출제의도 및 문제해설

출제의도

치환적분을 통하여 정적분을 원하는 형태로 바꿀 수 있는지를 확인하고, 부분적분을 활용하여 주어진 정적분을 계산할 수 있는지를 물어본다. 마지막으로, 수열의 일반항을 구하여 주어진 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 확인한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

문제 2 (1)

적용 교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
성취기준/ 영역별 내용	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

문제 2 (2)

적용 교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
성취기준/ 영역별 내용	[12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

문제 2 (3)

적용 교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수
성취기준/ 영역별 내용	[12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	23-28, 37-44, 149-161	교과서	재구성
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	22-28, 34-40, 143-154	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

문제 해설

(1) 치환적분을 통해 $a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 으로 나타낼 수 있다.

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ 임을 이용하면

$a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx$ 이

성립하므로 $A=1,\ B=1$임을 알 수 있다.

(2) 부분적분을 통해 $\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$ 가 됨을 알 수 있고,

비슷하게 $\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$ 가 된다. 따라서

$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C_1$ 이고, $\int e^{-x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) + C_2$이므로

$\int e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = -e^{-x}\cos x + C_3$ 가 된다. 또는 부분적분을 이용하여

$$\int e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = \int e^{-x}(-\cos x)'\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + C_4$$

임을 알 수 있다. (단, C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)

그러므로,

$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{n\pi} = 1-(-1)^n e^{-n\pi} = 1-(-e^{-\pi})^n$ 이고, $|-e^{-\pi}| < 1$이므로,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-(-e^{-\pi})^n\right) = 1$이다.

(3) $a_n = 1-(-e^{-\pi})^n$이므로

$a_{n+1} = 1-(-e^{-\pi})^{n+1} = 1-(-e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n = 1+e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n$이다.

$a_n - a_{n+1} = -(-e^{-\pi})^n - e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n$이 되어

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = -(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n$ 이고 $|-e^{-\pi}| < 1$이므로

급수의 합을 계산하여 $-(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})\frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = e^{-\pi}$가 됨을 알 수 있다.

평가 기준

채점 기준	배점
문제 2 (1) ① 치환적분을 통해 $a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 으로 나타낼 수 있다. ② $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$ 임을 이용하면 $a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ $= \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx$ 이 성립하므로 $A=1$, $B=1$임을 알 수 있다. **채점 기준** 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ②단계에서 A 혹은 B 둘 중 하나만 맞은 경우 3등급: ②단계에서 답을 찾으려고 시도했으나 A와 B 둘 다 틀린 경우 4등급: ①단계만 맞은 경우 5등급: ①단계에서 잘못된 치환적분을 사용한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	7점
문제 2 (2) ① 부분적분을 통해 $\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C_1$ 가 됨을 알 수 있고, 비슷하게 $\int e^{-x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C_2$ 가 된다. ② 따라서 $\int e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = -e^{-x}\cos x+C_3$ 가 된다. 또는 부분적분을 이용하여 $\int e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x\,dx+\int e^{-x}\cos x\,dx$ $= \int e^{-x}(-\cos x)'\,dx+\int e^{-x}\cos x\,dx$ $= -e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx+\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x+C_4$ 임을 알 수 있다. (단, C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)	10점

<table>
<tr><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>

③ 그러므로

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{n\pi}$$

$$= 1-(-1)^n e^{-n\pi} = 1-(-e^{-\pi})^n$$ 이고,

④ $|-e^{-\pi}| < 1$이므로

⑤ 극한값은 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-(-e^{-\pi})^n\right) = 1$이다.

채점 기준

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: 답은 맞았지만 ④단계를 언급하지 않은 경우
3등급: ③단계까지는 맞았으나 ⑤단계에서 틀린 경우
4등급: ②단계까지는 맞았으나 ③단계에서 틀린 경우
5등급: ①단계까지 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

</td><td></td></tr>
<tr><td>

문제 2 (3)

① $a_n = 1-(-e^{-\pi})^n$이므로

$$a_{n+1} = 1-(-e^{-\pi})^{n+1} = 1-(-e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n = 1+e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n$$ 이다.

② $a_n - a_{n+1} = -(-e^{-\pi})^n - e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n$이 되어

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = -(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n$ 이고

④ $|-e^{-\pi}| < 1$이므로

⑤ 급수의 합을 계산하여 $-(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})\dfrac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = e^{-\pi}$가 됨을 알 수 있다.

채점 기준

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: 답은 맞았으나 ④단계를 언급하지 않은 경우
3등급: ③단계까지는 맞았으나 ⑤단계에서 계산 실수가 있는 경우
4등급: ②단계까지 맞은 경우
5등급: ①단계만 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

</td><td>8점</td></tr>
</table>

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

예시 답안

(1) 치환적분을 통해 $a_n = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 으로 나타낼 수 있다.

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ 임을 이용하면

$a_n = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx$

이 성립하므로 $A=1$, $B=1$임을 알 수 있다.

(2) 부분적분을 통해 $\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$ 가 됨을 알 수 있고,

비슷하게 $\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$ 가 된다. 따라서

$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C_1$ 이고, $\int e^{-x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) + C_2$이므로

$\int e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = -e^{-x}\cos x + C_3$ 가 된다. 또는 부분적분을 이용하여

$\int e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = \int e^{-x}(-\cos x)'\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx$

$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + C_4$

임을 알 수 있다. (단, C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)

그러므로 $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{n\pi} = 1-(-1)^n e^{-n\pi} = 1-(-e^{-\pi})^n$이고,

$|-e^{-\pi}| < 1$이므로, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-(-e^{-\pi})^n\right) = 1$이다.

(3) $a_n = 1-(-e^{-\pi})^n$이므로

$a_{n+1} = 1-(-e^{-\pi})^{n+1} = 1-(-e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n = 1+e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n$이다.

$a_n - a_{n+1} = -(-e^{-\pi})^n - e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n$이 되어

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = -(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n$ 이고 $|-e^{-\pi}| < 1$이므로

급수의 합을 계산하여 $-(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})\frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = e^{-\pi}$가 됨을 알 수 있다.