt$$

$$=\int_0^1 2t\,dt+\int_0^1\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

③ 여기에서 $\displaystyle\int_0^1 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^1=1$ 이고,

④ $t^2+1=u$로 두고 치환적분법을 이용하면

$$\int_0^1\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\int_1^2\frac{1}{u^2}\,du=\left[-\frac{1}{u}\right]_1^2=\frac{1}{2}$$

⑤ 따라서 $L=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 4

1)

① 도형 R_n으로부터 도형 R_{n+1}을 얻는 과정에서 도형 R_n의 각 변마다 1개의 이등변삼각형을 새로 그리게 되므로 그 개수 N_n은 도형 R_n의 변의 개수와 같다.

② $N_1 = 6$

③ $N_2 = 6 \times 4$, $N_3 = 6 \times 4 \times 4$, $\cdots$

④ 따라서 $N_n = 6 \times 4^{n-1}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계에서 형식은 옳으나 약간의 오류가 있는 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

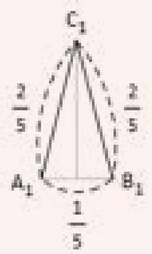
문제 4

2)

① 도형 R_n으로부터 도형 R_{n+1}을 얻는 과정에서 새로 그려지는 한 이등변삼각형을 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$이라고 하자.

오른쪽 그림의 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$에서 삼각형의 높이는

$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{10}$ 이므로



② 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{\sqrt{15}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{10^2}$ 이다.

③ 그리고 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 닮음비는 $1 : \frac{2}{5}$ 이므로,

넓이의 비는 $1 : \left(\frac{2}{5}\right)^2$ 이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이는 $\frac{\sqrt{15}}{10^2}\left(\frac{2}{5}\right)^{2(n-1)}$ 이다.

④ 그러므로 도형 R_n으로부터 도형 R_{n+1}을 얻는 과정에서 새로 그려지는 모든 이등변삼각형의 넓이의 합 x_n은

$$x_n = N_n \times \frac{\sqrt{15}}{10^2}\left(\frac{2}{5}\right)^{2(n-1)} = 6 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{15}}{10^2}\left(\frac{2}{5}\right)^{2(n-1)} = 6 \times \frac{\sqrt{15}}{10^2}\left(\frac{4}{5}\right)^{2(n-1)}$$

⑤ 따라서 $x_1 = 6 \times \frac{\sqrt{15}}{10^2}$ 이고, 수열 $\{x_n\}$의 공비는 $\frac{16}{25}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안

문제 4

3)

① 도형 R_1은 한 변의 길이가 1인 정육각형이므로 그 넓이 S_1은

$S_1 = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

② 도형 R_{n+1}의 넓이 S_{n+1}은 도형 R_n의 넓이 S_n에서 (2)에서 구한 x_n을 뺀 값이므로

③ $S_2 = S_1 - x_1$

$S_3 = S_2 - x_2 = S_1 - (x_1 + x_2)$

$S_4 = S_3 - x_3 = S_1 - (x_1 + x_2 + x_3)$

$\vdots$

이다.

④ 따라서 $n \geq 2$일 때 $S_n = S_1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ 이다.

⑤ 그러므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = S_1 - \sum_{k=1}^{\infty} x_n = S_1 - x_1 \times \frac{1}{1-r}$

$$= S_1 - 6 \times \frac{\sqrt{15}}{10^2} \times \frac{1}{1 - \frac{16}{25}}$$

$$= S_1 - \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{6}$$

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우

7등급: 백지 답안