2. 자연계열

제시문 및 문제

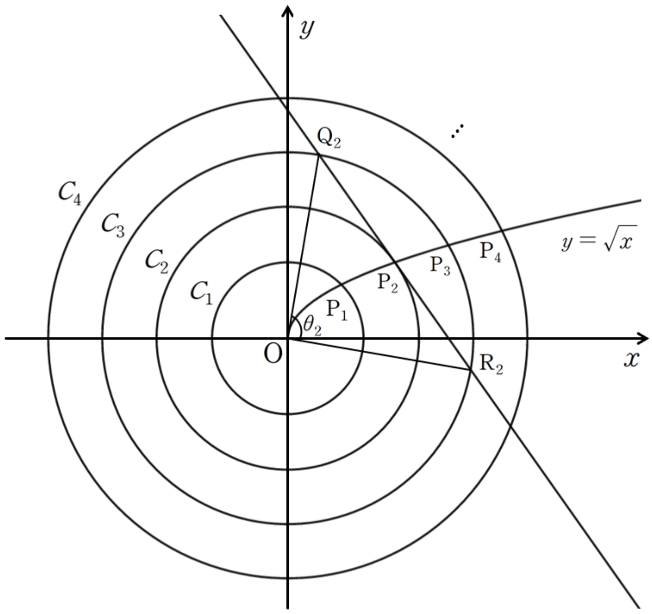
문제 1 실수 t에 대한 함수 $f(t)=e^{1+t}-2t$와 좌표평면의 곡선 $\ln(e-1+x^2+y^2)=1+y$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) [7점] 모든 실수 t에 대하여 $f(t)>0$임을 보이시오.

(2) [10점] 좌표평면의 곡선 $\ln(e-1+x^2+y^2)=1+y$가 y축과 단 한 점에서 만나며, 그 점의 y좌표는 $-1<y<0$인 범위에 있음을 보이시오.

(3) [8점] 좌표평면의 곡선 $\ln(e-1+x^2+y^2)=1+y$가 직선 $y=1$과 만나는 점을 $\mathrm{A}(a,1)$이라 할 때, 점 $\mathrm{A}(a,1)$에서의 이 곡선에 대한 접선의 기울기를 구하시오. (단, $a>0$)

문제 2 아래 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{n(n+1)}$ 인 원을 C_n $(n=1, 2, \cdots)$ 이라 하자. 원 C_n 이 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 P_n, 점 P_n 에서 원 C_n에 접하는 직선과 원 C_{n+1} 이 만나는 두 점을 각각 Q_n, R_n 이라 하고, $\theta_n = \angle \mathrm{Q}_n\mathrm{O}\mathrm{R}_n$ 이라 하자. (단, Q_n의 x좌표는 R_n 의 x좌표보다 작고, $0<\theta_n<\pi$ 이다.) 다음 물음에 답하시오.



(1) [7점] P_n 의 좌표를 구하시오.

(2) [9점] 모든 자연수 n에 대하여 Q_n과 R_n의 x좌표의 차는 $2\sqrt{2}$ 임을 보이시오.

(3) [9점] $\cos\theta_n$을 n에 대한 식으로 나타내고, $\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n$ 의 값을 구하시오.

문제 3 $f(1) = -1$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{\{f(x)\}^3 + 1}{x^2 - 1} = 3$이 성립하고, 구간 $(0, 2)$에서 $g(x) \neq 0$인 다항함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{(e^x - e)\{f(x) + g(x)\}}{(x-1)^2 g(x)} = 2$가 성립할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) [8점] $f'(1)$의 값을 구하시오.

(2) [10점] 구간 $(0, 2)$에서 함수 $h(x)$를 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$로 정의할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.

(3) [7점] 함수 $k(x)$를 $k(x) = f(g(x))$로 정의할 때, $k'(1)$의 값을 구하시오.

문제 4 양의 실수 x에 대한 함수 $f(x)$를 $f(x) = x - \ln x$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) [8점] 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형을 그리고, 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 1$임을 보이시오.

(2) [7점] (1)을 이용하여 $a < b$인 양의 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \frac{b \ln b - a \ln a}{b - a}$임을 보이시오.

(3) [10점] 함수 $y = f(x)$의 그래프를 이용하여 2 이상의 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} \geq \int_1^n f(x)\,dx$ 가 성립함을 보이시오.