2. 제시문 요약

문제 1 x축 위의 점 $(a, 0)$에서 다항함수의 그래프에 접선을 그을 수 있는 조건을 식으로 나타내고, 그 점에서 그을 수 있는 접선의 개수에 따른 조건을 찾는다. 또, x축 위의 점 $(a, 0)$에서 다항함수의 그래프에 그을 수 있는 모든 접선에 대하여 접점들의 x좌표의 합을 나타내는 식을 찾아 그 합이 주어진 값이 되도록 하는 상수 a의 값을 모두 찾는다. 그리고 y축 위의 점 $(0, b)$에서 다항함수의 그래프에 그을 수 있는 접선의 개수가 주어졌을 때 b의 범위를 구한다.

문제 2 평면 위에 한 변의 길이가 1인 두 정삼각형 ABC, DEF가 변 AB와 변 DE는 x축에 수직이고 두 삼각형의 꼭짓점 C, F는 x축 위에 놓여 있을 때, 두 정삼각형의 내부의 공통부분이 점 $\mathrm{C}(t, 0)$의 x좌표인 t에 따라 어떻게 변하는지 관찰하고, 각각의 경우 주어진 도형을 적절히 삼각형으로 분해하고 삼각함수를 활용하여 두 삼각형 내부의 공통부분으로 주어진 도형의 넓이를 t에 대한 함수 $f(t)$로 표현한다. 그리고 함수 $f(t)$가 이차함수임을 활용하여 이 함수의 최댓값을 구한다. 마지막으로 정육각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$에 놓인 두 정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$과 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{F}_n$의 내부로 이루어진 도형에서 두 정삼각형의 내부의 공통부분인 정육각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}$의 내부를 뺀 영역의 넓이 S_n이 등비수열임을 이용하여 급수의 합을 구한다.

문제 3 주어진 문제의 조건을 바탕으로 점의 위치에 대하여 이해하고, θ_n과 α_n의 극한값이 0임을 파악한다. 삼각함수의 극한값과 삼각형의 형태를 파악하고 넓이를 구한다.

문제 4 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 미분가능하며, $f'(x)$가 연속일 때, 함수 $f(x)$가 주어진 조건 (가), (나), (다)를 모두 만족시키는 경우, 방정식 $f'(x) = 0$의 서로 다른 실근이 열린구간 $(-1, 1)$에 두 개 이상 존재함을 보이고, 함수 $h(x) = f(x) - 2$에 대하여 $\int_0^1 h(x)\,dx$의 값을 구하며, 정적분 $\int_4^9 f(x)\,dx$의 값을 구한다.

3. 출제의도

문제 1 다항함수의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식을 구하고, 그 접선이 x축 위에 주어진 점 $(a, 0)$을 지나도록 하는 조건을 방정식으로 나타내어 접선의 개수가 1이 될 a의 범위를 찾는 과정을 논리적으로 서술할 수 있는지 살펴보고자 한다. 또한, 접점의 x좌표의 합을 나타내는 식을 표현하고, 그 합이 주어진 조건을 만족하도록 하는 a의 값을 구할 수 있는지 평가한다. 그리고 y축 위에 주어진 점 $(0, b)$에서 다항함수의 그래프에 그을 수 있는 접선의 개수를 분석하기 위하여 함수의 그래프의 개형을 활용할 수 있는지 평가하고자 한다.

문제 2 문제의 조건에 따라 변수 t의 범위를 나누어 t에 따라 도형이 어떻게 변하는지를 이해하고 각각의 경우에 주어진 도형의 넓이를 잘 구할 수 있는지 확인한다. 그리고 이렇게 정의된 함수가 이차함수이므로 함수의 그래프 또는 함수의 증감과 극대를 활용하여 이 함수 $f(t)$의 최댓값을 구할 수 있는지 확인한다. 마지막으로 함수 $f(t)$가 최댓값을 가질 때의 t의 값을 두 삼각형의 공통부분으로 주어지는 도형에 적용하여 이 도형이 어떤 모양인지를 유추하는 능력을 확인한다. 그리고 정육각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$에 놓인 두 정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$과 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{F}_n$의 내부로 이루어진 도형에서 두 삼각형의 내부의 공통부분인 정육각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}$의 내부를 뺀 도형의 넓이 S_n으로 주어진 수열이 등비수열임을 확인하고 이 수열의 초항과 공비를 구하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는지 확인한다.

문제 3 주어진 조건을 바탕으로 삼각함수의 값을 계산할 수 있는지 평가한다. 삼각함수와 관련된 극한값을 구할 수 있는지 확인한다. 삼각형의 넓이를 계산할 수 있는지 확인하고 급수의 합을 적절히 계산할 수 있는지 평가한다.

문제 4 함수 $f(x)$에 대한 조건으로부터 닫힌구간 $[-1, 0]$과 $[0, 1]$에서 롤의 정리를 적용할 수 있는지를 평가한다. 그리고 함수 $f(x)$의 그래프를 y축 방향으로 -2만큼 평행이동한 함수 $h(x) = f(x) - 2$에 대하여 $h'(x) = f'(x)$임을 이용하여 $f(x)$에 대하여 주어진 정적분 값의 조건으로부터 $h(x)$의 정적분을 부분적분법으로 구할 수 있는지 살펴본다. 또, 문제의 주어진 조건으로부터 $h(x)$의 주기성과 대칭성을 파악하고, 이를 활용하여 주어진 구간에서 $h(x)$의 정적분을 구하여, 결과적으로 $f(x)$의 정적분을 구하는 과정을 논리적으로 설명할 수 있는지 평가하고자 한다.

4. 출제근거

문제 1

가. 교육과정 근거

①

적용 교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.

②

적용 교육과 정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.

③

적용 교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나. 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성 여부
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	89	교과서	재구성
수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2018	121 ~ 126	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

문제 2

가. 교육과정 근거

①

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

②

적용 교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

③

적용 교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수
성취기준 / 영역별 내용	[12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

나. 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성 여부
수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2022	96 ~ 106	교과서	재구성
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2022	81 ~ 96	교과서	재구성
미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2022	32 ~ 36	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

문제 3

가. 교육과정 근거

①

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

②

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

③

적용 교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수
성취기준 / 영역별 내용	[12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

나. 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성 여부
수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2022	78-79	교과서	재구성
미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2022	28, 67-68	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

문제 4

가. 교육과정 근거

①

적용 교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 II 02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

②

적용 교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

③

적용 교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나. 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성 여부
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	77, 123	교과서	재구성
미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2018	132, 137	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

5. 문항 해설

문제 1

1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2)=(3t^2-6t)(x-t)$, 즉 $y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$ 이다.

접선이 $(a, 0)$을 지나므로 $0=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2=-t(2t^2-3(a+1)t+6a)$을 만족하는 t가 접점의 x좌표이다.

$t=0$이 접점의 x좌표이고, $t=0$이 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$의 중근이 될 수 없으므로, 접선의 개수가 1이려면 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$의 실근이 없어야 한다.

이 이차방정식의 판별식이 $D=9(a+1)^2-48a=9a^2-30a+9=3(3a-1)(a-3)$ 이므로

접선의 개수가 1이려면 $D<0$ 으로부터 $\frac{1}{3}<a<3$ 이다.

2) 앞의 문제(1)에서 접점의 x좌표 t는 $t(2t^2-3(a+1)t+6a)=0$을 만족한다.

여기에서 $t=0$ 은 접점의 x좌표의 합에 영향을 주지 않는다.

따라서 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$ 을 만족하는 접점의 x좌표 t를 살펴보면 된다.

이 이차방정식의 판별식이 $D=3(3a-1)(a-3)$ 이므로

$a<\frac{1}{3}$ 또는 $a>3$ 일 때 $D>0$ 이며

이차식의 서로 다른 두 실근의 합 $\frac{3}{2}(a+1)$ 이 1이 되는 a의 값은 $a=-\frac{1}{3}$이다.

$a=\frac{1}{3}$일 때는 $D=0$이고, $2t^2-4t+2=2(t-1)^2=0$ 에서 $t=1$이 중근이므로 접점의 x좌표의 합이 1이다.

$a=3$일 때는 $D=0$이고, $2t^2-12t+18=2(t-3)^2=0$ 에서 $t=3$이 중근이므로 접점의 x좌표의 합이 1이 아니다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 a의 값은 $a=-\frac{1}{3}$과 $a=\frac{1}{3}$ 이다.

3) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식 $y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$ 이 $(0, b)$를 지나므로 $-2t^3+3t^2=b$ 의 서로 다른 근의 개수가 3인 b의 범위를 찾으면 된다.

$g(t)=-2t^3+3t^2$라 할 때,

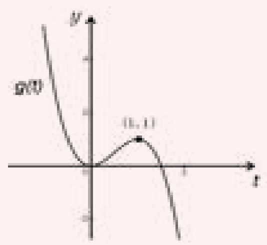
$g'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$ 이므로

$y=g(t)$ 의 그래프의 증감을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

이를 바탕으로 $y=g(t)$ 의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $g(t)=b$의 서로 다른 근의 개수가 3인 b의 범위는 $0<b<1$이다.



문제 2

1) $0<t\le\frac{3}{2}$인 경우: 두 정삼각형의 내부의 공통부분으로 이루어진 도형은 마름모이고,

이 마름모는 2개의 높이가 $\frac{t}{2}$인 정삼각형으로 나누어지므로 이의 넓이는

$f(t)=2\times\frac{t}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{t}{2}=\frac{t^2}{2\sqrt{3}}$이다.

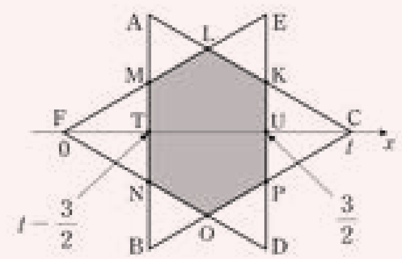
$\frac{3}{2}<t<3$인 경우: 두 사다리꼴 MNOL과 LOPK의 면적의 합을 구하면 된다.

$\overline{MN}=\frac{2t-3}{\sqrt{3}}$, $\overline{LO}=\frac{t}{\sqrt{3}}$, 사다리꼴의 높이는 $\frac{3-t}{2}$이므로 육각형 KLMNOP의 넓이는

$\frac{\left(\frac{2t-3}{\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{2}\times\frac{(3-t)}{2}\times 2$이다.

정리하면 $\frac{3}{2}<t<3$인 경우 육각형 KLMNOP의

넓이는 $f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3)$이다.

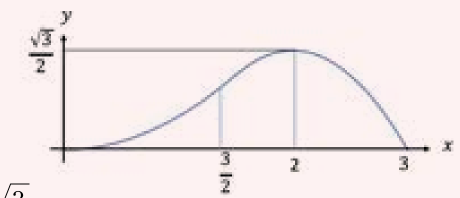


그러므로 $f(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2\sqrt{3}}, & 0<t\le\frac{3}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3), & \frac{3}{2}<t<3\end{cases}$ 이다.

2) $f(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2\sqrt{3}}, & 0<t\le\frac{3}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3), & \frac{3}{2}<t<3\end{cases}$ 의 그래프는 $0<t\le\frac{3}{2}$에서

증가함수이고 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$이다. $\frac{3}{2}<t<3$일 때

$f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}((t-2)^2-1)$이므로



$t=2$ 일 때, 극댓값 $\frac{\sqrt{3}}{2}$을 갖는다. 따라서 이 함수의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

이때 6개의 삼각형 MFN, NBO, ODP, PCK, KEL, LAM은 모두 높이가 $\frac{1}{2}$인 정삼각형이므로, 함수가 최대가 될 때의 도형은 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 정육각형이다. 따라서 둘레의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

3) 한 변의 길이가 a인 정육각형의 넓이는 $6\times\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$이고, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\overline{A_nB_n}}{\sqrt{3}}$이다.

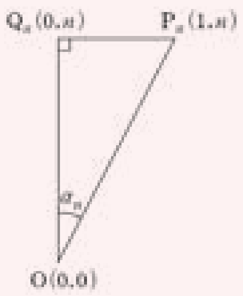
S_1은 한 변의 길이가 $\overline{A_2B_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$인 정삼각형 6개의 넓이의 합이므로 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

S_2는 한 변의 길이가 $\overline{A_3B_3}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$인 정삼각형 6개의 합이므로 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 넓이와 같고 따라서 $S_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다. 수열 S_n은 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

문제 3

1) 직선 $y=nx$ 위에서 예를 들어 한 점 $P_n(1,n)$을 잡으면 y축 위의 점 $Q_n(0,n)$에 대하여 삼각형 OP_nQ_n은 직각삼각형이다.



따라서 $\tan\alpha_n = \dfrac{\overline{Q_nP_n}}{\overline{OQ_n}} = \dfrac{1}{n}$이다. 삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{n^2+1}$

이므로 $\sin\alpha_n = \dfrac{\overline{Q_nP_n}}{\overline{OP_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$이다.

2) $\overline{OB_n} : \overline{OC_n} = 2:1$이므로, C_n의 x좌표를 t_n으로 두면 $C_n(t_n, nt_n)$이고, B_n의 좌표는 $B_n(-2t_n, -2nt_n)$으로 쓸 수 있다. B_n에서 y축에 내린 수선과 y축이 만나는 점을 D_n, C_n에서 y축에 내린 수선과 y축이 만나는 점을 E_n이라 하면 직각삼각형 AB_nD_n에서 $\tan\theta_n = \dfrac{2t_n}{1+2nt_n}$이고,

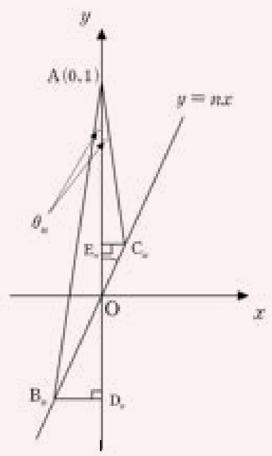
직각삼각형 AC_nE_n에서 $\tan\theta_n = \dfrac{t_n}{1-nt_n}$이다. $\dfrac{2t_n}{1+2nt_n} = \dfrac{t_n}{1-nt_n}$로부터 $t_n = \dfrac{1}{4n}$을 얻고,

$\tan\theta_n = \dfrac{1}{3n}$이다. $0<\theta_n<\theta_n+\angle AB_nO=\alpha_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$이다.

따라서 구하는 극한 값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\alpha_n}{\alpha_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta_n}{\tan\theta_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\theta_n}{\tan\alpha_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/3n}{1/n}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta_n}{\alpha_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\dfrac{\theta_n}{\tan\theta_n}\cdot\dfrac{\tan\theta_n}{\tan\alpha_n}=\dfrac{1}{3}$이다.

3) $t_n=\dfrac{1}{4n}$을 이용하면 $B_n\left(-\dfrac{1}{2n}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $C_n\left(\dfrac{1}{4n}, \dfrac{1}{4}\right)$로 주어진다.



삼각형 OAB_n의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{B_nD_n}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{4n}$이고,

삼각형 OAC_n의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{C_nE_n}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{4n}=\dfrac{1}{8n}$이다.

두 삼각형의 넓이를 더하여 삼각형 AB_nC_n의

넓이는 $S_n=\dfrac{1}{4n}+\dfrac{1}{8n}=\dfrac{3}{8n}$이다.

문제에서 제시한 급수의 값을 구하면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_nS_{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{8n}\cdot\dfrac{3}{8(n+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3}{8k}\cdot\dfrac{3}{8(k+1)}=\dfrac{9}{64}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{9}{64}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{9}{64}$이다.

문제 4

1) 주어진 조건 (가)로부터 $f(0)+f(0)=4$이므로 $f(0)=2$이다.
또 주어진 조건 (가)로부터 $f(1)+f(-1)=4$이고,
그리고 주어진 조건 (나)로부터 $f(1)=f(-1+2)=f(-1)$이므로
$f(1)=f(-1)=2$이다.
즉 $f(-1)=f(0)=f(-1)=2$
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(x)=0$의 근이 열린구간 $(-1,0)$과 $(0,1)$에 각각 하나 이상 존재한다.
그러므로 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 열린구간 $(-1,1)$에 두 개 이상 존재한다.

2) $h'(x)=f'(x)$이므로 주어진 조건 (다)에서

$\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 xh'(x)dx=1$이다.

이제 부분적분법을 이용하면

$\int_0^1 xh'(x)dx=[xh(x)]_0^1-\int_0^1 h(x)dx$

여기에서 $h(1)=f(1)-2=0$이므로

$\int_0^1 xh'(x)dx=h(1)-\int_0^1 h(x)dx=0-\int_0^1 h(x)dx$

따라서 $\int_0^1 xh'(x)dx=1$로부터 $\int_0^1 h(x)dx=-1$이다.

3) $f(x)=h(x)+2$이므로

$\int_4^9 f(x)dx=\int_4^9\{h(x)+2\}dx=10+\int_4^9 h(x)dx$이다.

그리고 $\int_4^9 h(x)dx=\int_4^5 h(x)dx+\int_5^7 h(x)dx+\int_7^9 h(x)dx$에서

우변의 첫 번째 정적분을 $x-4=u$로 두는 치환적분법과 조건 (나)를 이용하여 계산하면

$\int_4^5 h(x)dx=\int_0^1 h(u+4)du=\int_0^1 h(u+2)du=\int_0^1 h(u)du=\int_0^1 h(x)dx$이다.

마찬가지로 우변의 각 정적분을 구간 $[-1,1]$ 내의 정적분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\int_4^9 h(x)dx=\int_0^1 h(x)dx+\int_{-1}^1 h(x)dx+\int_{-1}^1 h(x)dx$

주어진 조건 (가)로부터 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-2=-\{f(-x)-2\}$, 즉 $h(x)=-h(-x)$
이므로, 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $\int_{-1}^1 h(x)dx=0$이다.

그러므로 $\int_4^9 h(x)dx=\int_0^1 h(x)dx+0+0=-1$이다.

따라서 $\int_4^9 f(x)dx=10-1=9$이다.

6. 채점 기준

문제 1

채점 기준 | **배점**

1)

① 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-(t^3-3t^2)=(3t^2-6t)(x-t)$,
즉 $y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$

② 접선이 $(a, 0)$을 지나므로
$0=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2=-t(2t^2-3(a+1)t+6a)$을 만족하는 t가 접점의 x좌표이다.

③ $t=0$이 접점의 x좌표이고, $t=0$이 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$의 중근이 될 수 없으므로,
접선의 개수가 1이려면 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$의 실근이 없어야 한다.

④ 이 이차방정식의 판별식이 $D=9(a+1)^2-48a=9a^2-30a+9=3(3a-1)(a-3)$ 이므로

⑤ 접선의 개수가 1이려면 $D<0$ 으로부터 $\frac{1}{3}<a<3$ 이다.

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ①~④단계를 옳게 서술하고 ⑤단계부터 틀린 경우 또는 ⑤단계까지 모두 서술했으나 계산 오류가 1개 있는 경우
3등급 : ①~③단계를 옳게 서술하고 ④단계부터 틀린 경우
4등급 : ①, ②단계까지만 옳게 제시한 경우
5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

배점: 7점

2)

① 앞의 문제(1)에서 접점의 x좌표 t는 $t(2t^2-3(a+1)t+6a)=0$을 만족한다.
여기에서 $t=0$은 접점의 x좌표의 합에 영향을 주지 않는다.
따라서 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$을 만족하는 접점의 x좌표 t를 살펴보면 된다.

② 이 이차방정식의 판별식이 $D=3(3a-1)(a-3)$ 이므로 $a<\frac{1}{3}$ 또는 $a>3$ 일 때 $D>0$ 이며,
이차방정식의 서로 다른 두 실근의 합 $\frac{3(a+1)}{2}$ 이 1이 되는 a의 값은 $a=-\frac{1}{3}$이다.

③ $a=\frac{1}{3}$일 때는 $D=0$이고, $2t^2-4t+2=2(t-1)^2=0$에서 $t=1$이 중근이므로
접점의 x좌표의 합이 1이다.

④ $a=3$일 때는 $D=0$이고, $2t^2-12t+18=2(t-3)^2=0$에서 $t=3$이 중근이므로
접점의 x좌표의 합이 1이 아니다.

⑤ 따라서 문제의 조건을 만족하는 a의 값은 $a=-\frac{1}{3}$과 $a=\frac{1}{3}$ 이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ⑤단계까지의 과정 중 단순 계산 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지만 서술한 경우
4등급: ②단계까지만 서술한 경우
5등급: ①단계까지만 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

배점: 10점

채점 기준 | **배점**

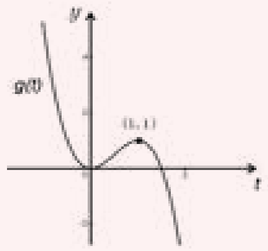
3)

① 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식 $y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$이
$(0, b)$를 지나므로 $-2t^3+3t^2=b$의 서로 다른 근의 개수가 3인 b의 범위를 찾으면 된다.

② $g(t)=-2t^3+3t^2$라 할 때,
$g'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$
이므로 $y=g(t)$의 그래프의 증감을
표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	0	↗	1	↘

③ 이를 바탕으로 $y=g(t)$의 그래프의 개형을
그리면 오른쪽 그림과 같다.



④ 따라서 $g(t)=b$의 서로 다른 근의 개수가 3인
b의 범위는 $0<b<1$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음
2등급: ④단계까지의 과정 중 단순 오류가 있는 경우
3등급: ③단계까지만 서술한 경우
4등급: ②단계까지만 서술한 경우
5등급: ①단계까지만 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

배점: 8점

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

문제 2

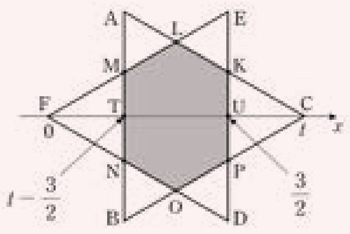
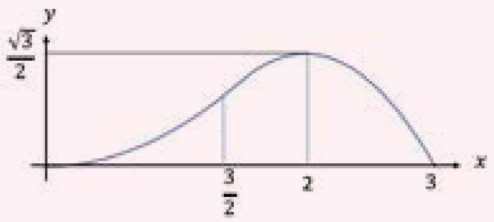
채점 기준 | **배점**

1)

① $0<t\le\frac{3}{2}$인 경우: 두 정삼각형의 내부의 공통부분은 2개의 높이가 $\frac{t}{2}$인 정삼각형으로 나누어지므로
넓이는 $f(t)=2\times\frac{t}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{t}{2}=\frac{t^2}{2\sqrt{3}}$

$\frac{3}{2}<t<3$인 경우 [풀이 방법 1]	$\frac{3}{2}<t<3$인 경우 [풀이 방법 2]
육각형 KLMNOP의 넓이는 정삼각형 LFO의 넓이에서 정삼각형 MFN의 넓이를 뺀 것의 2배이다 ② ΔLFO의 넓이는 $\left(\frac{t}{2}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{t^2}{4\sqrt{3}}$이고 ΔMFN의 넓이는 $\left(t-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 ③ 육각형 KLMNOP의 넓이는 $2\times\left(\frac{t^2}{4\sqrt{3}}-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	두 사다리꼴 MNOL과 LOPK의 면적의 합을 구하면 된다. ② $\overline{\mathrm{MN}}=\frac{2t-3}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{LO}}=\frac{t}{\sqrt{3}}$, 사다리꼴의 높이는 $\frac{3-t}{2}$ ③ 육각형 KLMNOP의 넓이는 $\frac{\left(\frac{2t-3}{\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{2}\times\frac{(3-t)}{2}\times 2$

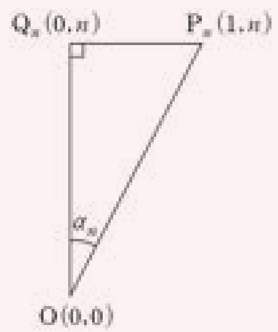
배점: 10점

채점 기준	배점
④ 정리하면 $\frac{3}{2}<t<3$인 경우 육각형 KLMNOP의 넓이는 $f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3)$이다.  ⑤ 그러므로 $f(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2\sqrt{3}}, & 0<t\le\frac{3}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3), & \frac{3}{2}<t<3\end{cases}$ [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ①~④의 과정을 옳게 계산한 경우 3등급: 변수 t의 범위를 제대로 나누고 ①의 함수를 정확히 구하고 ②~④의 과정을 이해하고 있으나 계산 실수가 있는 경우 4등급: 변수 t의 범위를 제대로 나누고 ①의 함수를 정확하게 구한 경우 5등급: 변수 t의 범위를 제대로 나누었으나 함수는 구하지 못한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	
2) ① $f(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2\sqrt{3}}, & 0<t\le\frac{3}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3), & \frac{3}{2}<t<3\end{cases}$의 그래프는 $0<t\le\frac{3}{2}$에서 증가함수이고 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$이다. ② $\frac{3}{2}<t<3$일 때, $f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}((t-2)^2-1)$이므로 ③ $t=2$ 일 때, 극댓값 $\frac{\sqrt{3}}{2}$을 갖는다. ④ 따라서 이 함수의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. ⑤ 이때 6개의 삼각형 MFN, NBO, ODP, PCK, KEL, LAM은 모두 높이가 $\frac{1}{2}$인 정삼각형이므로, 함수가 최대가 될 때의 도형은 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 정육각형이다. 따라서 둘레의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.  [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ①~④를 옳게 구한 경우 3등급: ①~③과정까지 맞은 경우, 또는 그래프를 통해 해당 함수의 극댓값을 옳게 구한 경우 4등급: ①~②단계까지 옳게 서술한 경우, 또는 $f(t)$의 그래프를 그린 경우 5등급: ①의 함수를 잘 못 구했으나 이를 바탕으로 풀이를 진행한 경우, 또는 ①의 함수만 제대로 적고 그 다음 과정이 틀린 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	7점
3) ① 한 변의 길이가 a인 정육각형의 넓이는 $6\times\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$이고 ② $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\overline{A_nB_n}}{\sqrt{3}}$이다. ③ S_1은 한 변의 길이가 $\overline{A_2B_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$인 정삼각형 6개의 넓이의 합이므로 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.	8점

채점 기준	배점
④ S_2는 한 변의 길이가 $\overline{A_3B_3}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$인 정삼각형 6개의 합이므로 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 넓이와 같고 $S_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다. ⑤ 수열 S_n은 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 ⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ①~⑤ 과정이 맞고 등비급수의 합을 구하는 시도를 하였으나 등비급수의 유한 합 또는 극한 계산에 실수가 있는 경우 3등급: ①~④의 과정이 맞고 ⑤단계에서 등비수열임을 알고 있으나 초항 또는 공비를 잘못 구한 경우 4등급: S_1, S_2를 옳게 구한 경우 또는 등비수열임을 알고 공비를 구하려고 시도했으나 틀린 경우 5등급: ①~②에 대해 서술한 경우 또는 S_1을 옳게 구한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

문제 3

채점 기준	배점
1) ① 직선 $y=nx$ 위에서 예를 들어 한 점 $P_n(1,n)$을 잡으면 y축 위의 점 $Q_n(0,n)$에 대하여 삼각형 OP_nQ_n은 직각삼각형이다. ② 따라서 $\tan\alpha_n=\frac{\overline{Q_nP_n}}{\overline{OQ_n}}=\frac{1}{n}$이다. ③ 삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{n^2+1}$이므로 $\sin\alpha_n=\frac{\overline{Q_nP_n}}{\overline{OP_n}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$이다.  [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ①~③단계까지 서술하였으나 계산 실수가 있는 경우 3등급: ①~②단계를 옳게 서술하고 ③단계부터 틀린 경우 4등급: ①단계까지만 옳게 서술한 경우 5등급: ①의 삼각비를 활용하기 위한 시도가 있는 경우 6등급: 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급: 백지 답안	5점

채점 기준	배점

2)

① $\overline{OB_n} : \overline{OC_n} = 2:1$이므로, C_n의 x좌표를 t_n으로 두면 $C_n(t_n, nt_n)$이고, B_n의 좌표는 $B_n(-2t_n, -2nt_n)$으로 쓸 수 있다.

② B_n에서 y축에 내린 수선과 y축이 만나는 점을 D_n, C_n에서 y축에 내린 수선과 y축이 만나는 점을 E_n이라 하면 직각삼각형 AB_nD_n에서 $\tan\theta_n = \dfrac{2t_n}{1+2nt_n}$이고, 직각삼각형 AC_nE_n에서 $\tan\theta_n = \dfrac{t_n}{1-nt_n}$이다.

③ $\dfrac{2t_n}{1+2nt_n} = \dfrac{t_n}{1-nt_n}$로부터 $t_n = \dfrac{1}{4n}$을 얻고, $\tan\theta_n = \dfrac{1}{3n}$이다.

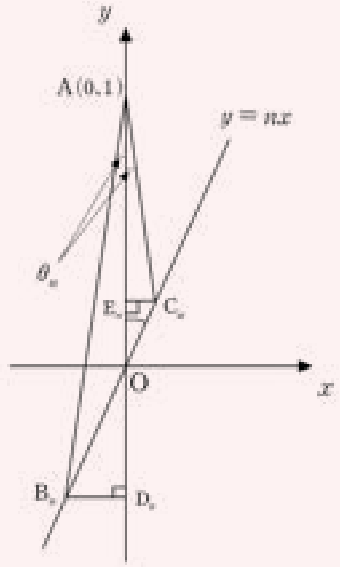
④ $0 < \theta_n < \theta_n + \angle AB_nO = \alpha_n$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n = 0$이다.

따라서 구하는 극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\alpha_n}{\alpha_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta_n}{\tan\theta_n} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\theta_n}{\tan\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/3n}{1/n} = \dfrac{1}{3}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta_n}{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\dfrac{\theta_n}{\tan\theta_n}\cdot\dfrac{\tan\theta_n}{\tan\alpha_n} = \dfrac{1}{3}$이다.



[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ①~④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 있는 경우
3등급: ①~③단계를 옳게 서술하고 ④단계부터 틀린 경우
4등급: ①~②단계를 옳게 서술하고 ③단계부터 틀린 경우
5등급: ①단계까지만 옳게 서술한 경우
6등급: 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급: 백지 답안

10점

3)

① $t_n = \dfrac{1}{4n}$을 이용하면 $B_n\left(-\dfrac{1}{2n}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $C_n\left(\dfrac{1}{4n}, \dfrac{1}{4}\right)$로 주어진다.

② 삼각형 OAB_n의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{B_nD_n} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{4n}$이고,

삼각형 OAC_n의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{C_nE_n} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{4n} = \dfrac{1}{8n}$이다.

③ 따라서 삼각형 AB_nC_n의 넓이는 $S_n = \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{8n} = \dfrac{3}{8n}$이다.

④ 급수의 값을 구하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_nS_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8n}\cdot\frac{3}{8(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{8k}\cdot\frac{3}{8(k+1)} = \frac{9}{64}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{9}{64}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{9}{64}$$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ①~④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 있는 경우
3등급: ①~③단계를 옳게 서술하고 ④단계부터 틀린 경우
4등급: ①~②단계를 옳게 서술하고 ③단계부터 틀린 경우
5등급: ①단계까지만 옳게 서술한 경우
6등급: 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급: 백지 답안

10점

문제 4

채점 기준	배점

1)

① (가)로부터 $f(0)+f(0)=4$이므로 $f(0)=2$이다.

② (가)로부터 $f(1)+f(-1)=4$이고,
(나)로부터 $f(1)=f(-1+2)=f(-1)$이므로
$f(1)=f(-1)=2$이다.

③ 즉 $f(-1)=f(0)=f(-1)=2$

④ 따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(x)=0$의 근이 열린구간 $(-1,0)$과 $(0,1)$에 각각 하나 이상 존재한다.
그러므로 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 열린구간 $(-1,1)$에 두 개 이상 존재한다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음
2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지만 맞은 경우
4등급: ②단계까지만 맞은 경우
5등급: ①단계까지만 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

7점

2)

[풀이 방법 1]

① $h'(x) = f'(x)$ 이므로 (다)에서 $\int_0^1 xf'(x)\,dx = \int_0^1 xh'(x)\,dx = 1$ 이다.

② 이제 부분적분법을 이용하면 $\int_0^1 xh'(x)\,dx = [xh(x)]_0^1 - \int_0^1 h(x)\,dx$

③ 여기에서 $h(1) = f(1) - 2 = 0$이므로 $\int_0^1 xh'(x)\,dx = h(1) - \int_0^1 h(x)\,dx = 0 - \int_0^1 h(x)\,dx$

④ 따라서 ①의 결과로부터 $\int_0^1 h(x)\,dx = -1$ 이다.

[풀이 방법 2]

① (다)에서 부분적분법을 이용하면 $1 = \int_0^1 xf'(x)\,dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$

② 여기에서 $f(1) = 2$이므로 $\int_0^1 xf'(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 f(x)\,dx = 2 - \int_0^1 f(x)\,dx$

③ 그러므로 ①의 결과로부터 $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ 이다.

④ $\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \{f(x)-2\}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - 2 = -1$

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지의 과정 중 단순 계산 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지만 서술한 경우
4등급: ②단계까지만 서술한 경우
5등급: ①단계까지만 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

8점

채점 기준	배점
3) ① $f(x)=h(x)+2$ 이므로 $\int_4^9 f(x)\,dx=\int_4^9 \{h(x)+2\}dx=10+\int_4^9 h(x)dx$ 이고, ② (나)로부터 실수 x에 대하여 $h(x+2)=h(x)$ 이므로 $\int_4^9 h(x)\,dx=\int_4^5 h(x)\,dx+\int_5^7 h(x)\,dx+\int_7^9 h(x)\,dx$ $=\int_0^1 h(x)\,dx+\int_{-1}^1 h(x)\,dx+\int_{-1}^1 h(x)\,dx$ ③ (가)로부터 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-2=-\{f(-x)-2\}$, 즉 $h(x)=-h(-x)$ 이므로, 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 따라서 $\int_{-1}^1 h(x)\,dx=0$ 이다. ④ 그러므로 $\int_4^9 h(x)\,dx=\int_0^1 h(x)\,dx+0+0=-1$ 이다. ⑤ 따라서 $\int_4^9 f(x)\,dx=10-1=9$ [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ⑤단계까지의 과정 중 단순 계산 실수가 있는 경우 3등급: ③단계까지만 서술한 경우 4등급: ②단계까지만 서술한 경우 5등급: ①단계까지만 서술한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	10점

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안

문제 1

1)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2)=(3t^2-6t)(x-t)$, 즉 $y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$ 이다.

접선이 $(a,0)$을 지나므로 $0=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2=-t(2t^2-3(a+1)t+6a)$을 만족하는 t가 접점의 x좌표이다.

$t=0$이 접점의 x좌표이고, $t=0$이 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$의 중근이 될 수 없으므로, 접선의 개수가 1이려면 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$의 실근이 없어야 한다.

이 이차방정식의 판별식이 $D=9(a+1)^2-48a=9a^2-30a+9=3(3a-1)(a-3)$ 이므로

접선의 개수가 1이려면 $D<0$ 으로부터 $\frac{1}{3}<a<3$ 이다.

2)

접점의 x좌표 t는 $-t\big(2t^2-3(a+1)t+6a\big)t=0$을 만족하는데,

$t=0$ 은 접점의 x좌표의 합에 영향을 주지 않는다.

따라서 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$ 을 만족하는 접점의 x좌표 t를 살펴보면 된다.

이 이차방정식의 판별식이 $D=3(3a-1)(a-3)$ 이므로 $a<\frac{1}{3}$ 또는 $a>3$ 일 때 $D>0$ 이며

이차식의 서로 다른 두 실근의 합 $\frac{3}{2}(a+1)$ 이 1이 되는 a의 값은 $a=-\frac{1}{3}$이다.

$a=\frac{1}{3}$일 때는 $D=0$이고, $2t^2-4t+2=2(t-1)^2=0$ 에서 $t=1$이 중근이므로 접점의 x좌표의 합이 1이다.

$a=3$일 때는 $D=0$이고, $2t^2-12t+18=2(t-3)^2=0$ 에서 $t=3$이 중근이므로 접점의 x좌표의 합이 1이 아니다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 a의 값은 $a=-\frac{1}{3}$과 $a=\frac{1}{3}$ 이다.

3)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식 $y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$ 이 $(0,b)$를 지나므로 $-2t^3+3t^2=b$ 의 서로 다른 근의 개수가 3인 b의 범위를 찾으면 된다.

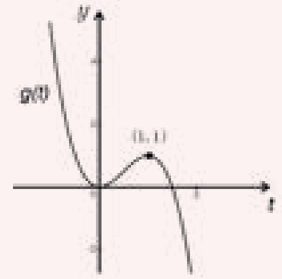
$g(t)=-2t^3+3t^2$라 할 때,

$g'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$ 이므로

$y=g(t)$ 의 그래프의 증감을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	0	↗	1	↘

이를 바탕으로 $y=g(t)$ 의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $g(t)=b$의 서로 다른 근의 개수가 3인 b의 범위는

$0<b<1$이다.

문제 2

1)

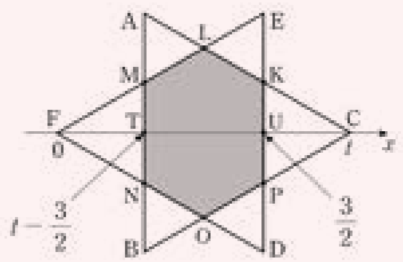
$0<t\le\frac{3}{2}$인 경우: 두 정삼각형의 내부의 공통부분으로 이루어진 도형은 마름모이고, 이 마름모는 2개의 높이가 $\frac{t}{2}$인 정삼각형으로 나누어지므로 이의 넓이는 $f(t)=2\times\frac{t}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{t}{2}=\frac{t^2}{2\sqrt{3}}$이다.

$\frac{3}{2}<t<3$인 경우: 두 사다리꼴 MNOL과 LOPK의 면적의 합을 구하면 된다. $\overline{\mathrm{MN}}=\frac{2t-3}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{LO}}=\frac{t}{\sqrt{3}}$이고

사다리꼴의 높이는 $\frac{3-t}{2}$이므로 육각형 KLMNOP의 넓이는 $\frac{\left(\frac{2t-3}{\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{2}\times\frac{(3-t)}{2}\times 2$이다.

정리하면 $\frac{3}{2}<t<3$인 경우 육각형 KLMNOP의 넓이는

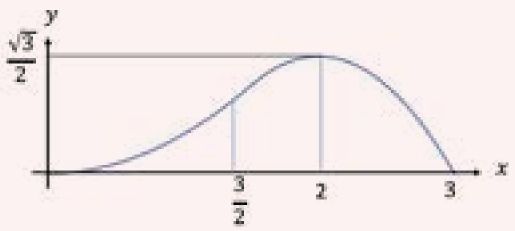
$f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3)$이다.



그러므로 $f(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2\sqrt{3}}, & 0<t\le\frac{3}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-4t+3), & \frac{3}{2}<t<3\end{cases}$ 이다.

2)

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2\sqrt3}, & 0<t\le\dfrac32\\ -\dfrac{\sqrt3}{2}(t^2-4t+3), & \dfrac32<t<3\end{cases}$$ 의



그래프는 $0<t\le\frac32$에서 증가함수이고

$f\left(\frac32\right)=\frac{3\sqrt3}{8}$이다. $\frac32<t<3$일 때

$f(t)=-\frac{\sqrt3}{2}(t^2-4t+3)=-\frac{\sqrt3}{2}((t-2)^2-1)$이므로 $t=2$ 일 때, 극댓값 $\frac{\sqrt3}{2}$을 갖는다.

따라서 이 함수의 최댓값은 $\frac{\sqrt3}{2}$이다.

이때 6개의 삼각형 MFN, NBO, ODP, PCK, KEL, LAM은 모두 높이가 $\frac12$인 정삼각형이므로, 함수가 최대가 될 때의 도형은 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt3}{3}$인 정육각형이다. 따라서 둘레의 길이는 $2\sqrt3$이다.

3)

한 변의 길이가 a인 정육각형의 넓이는 $6\times\left(\frac{\sqrt3 a^2}{4}\right)=\frac{3\sqrt3}{2}a^2$이고, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\overline{A_nB_n}}{\sqrt3}$이다.

S_1은 한 변의 길이가 $\overline{A_2B_2}=\frac{1}{\sqrt3}$인 정삼각형 6개의 넓이의 합이므로 $S_1=\frac{\sqrt3}{2}$이다.

S_2는 한 변의 길이가 $\overline{A_3B_3}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\sqrt3}=\frac13$인 정삼각형 6개의 합이므로 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 넓이와 같고

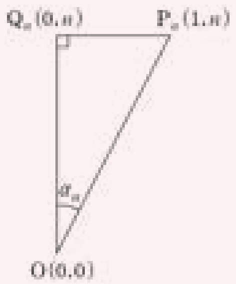
따라서 $S_2=\frac{\sqrt3}{6}$이다. 수열 S_n은 $S_1=\frac{\sqrt3}{2}$이고 공비가 $\frac13$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt3}{2}(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}=\frac{3\sqrt3}{4}$$ 이다.

문제 3

1)

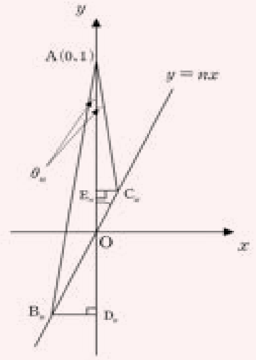
직선 $y=nx$ 위에서 예를 들어 한 점 $P_n(1,n)$을 잡으면 y축 위의 점 $Q_n(0,n)$에 대하여 삼각형 OP_nQ_n은 직각삼각형이다. 따라서 $\tan\alpha_n=\frac{\overline{Q_nP_n}}{\overline{OQ_n}}=\frac1n$이다. 삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{n^2+1}$이므로 $\sin\alpha_n=\frac{\overline{Q_nP_n}}{\overline{OP_n}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$이다.



2)

$\overline{OB_n}:\overline{OC_n}=2:1$이므로, C_n의 x좌표를 t_n으로 두면 $C_n(t_n,nt_n)$이고, B_n의 좌표는 $B_n(-2t_n,-2nt_n)$으로 쓸 수 있다. B_n에서 y축에 내린 수선과 y축이 만나는 점을 D_n, C_n에서 y축에 내린 수선과 y축이 만나는 점을 E_n이라 하면 직각삼각형 AB_nD_n에서 $\tan\theta_n=\frac{2t_n}{1+2nt_n}$이고, 직각삼각형 AC_nE_n에서 $\tan\theta_n=\frac{t_n}{1-nt_n}$이다.

$\frac{2t_n}{1+2nt_n}=\frac{t_n}{1-nt_n}$로부터 $t_n=\frac{1}{4n}$을 얻고, $\tan\theta_n=\frac{1}{3n}$이다.



$0<\theta_n<\theta_n+\angle AB_nO=\alpha_n$이고 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$이다.

따라서 구하는 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\alpha_n}{\alpha_n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{\tan\theta_n}=1,$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\theta_n}{\tan\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/3n}{1/n}=\frac13$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\frac{\theta_n}{\tan\theta_n}\cdot\frac{\tan\theta_n}{\tan\alpha_n}=\frac13$이다.

3)

$t_n=\frac{1}{4n}$을 이용하면 $B_n\left(-\frac{1}{2n},-\frac12\right)$, $C_n\left(\frac{1}{4n},\frac14\right)$로 주어진다.

삼각형 OAB_n의 넓이는 $\frac12\cdot\overline{OA}\cdot\overline{B_nD_n}=\frac12\cdot1\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{4n}$이고, 삼각형 OAC_n의 넓이는

$\frac12\cdot\overline{OA}\cdot\overline{C_nE_n}=\frac12\cdot1\cdot\frac{1}{4n}=\frac{1}{8n}$이다.

두 삼각형의 넓이를 더하여 삼각형 AB_nC_n의 넓이는 $S_n=\frac{1}{4n}+\frac{1}{8n}=\frac{3}{8n}$이다.

문제에서 제시한 급수의 값을 구하면 $\sum_{n=1}^{\infty}S_nS_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8n}\cdot\frac{3}{8(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{8k}\cdot\frac{3}{8(k+1)}=\frac{9}{64}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac1k-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{9}{64}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{9}{64}$이다.

문제 4

1)

조건 (가)로부터 $f(0)+f(0)=4$이므로 $f(0)=2$이다.

또 조건 (가)로부터 $f(1)+f(-1)=4$이고,

그리고 조건 (나)로부터 $f(1)=f(-1+2)=f(-1)$이므로 $f(1)=f(-1)=2$이다.

즉 $f(-1)=f(0)=f(-1)=2$

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(x)=0$의 근이 열린구간 $(-1,0)$과 $(0,1)$에 각각 하나 이상 존재한다. 그러므로 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 열린구간 $(-1,1)$에 두 개 이상 존재한다.

2)

$h'(x)=f'(x)$이므로 조건 (다)에서 $\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 xh'(x)dx=1$이다.

이제 부분적분법을 이용하면 $\int_0^1 xh'(x)dx=[xh(x)]_0^1-\int_0^1 h(x)dx$

여기에서 $h(1)=f(1)-2=0$이므로 $\int_0^1 xh'(x)dx=h(1)-\int_0^1 h(x)dx=0-\int_0^1 h(x)dx$

따라서 $\int_0^1 xh'(x)dx=1$로부터 $\int_0^1 h(x)dx=-1$이다.

3)

$f(x)=h(x)+2$ 이므로

$\int_{4}^{9} f(x)\,dx = \int_{4}^{9} \{h(x)+2\}\,dx = 10+\int_{4}^{9} h(x)\,dx$ 이고,

조건 (나)로부터 실수 x에 대하여 $h(x+2)=h(x)$ 이므로

$\int_{4}^{9} h(x)\,dx = \int_{4}^{5} h(x)\,dx + \int_{5}^{7} h(x)\,dx + \int_{7}^{9} h(x)\,dx$

$= \int_{0}^{1} h(x)\,dx + \int_{-1}^{1} h(x)\,dx + \int_{-1}^{1} h(x)\,dx$

조건 (가)로부터 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-2=-\{f(-x)-2\}$, 즉 $h(x)=-h(-x)$

이므로, 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 0$ 이다.

그러므로 $\int_{4}^{9} h(x)\,dx = \int_{0}^{1} h(x)\,dx + 0 + 0 = -1$ 이다.

따라서 $\int_{4}^{9} f(x)\,dx = 10-1 = 9$ 이다.

Memo