출제의도 및 문제해설

출제의도

원의 성질을 활용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 확인해보며, 삼각비의 정의 또는 사인법칙과 코사인법칙 등을 이용하여 주어진 선분의 길이와 삼각형의 넓이를 식으로 표현할 수 있는지를 알아본다. 마지막으로 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지도 확인한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

문제 3 (1)

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
성취기준/ 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

문제 3 (2)

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
성취기준/ 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

문제 3 (3)

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
성취기준/ 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

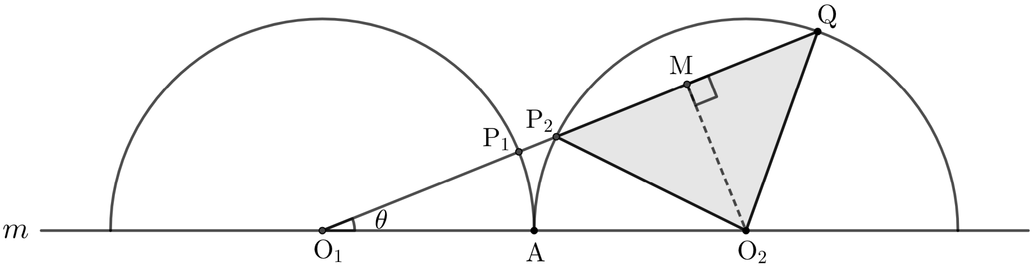
도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 I	박교식 외 19인	동아출판	2018	86-100	교과서	재구성
수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	96-115	교과서	재구성
미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	64-73	교과서	재구성
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	63-74	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

문제 해설

(1) 선분 P_2Q의 중점을 M이라 할 때, 이등변삼각형 P_2O_2Q에서 중선 O_2M의 길이는

$\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이다.



그러므로 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이면 $\overline{O_2M} = 2\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

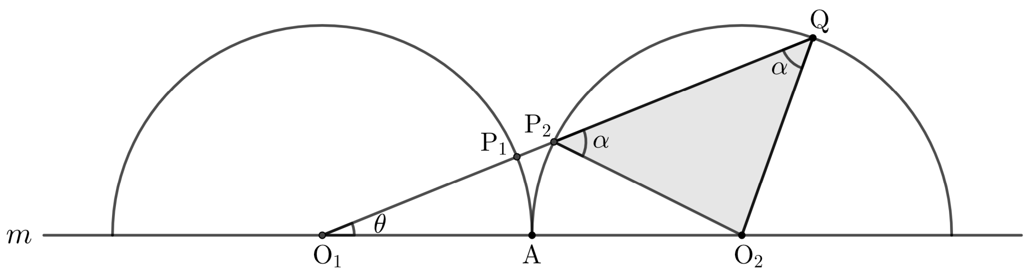
따라서 $\overline{MQ} = \sqrt{\overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로,

삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{MQ}\times\overline{O_2M} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$이다.

다른 풀이

$\angle O_1QO_2 = \angle O_2P_2Q = \alpha$라 하고, 삼각형 O_1O_2Q에 대해 사인법칙을 적용해보면 $\dfrac{\overline{O_1O_2}}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{O_2Q}}{\sin\theta}$가 된다.

$\overline{O_1O_2} = 2$, $\overline{O_2Q} = 1$이므로, $\sin\alpha = 2\sin\theta$이 된다.



그리고 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{O_2P_2}\times\overline{O_2Q}\times\sin\angle P_2O_2Q = \dfrac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha) = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$이다. 한편, $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$\sin\alpha = 2\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$이고 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이다. 따라서 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$이다.

(2) 직각삼각형 O_1O_2M에서 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이고, $\overline{O_1M} = \overline{O_1O_2}\cos\theta = 2\cos\theta$ 이다.

그리고 $\overline{P_2M} = \sqrt{\overline{O_2P_2}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이다.

따라서 $\ell(\theta) = \overline{P_1P_2} = \overline{O_1M} - \overline{P_2M} - \overline{O_1P_1} = 2\cos\theta - \sqrt{1-4\sin^2\theta} - 1$ 이다.

$\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2}$을 정리해보면

$$\frac{2\cos\theta-1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$ 이 되고,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to0+}\frac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)} = \lim_{\theta\to0+}\frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)} = -1$$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = -1+2 = 1$이 된다.

다른 풀이

삼각형 $O_1O_2P_2$에서 사인법칙을 이용하면 $\dfrac{\overline{O_1P_2}}{\sin\angle O_1O_2P_2} = \dfrac{\overline{O_2P_2}}{\sin\theta}$가 성립한다.

이때, $\angle O_1QO_2 = \angle O_2P_2Q = \alpha$라 하면, $\angle O_1O_2P_2 = \alpha-\theta$이고 $\overline{O_2P_2} = 1$이므로 $\overline{O_1P_2} = \dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$이다.

따라서 선분 P_1P_2의 길이는 $\ell(\theta) = \dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta} - 1 = \dfrac{\sin(\alpha-\theta)-\sin\theta}{\sin\theta}$이다.

$\sin(\alpha-\theta) = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta$이며, $\sin\alpha = 2\sin\theta$이고, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다.

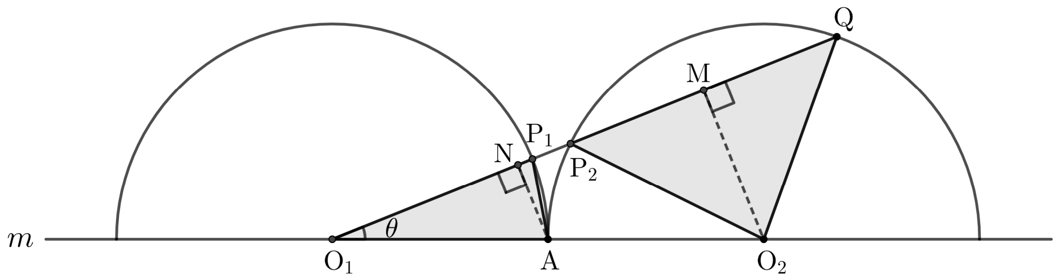
따라서 $\ell(\theta) = 2\cos\theta - 1 - \sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다.

$$\frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = \frac{2\cos\theta-1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}$$
$$= \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

이 되고, $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to0+}\frac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)} = \lim_{\theta\to0+}\frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)} = -1$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = -1+2 = 1$이 된다.

(3) 점 A에서 선분 $\mathrm{O_1Q}$에 내린 수선의 발을 N이라 할 때, 직각삼각형 $\mathrm{O_1AN}$에서 $\overline{\mathrm{AN}} = \overline{\mathrm{O_1A}}\sin\theta = \sin\theta$ 이므로,



삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이는 $f(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1P_1}}\times\overline{\mathrm{AN}} = \frac{1}{2}\sin\theta$ 이다.

삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이는 $g(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1Q}}\times\overline{\mathrm{O_2M}}$ 인데,

$\overline{\mathrm{O_1Q}} = \overline{\mathrm{O_1M}} + \overline{\mathrm{MQ}} = 2\cos\theta + \sqrt{\overline{\mathrm{O_2Q}}^2 - \overline{O_2M}^2} = 2\cos\theta + \sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이므로

$g(\theta) = \left(2\cos\theta + \sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)\sin\theta$ 이다.

삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P_2Q}}\times\overline{\mathrm{O_2M}} = \overline{\mathrm{MQ}}\times\overline{\mathrm{O_2M}} = \sqrt{1-4\sin^2\theta}\times 2\sin\theta$ 이고,

사각형 $\mathrm{AO_2P_2P_1}$의 넓이는 $h(\theta) =$ (삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이) $-$ (삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이) $-$ (삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이)

이므로 $h(\theta) = g(\theta) - \sqrt{1-4\sin^2\theta}\times 2\sin\theta - f(\theta)$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{2g(\theta) - 2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{4\sin\theta\cos\theta}{\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to 0+}\left(4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\right) = 4\times 1\times 1 = 4$ 이다.

다른 풀이

삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1A}}\times\overline{\mathrm{O_1P_1}}\times\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$이므로, $f(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$이다.

삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1O_2}}\times\overline{\mathrm{O_2Q}}\times\sin\angle \mathrm{QO_2O_1} = \sin(\pi-\alpha-\theta)$이고,

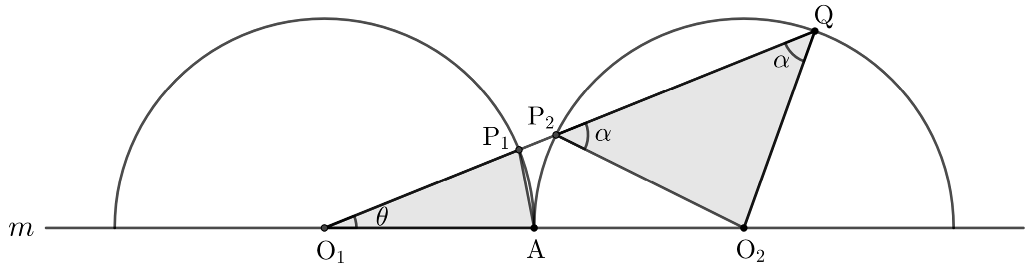
$\sin(\pi-\alpha-\theta) = \sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta = \sin 2\theta + \cos\alpha\sin\theta$ 이므로

$g(\theta) = \sin 2\theta + \cos\alpha\sin\theta$가 된다.

삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_2Q}}\times\overline{\mathrm{O_2P_2}}\times\sin\angle \mathrm{P_2O_2Q} = \frac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$이고,

(사각형 $\mathrm{AO_2P_2P_1}$의 넓이) $=$ (삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이) $-$ (삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이) $-$ (삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이)로부터

$h(\theta) = g(\theta) - \frac{1}{2}\sin 2\alpha - f(\theta)$ 임을 알 수 있다.



$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos\alpha\sin\theta$ 임을 이용하면

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2g(\theta)-\frac{1}{2}\sin2\alpha}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin2\theta}{\theta}=4$$ 이 된다.

평가 기준

<table>
<tr><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>
문제 3 (1)

① 이등변삼각형 P_2O_2Q에서 중선 $\overline{O_2M}$의 길이는 $\overline{O_2M}=\overline{O_1O_2}\sin\theta=2\sin\theta$ 이다.

② 그러므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$이면 $\overline{O_2M}=2\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

③ 따라서 $\overline{MQ}=\sqrt{\overline{O_2Q}^2-\overline{O_2M}^2}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로,

④ 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times\overline{MQ}\times\overline{O_2M}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$이다.

채점 기준

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 한 개만 있는 경우
3등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 두 개만 있는 경우
4등급: ①~③단계를 시도했으나 마무리하지 못한 경우
5등급: ①단계를 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안
</td><td>7점</td></tr>
</table>

채점 기준	배점

다른 풀이

① $\angle O_1QO_2 = \angle O_2P_2Q = \alpha$라 하고, 삼각형 O_1O_2Q에 대해 사인법칙을 적용해보면 $\dfrac{\overline{O_1O_2}}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{O_2Q}}{\sin\theta}$가 된다.

② $\overline{O_1O_2} = 2$, $\overline{O_2Q} = 1$이므로, $\sin\alpha = 2\sin\theta$이 된다.

③ 그리고 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times \overline{O_2P_2} \times \overline{O_2Q} \times \sin\angle P_2O_2Q = \dfrac{1}{2}\sin(\pi - 2\alpha) = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$이다.

④ 한편, $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로 $\sin\alpha = 2\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$이고 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이다.

⑤ 따라서 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$이다.

채점 기준

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ⑤단계까지의 과정 중 계산 실수가 한 개만 있는 경우
3등급: ③단계까지만 맞은 경우
4등급: ②단계까지만 맞은 경우
5등급: ①단계를 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

문제 3 (2)

① 직각삼각형 O_1O_2M에서 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이고,

② $\overline{O_1M} = \overline{O_1O_2}\cos\theta = 2\cos\theta$ 이다.

③ 그리고 $\overline{P_2M} = \sqrt{\overline{O_2P_2}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1 - 4\sin^2\theta}$ 이다.

④ 따라서 $\ell(\theta) = \overline{P_1P_2} = \overline{O_1M} - \overline{P_2M} - \overline{O_1P_1} = 2\cos\theta - \sqrt{1 - 4\sin^2\theta} - 1$ 이다.

⑤ $$\frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = \frac{2\cos\theta - 1 - \sqrt{1 - 4\sin^2\theta}}{\theta^2}$$
$$= \frac{2(\cos\theta - 1)}{\theta^2} + \frac{1 - \sqrt{1 - 4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta - 1)}{\theta^2} + \frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1 + \sqrt{1 - 4\sin^2\theta}\right)}$$

이 되고, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(\cos\theta - 1)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{2(\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)}{\theta^2(\cos\theta + 1)} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta + 1)} = -1$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = -1 + 2 = 1$이 된다.

8점

채점 기준	배점
채점 기준 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ④단계까지 맞았으나 ⑤단계에서 계산 실수가 있는 경우 3등급: ④단계까지 맞은 경우 4등급: ③단계까지 맞은 경우 5등급: ①단계만 맞은 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	

다른 풀이

① 삼각형 $O_1O_2P_2$에서 사인법칙을 이용하면 $\dfrac{\overline{O_1P_2}}{\sin\angle O_1O_2P_2}=\dfrac{\overline{O_2P_2}}{\sin\theta}$가 성립한다.

② 이때, $\angle O_1QO_2=\angle O_2P_2Q=\alpha$라 하면, $\angle O_1O_2P_2=\alpha-\theta$이고 $\overline{O_2P_2}=1$이므로

$\overline{O_1P_2}=\dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$이다.

③ 따라서 선분 P_1P_2의 길이는 $\ell(\theta)=\dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}-1=\dfrac{\sin(\alpha-\theta)-\sin\theta}{\sin\theta}$이다.

④ $\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta$이며, $\sin\alpha=2\sin\theta$이고

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다. 따라서 $\ell(\theta)=2\cos\theta-1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다.

⑤ $$\frac{\ell(\theta)}{\theta^2}=\frac{2\cos\theta-1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}$$
$$=\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2}+\frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}=\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2}+\frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

이 되고,

⑥ $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)}=-1$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\ell(\theta)}{\theta^2}=-1+2=1$이 된다.

채점 기준

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ⑤단계까지 맞았으나 ⑥단계에서 계산 실수가 있는 경우

3등급: ⑤단계까지 맞은 경우

4등급: ④단계까지 맞은 경우

5등급: ①단계만 맞은 경우

채점 기준	배점
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	

문제 3 (3)

① 직각삼각형 O_1AN에서 $\overline{AN} = \overline{O_1A}\sin\theta = \sin\theta$ 이므로,

삼각형 O_1AP_1의 넓이는 $f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{O_1P_1} \times \overline{AN} = \frac{1}{2}\sin\theta$ 이다.

② 삼각형 O_1O_2Q의 넓이는 $g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{O_1Q} \times \overline{O_2M}$ 인데,

$\overline{O_1Q} = \overline{O_1M} + \overline{MQ} = 2\cos\theta + \sqrt{\overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2M}^2} = 2\cos\theta + \sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이므로

$g(\theta) = \left(2\cos\theta + \sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)\sin\theta$ 이다.

③ 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{P_2Q} \times \overline{O_2M} = \overline{MQ} \times \overline{O_2M} = \sqrt{1-4\sin^2\theta} \times 2\sin\theta$ 이고, 사각형

$AO_2P_2P_1$의 넓이는

$h(\theta) =$ (삼각형 O_1O_2Q의 넓이) $-$ (삼각형 P_2O_2Q의 넓이) $-$ (삼각형 O_1AP_1의 넓이) 이므로

$h(\theta) = g(\theta) - \sqrt{1-4\sin^2\theta} \times 2\sin\theta - f(\theta)$ 이다.

④ 따라서 $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2g(\theta) - 2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{4\sin\theta\cos\theta}{\theta}$ — 10점

⑤ $= \lim_{\theta \to 0+}\left(4 \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \cos\theta\right) = 4 \times 1 \times 1 = 4$ 이다.

채점 기준

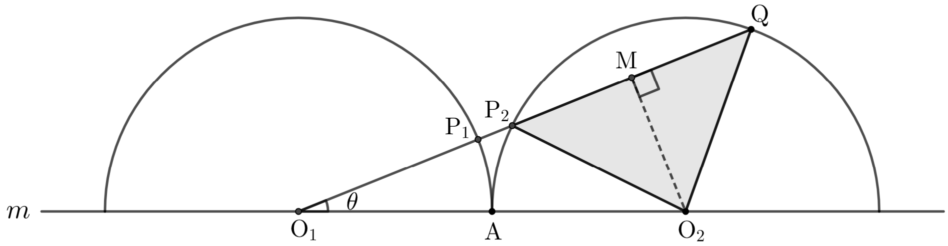
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ⑤단계까지의 과정 중 계산 실수가 한 개만 있는 경우
3등급: ③단계까지만 맞은 경우
4등급: ②단계까지만 맞은 경우
5등급: ①단계를 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

채점 기준	배점
다른 풀이 ① 삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1A}}\times\overline{\mathrm{O_1P_1}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$이므로, $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$이다. ② 삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1O_2}}\times\overline{\mathrm{O_2Q}}\times\sin\angle\mathrm{QO_2O_1}=\sin(\pi-\alpha-\theta)$이고, $\sin(\pi-\alpha-\theta)=\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta$ $=\sin2\theta+\cos\alpha\sin\theta$ 이므로 $g(\theta)=\sin2\theta+\cos\alpha\sin\theta$가 된다. ③ 삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_2Q}}\times\overline{\mathrm{O_2P_2}}\times\sin\angle\mathrm{P_2O_2Q}=\frac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha)=\frac{1}{2}\sin2\alpha$이고, (사각형 $\mathrm{AO_2P_2P_1}$의 넓이) = (삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이) − (삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이) − (삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이)로부터 $h(\theta)=g(\theta)-\frac{1}{2}\sin2\alpha-f(\theta)$ 임을 알 수 있다. ④ $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos\alpha\sin\theta$ 임을 이용하면 $$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2g(\theta)-\frac{1}{2}\sin2\alpha}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin2\theta}{\theta}=4$$이 된다. **채점 기준** 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ③단계까지는 맞았으나 ④단계에서 실수가 있는 경우 3등급: ③단계까지 시도하였으나 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$ 중 적어도 한 개가 잘못되어 ④단계에서 잘못된 답을 구한 경우 4등급: ②단계까지 맞은 경우 5등급: ①단계만 맞은 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

예시 답안

(1) 선분 P_2Q의 중점을 M이라 할 때, 이등변삼각형 P_2O_2Q에서 중선 O_2M의 길이는 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이다.



그러므로 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이면 $\overline{O_2M} = 2\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 $\overline{MQ} = \sqrt{\overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로,

삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{MQ}\times\overline{O_2M} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$이다.

(2) 직각삼각형 O_1O_2M에서 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이고, $\overline{O_1M} = \overline{O_1O_2}\cos\theta = 2\cos\theta$ 이다.

그리고 $\overline{P_2M} = \sqrt{\overline{O_2P_2}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이다.

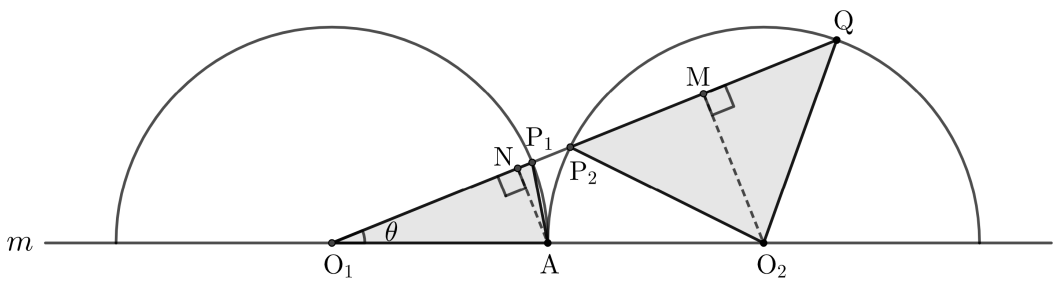
따라서 $\ell(\theta) = \overline{P_1P_2} = \overline{O_1M} - \overline{P_2M} - \overline{O_1P_1} = 2\cos\theta - \sqrt{1-4\sin^2\theta} - 1$ 이다. $\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2}$을 정리해보면

$$\frac{2\cos\theta-1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$ 이

되고, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)} = -1$이므로,

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = -1+2 = 1$이 된다.

(3) 점 A에서 선분 O_1Q에 내린 수선의 발을 N이라 할 때, 직각삼각형 O_1AN에서 $\overline{AN} = \overline{O_1A}\sin\theta = \sin\theta$ 이므로,



삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이는 $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1P_1}}\times\overline{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\sin\theta$ 이다.

삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이는 $g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O_1Q}}\times\overline{\mathrm{O_2M}}$ 인데,

$\overline{\mathrm{O_1Q}}=\overline{\mathrm{O_1M}}+\overline{\mathrm{MQ}}=2\cos\theta+\sqrt{\overline{\mathrm{O_2Q}}^2-\overline{O_2M}^2}=2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이므로

$g(\theta)=\left(2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)\sin\theta$ 이다.

삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P_2Q}}\times\overline{\mathrm{O_2M}}=\overline{\mathrm{MQ}}\times\overline{\mathrm{O_2M}}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}\times2\sin\theta$ 이고,

사각형 $\mathrm{AO_2P_2P_1}$의 넓이는

$h(\theta)=$ (삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이) $-$ (삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이) $-$ (삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이)이므로

$h(\theta)=g(\theta)-\sqrt{1-4\sin^2\theta}\times2\sin\theta-f(\theta)$ 이다.

따라서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2g(\theta)-2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin\theta\cos\theta}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\left(4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\right)=4\times1\times1=4$ 이다.