【참고자료】

1. 출제 의도 및 문제 해설

가. 출제의 방향

우리대학의 자연계 논술 시험은 예년과 마찬가지로 수험생의 학업 부담을 경감시키고자 수학 문제로만 구성하여, 고등학교 수학의 기초 원리를 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 한다. 출제범위는 고등학교 공통 수학, 수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ, 미적분으로 한정한다. 고등학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있는 수리적 문제 상황을 제시하고, 논리적인 사고를 따르면 쉽게 해결할 수 있는 세부 문제로 구성하였다. 개별적인 교과 지식의 반복 학습과 암기를 통해 습득된 지식을 묻는 것을 지양하고, 수학적 원리에 대한 확실하고 통합적인 이해를 바탕으로 문제를 분석하여 해결하며 그 과정과 결과를 논리적으로 명확하게 기술할 수 있는지를 평가한다. 그리고 평가의 객관성을 위해 채점의 기준을 최대한 객관화할 수 있도록 출제하였다.

나. 문항별 출제의도

문제 1 연속함수에 대한 사잇값 정리와 함수의 미분을 이용하여 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가하며, 음함수의 미분을 구할 수 있는지 평가한다.

문제 2 원의 방정식을 나타내고 원의 접선의 방정식을 도출할 수 있는지 평가하고, 두 곡선의 교점을 구하는 방식을 이해하고 있는지 평가한다. 삼각함수의 덧셈정리를 적용하고 수열의 극한값을 구하는 능력을 평가한다.

문제 3 미분계수와 함수의 연속의 뜻을 알고 함수의 극한을 구할 수 있는지를 평가하고, 몫의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지 평가한다.

문제 4 로그함수가 포함된 함수의 개형을 미분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하고, 이를 통한 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다. 정적분을 활용한 문제해결 능력을 평가하고, 함수의 요철의 특성을 이해하고 명확하게 서술할 수 있는지 평가한다.

다. 출제근거

1) 교육과정 근거

문제 1	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준 /영역별 내용	[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2	교육과정	[수학] - (2) 기하 - $\boxed{3}$ 원의 방정식 [미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준 /영역별 내용	[10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 3	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 $\boxed{2}$ 함수의 연속 [수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수 [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법
	성취기준 /영역별 내용	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
문제 4	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용
	성취기준 /영역별 내용	[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	
문제 1	[수학 II] 지학사, 홍성복 외 10인, 2018년, 32쪽, 84쪽 [미적분] 천재교과서, 류희찬 외 9인, 2019년, 63쪽, 64쪽, 113쪽, 136쪽
문제 2	[수학] 비상교육, 김원경 외 14인, 2018년, 128쪽 [미적분] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2019년, 18쪽, 73쪽, 108쪽
문제 3	[수학 II] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, 21쪽, 32쪽, 55쪽 [미적분] 천재교육, 이준열 외 7인, 2019년, 61쪽, 84쪽, 89쪽
문제 4	[미적분] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2019년, 62쪽, 99쪽, 113쪽, 115쪽, 166쪽

2. 평가 기준

가. 배점기준표

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	7	▶ 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? ▶ 수리적 풀이가 정확한가? ▶ 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	10	
문제1(3)	8	
문제2(1)	7	
문제2(2)	9	
문제2(3)	9	
문제3(1)	8	
문제3(2)	10	
문제3(3)	7	
문제4(1)	8	
문제4(2)	7	
문제4(3)	10	

나. 채점기준

- 각 문제에 대하여 아래에 제시된 예시답안과 같이 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. 이후 등급을 해당 문제의 점수로 환산하여 총점을 계산한다.
- 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1등급을 감점한다.
- 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1등급을 감점한다.
- 백지답안은 7등급을 부여한다.

문제 1 (1)

① $f(t)=e^{1+t}-2t$ 에 대하여 $f'(t)=e^{1+t}-2$ 이다,

② $t=-1+\ln 2$에서 $f'(t)=0$ 이며

$t<-1+\ln 2$ 일 때 $f'(t)<0$ 이고, $t>-1+\ln 2$ 일 때 $f'(t)>0$ 이다.

③ 따라서 $f(t)$는 $t=-1+\ln 2$ 에서 최솟값

$f(-1+\ln 2)=2-2(-1+\ln 2)=4-2\ln 2>0$ 을 가진다.

④ 따라서 모든 실수 t에 대하여 $f(t)>0$ 이다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ①단계를 옳게 서술하고 미분계수가 영이 되는 해만 구한 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
- 6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 1 (2)

① 주어진 곡선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 $\ln(e-1+y^2)=1+y$ 로부터
$e-1+y^2=e^{1+y}$, 즉 방정식 $e^{1+y}-e+1-y^2=0$의 근이다.

② 이때 $g(y)=e^{1+y}-e+1-y^2$ 도 두면 함수 $g(y)$는 y에 대하여 실수 전체에서 연속이며 미분가능한 함수이다.

③ $g(-1)=1-e<0$ 이고, $g(0)=1>0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여
$-1<k<0$ 이며 $g(k)=0$을 만족하는 실수 k가 존재한다.

④ (1)의 결과로부터 모든 실수 y에 대하여 $g'(y)=f(y)=e^{1+y}-2y>0$ 이므로
$g(k)=0$을 만족하는 실수 k는 단 하나뿐이다.

⑤ 따라서 주어진 곡선은 y축과 단 한 점에서 만나며, 그 점의 y좌표는 $-1<y<0$ 인 범위에 있다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
- 6등급: ⑤단계까지의 계산 중 올바르게 서술된 부분이 있는 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 1 (3)

① 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표는 $\ln(e+x^2)=2$ 로부터 $x^2=e^2-e$이므로
$a=\sqrt{e^2-e}$ 이다.

② 주어진 곡선에 대하여 음함수의 미분을 구하면 $\dfrac{2x+2yy'}{e-1+x^2+y^2}=y'$ 이다.

③ $\mathrm{A}\left(\sqrt{e^2-e}\,,1\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2\sqrt{e^2-e}+2y'}{e^2}=y'$ 으로부터

$2\sqrt{e^2-e} = (e^2-2)y'$ 이므로

④ $\mathrm{A}\left(\sqrt{e^2-e}\,,1\right)$에서 접선의 기울기는 $y' = \dfrac{2\sqrt{e^2-e}}{e^2-2}$ 이다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ①단계를 옳게 서술하고 음함수 미분에서 오류가 있는 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
- 6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 2 (1)

① 원 C_n의 방정식은 $x^2+y^2=n(n+1)$ 이다.

② $y=\sqrt{x}$ 를 원의 방정식에 대입하면 $x^2+x-n(n+1)=0$

③ $(x-n)(x+n+1)=0$이므로 $x=n$ 또는 $x=-n-1$ 이다.

④ $x>0$ 이므로 $x=n$을 $y=\sqrt{x}$ 에 대입하면 교점은 $\mathrm{P}_n(n, \sqrt{n})$이다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ①단계를 옳게 서술하고 교점을 구하는 방식을 언급한 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
- 6등급: ④단계까지의 계산 중 올바르게 서술된 부분이 있는 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 2 (2)

① 원 C_n 위의 점 $\mathrm{P}_n(n, \sqrt{n})$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{n}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}$ 이므로

② 접선의 방정식은 $y=-\sqrt{n}\,(x-n)+\sqrt{n}$, 즉 $y=-\sqrt{n}\,x+\sqrt{n}\,(n+1)$ 이다.

③ 원 C_{n+1}의 방정식은 $x^2+y^2=(n+1)(n+2)$ 이다.

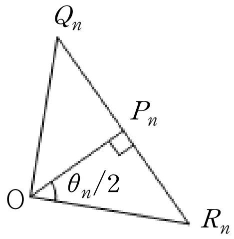
④ $y=-\sqrt{n}\,x+\sqrt{n}\,(n+1)$ 를 대입하여 정리하면 $x^2-2nx+n^2=2$ 이다.

⑤ 따라서 $x=n\pm\sqrt{2}$ 이고, 접선이 원 C_{n+1}와 만나는 두 점 Q_n과 R_n의 x좌표의 차는 $2\sqrt{2}$ 이다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
- 6등급: ③단계만 서술한 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 2 (3)



① 원 C_{n+1}에서 $\overline{\mathrm{OQ}_n}=\overline{\mathrm{OR}_n}$이고, 원 C_n에서 $\overline{\mathrm{OP}_n}\perp\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}$이므로

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n=\dfrac{\theta_n}{2}$이다.

② $\cos\dfrac{\theta_n}{2}=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{\overline{\mathrm{OR}_n}}=\dfrac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$

③ $\cos\theta_n=2\left(\cos\dfrac{\theta_n}{2}\right)^2-1=\dfrac{2n}{n+2}-1=\dfrac{n-2}{n+2}$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\theta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{n+2}=1$

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ④단계에서 마지막 극한값의 계산이 틀린 경우
- 3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
- 6등급: ④단계까지의 계산 중 올바르게 서술된 부분이 있는 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 3 (1)

① $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\{f(x)\}^3+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\{f(x)\}^2-f(x)+1)(f(x)+1)}{(x+1)(x-1)}=3$이다.

② $f(x)$가 다항함수이므로 $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$의 값이 존재한다.

③ 따라서 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\{f(x)\}^2-f(x)+1}{x+1}\times\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 이므로

④ $3=\dfrac{3}{2}f'(1)$ 로부터 $f'(1)=2$ 이다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ①단계를 옳게 서술하고 미분계수의 정의를 서술한 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
- 6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 3 (2)

① 함수 e^x의 $x=1$에서의 미분계수의 정의에 의하여 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=e$ 이다.

② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(e^x-e)\{f(x)+g(x)\}}{(x-1)^2g(x)}=2$ 에서 극한 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+g(x)}{(x-1)g(x)}$ 이 존재해야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))=0$ 이다.

③ $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수이므로 실수 전체에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))=f(1)+g(1)=0$ 으로부터 $g(1)=1$ 이다.

④ 그러므로 $h(1)=\dfrac{f(1)}{g(1)}=-1$ 이다.

⑤ 따라서 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(e^x-e)\{f(x)+g(x)\}}{(x-1)^2g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{f(x)}{g(x)}-(-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=e\,h'(1)=2$ 이므로 $h'(1)=\dfrac{2}{e}$ 이다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

• 6등급: ⑤단계까지의 계산 중 올바르게 서술된 부분이 있는 경우
• 7등급: 백지 답안

문제 3 (3)

① $h'(1) = \dfrac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g(1)^2} = 2 + g'(1) = \dfrac{2}{e}$ 이다.

② $g'(1) = \dfrac{2}{e} - 2$ 이다.

③ $k'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

④ $k'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(1)\left(\dfrac{2}{e} - 2\right) = 2\left(\dfrac{2}{e} - 2\right) = \dfrac{4}{e} - 4$ 이다.

채점 기준:

• 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
• 2등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
• 3등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
• 4등급: ①단계를 옳게 서술하고 미분계수의 값의 계산에 오류가 있는 경우
• 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
• 6등급: 올바르게 서술된 부분이 일부라도 있는 경우
• 7등급: 백지 답안

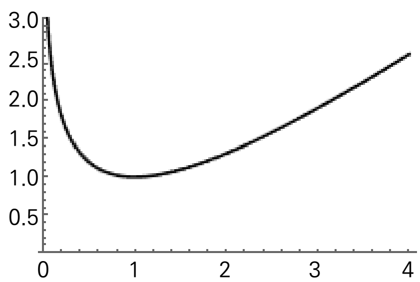
문제 4 (1)

① $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 이다.

② 그래프의 개형을 표로 나타내면 오른쪽 표와 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	
$f(x)$		↘	1	↗	

③ 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



④ 구간 $(0, \infty)$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1) = 1$ 이므로 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 1$ 이 성립한다.

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 이계도함수를 구하고 곡선의 요철을 판단하지 않아도 정답으로 인정함
- 2등급: ③까지 맞게 구하고 결론을 내지 않은 경우 또는 ②와 같은 구체적인 내용 없이 바로 그래프의 개형을 그리고 증명한 경우
- 3등급: ③에서 그래프의 형태는 맞으나 $f(1)=1$ 이 아닌 값에서 극값을 가진다고 한 경우
- 4등급: ②와 같은 시도를 하였으나 ③에서 그래프의 형태가 잘못된 경우
- 5등급: ②와 같은 시도를 하지 않고 그래프의 형태를 유추하였으나 잘못된 경우
- 6등급: ①의 일계도함수까지만 서술한 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 4 (2)

① (1)에 의해 $f(x) \geq 1$ 이므로 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b 1\,dx$ 이다.

② $\int_a^b 1\,dx = b-a$

③ $\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\ln x + x\right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2)+(b-a)-(b\ln b - a\ln a)$

④ 따라서 $b\ln b - a\ln a \leq \frac{1}{2}(b^2-a^2) = \frac{1}{2}(a+b)(b-a)$

⑤ 양수 $b-a$ 로 양변을 나누어 주면 $\frac{a+b}{2} \geq \frac{b\ln b - a\ln a}{b-a}$ 이 성립한다.

채점 기준:

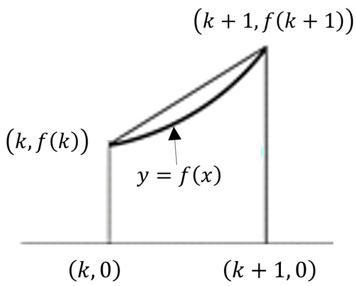
- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없음
- 2등급: ④까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ③까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ③의 계산이 올바르고 ①, ② 중 하나를 옳게 서술한 경우 또는 ①, ②를 올바르게 서술하고 ③의 계산이 틀린 경우
- 5등급: ②까지 올바르게 서술한 경우 또는 ③의 계산만 서술하였고 올바르게 계산한 경우
- 6등급: ①, ②를 서술한 경우 또는 ③의 계산을 시도한 경우
- 7등급: 백지 답안

문제 4 (3)

① (1)에 의해 $x > 1$에서 $f(x)$는 양의 값을 가지며 아래로 볼록하다.

② 네 점 $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k, f(k))$, $(k+1, f(k+1))$을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이는 구간 $(k,\ k+1)$에서 $y = f(x)$와 x축 사이의 넓이보다 크거나 같으므로,

$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2} \geq \int_{k}^{k+1} f(x)dx \quad (k = 1, 2,\ \cdots\ ).$$



③ 따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2} \geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{1}^{n} f(x)dx$

채점 기준:

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ③에서 마지막 등호를 규명하지 못한 경우
- 3등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ②단계에서 넓이를 비교하려고 시도한 경우
- 5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우
- 6등급: ③단계까지의 계산 중 올바르게 서술된 부분이 있는 경우
- 7등급: 백지 답안