출제의도 및 문제해설

출제의도

다항함수의 그래프가 지나는 점, 차수에 대한 조건과 적분의 성질을 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항을 결정하고, 함수의 식을 구할 수 있는지를 확인한다. 그리고 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율의 정의를 알고 평균값 정리를 이해하고 있으며, 평균값 정리의 식을 만족하는 실수 b의 값을 구간 $(0,3)$에서 구할 수 있는지 살펴본다. 마지막으로 구간 $[0,3]$에서 f''가 양의 값, 음의 값을 가지는 구간을 구분하여, f''의 절댓값이 포함된 함수의 식을 간단히 정리할 수 있고, 이에 대한 정적분 값을 구할 수 있는지 확인한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

문제 1 (1)

적용 교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ② 도함수 - (3) 적분 - ② 정적분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학 II 03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

문제 1 (2)

적용 교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ① 미분계수 - (2) 미분 - ② 도함수 - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학 II 02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

문제 1 (3)

적용 교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ② 도함수 - (3) 적분 - ② 정적분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학 II 03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	53, 62-67, 77-80	교과서	재구성
수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2018	121-126	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

문제 해설

(1) 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $g(x)$의 최고차항을 x^n이라고 하면 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt$로부터 $f(x)$의 최고차항은 $x\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{n+1}x^{n+2}$ 이고, 이것이 사차항이 되려면 $n=2$ 이다. 따라서 $g(x)=x^2+ax$ 꼴이다. (a는 상수) 그리고 주어진 식에 의해 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt = x\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{6}x^3(2x+3a)$ 인데, 주어진 조건 $f(3)=0$ 으로부터 $a=-2$ 이다. 따라서 $g(x)=x^2-2x$ 이고, $f(x)=\frac{1}{3}x^4-x^3$ 이다.

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^4-x^3$ 이므로, $f(0)=0$, $f(3)=0$ 이다. 따라서 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{0-0}{3}=0$ 이고, $f'(x)=\frac{4}{3}x^3-3x^2=\frac{1}{3}x^2(4x-9)$ 이다. 이때 $f'(x)=0$ 은 구간 $(0,3)$ 에서 $x=\frac{9}{4}$일 때만 성립한다. 따라서 $b=\frac{9}{4}$ 이다.

(3) $f(x)=\frac{1}{3}x^4-x^3$ 으로부터 $f''(x)=4x^2-6x=2x(2x-3)$ 이므로 $0\le x\le\frac{3}{2}$ 에서는 $f''(x)\le 0$ 이고, $x<0$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ 이면 $f''(x)>0$ 이다. 따라서 $|f''(x)|-f''(x)=\begin{cases}-2f''(x), & 0\le x\le\frac{3}{2}\\ 0, & x<0 \text{ 또는 } x>\frac{3}{2}\end{cases}$

그러므로 $\int_0^3(|f''(x)|-f''(x))\,dx=-2\int_0^{\frac{3}{2}}f''(x)\,dx=-2\left[f'(x)\right]_0^{\frac{3}{2}}=-2\left[\frac{1}{3}x^2(4x-9)\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{2}$ 이다.

평가 기준

채점 기준	배점
문제 1 (1) ① $g(x)$의 최고차항을 x^n이라고 하면 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt$로부터 $f(x)$의 최고차항은 $\frac{1}{n+1}x^{n+2}$ 이다. ② $f(x)$의 최고차항이 사차항이 되려면 $n=2$ 이다. ③ 따라서 $g(x)=x^2+ax$ 꼴이다. ④ 그리고 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt = x\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{6}x^3(2x+3a)$ 이다. ⑤ 주어진 조건 $f(3)=0$ 으로부터 $a=-2$ 이다. 따라서 $g(x)=x^2-2x$ 이고, $f(x)=\frac{1}{3}x^4-x^3$ 이다.	10점

채점 기준	배점
채점 기준 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ①~⑤단계까지 서술하였으나 ④~⑤ 과정 중 계산 실수가 1개 있는 경우 3등급: ①~③단계를 옳게 서술하고 ④단계부터 틀린 경우 4등급: ①~②단계를 옳게 서술하고 ③단계부터 틀린 경우 5등급: ①단계까지만 옳게 서술한 경우 6등급: 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급: 백지 답안	
문제 1 (2) ① 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-0}{3} = 0$ 이다. ② $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2$ 이다. ③ $f'(x) = \frac{1}{3}x^2(4x-9) = 0$ 은 $x=0$ 또는 $x = \frac{9}{4}$에서 성립한다. ④ 이 중에서 구간 $(0,3)$에 속하는 것은 $x = \frac{9}{4}$ 뿐이다. 따라서 $b = \frac{9}{4}$ 이다. **채점 기준** 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ④단계까지 모두 서술했으나 계산 오류가 1개 있는 경우 3등급: ③단계까지 서술하고, 해당하지 않는 경우를 포함하여 제시한 경우 4등급: ①, ②단계까지만 옳게 제시한 경우 5등급: ①단계까지만 옳게 제시한 경우 6등급: 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급: 백지 답안	7점
문제 1 (3) ① $f''(x) = 4x^2 - 6x = 2x(2x-3)$ 이므로 ② $0 \le x \le \frac{3}{2}$ 에서는 $f''(x) \le 0$ 이고, $x < 0$ 또는 $x > \frac{3}{2}$ 이면 $f''(x) > 0$ 이다. ③ 따라서 $\lvert f''(x)\rvert - f''(x) = \begin{cases} -2f''(x), & 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ 0, & x < 0 \text{ 또는 } x > \frac{3}{2} \end{cases}$ ④ 그러므로 $\int_0^3 (\lvert f''(x)\rvert - f''(x))\,dx = -2\int_0^{\frac{3}{2}} f''(x)\,dx$ $= -2\,[f'(x)]_0^{\frac{3}{2}} = -2\left[\frac{1}{3}x^2(4x-9)\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}$ 이다.	8점

채점 기준	배점
채점 기준 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ④단계까지 모두 서술했으나 계산 오류가 1개 있는 경우 3등급: ③단계까지 서술하고, ④단계로 진행하지 못한 경우 4등급: ①, ②단계까지만 옳게 제시한 경우 5등급: ①단계까지만 옳게 제시한 경우 6등급: 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급: 백지 답안	

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

예시 답안

(1) 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $g(x)$의 최고차항을 x^n이라고 하면 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt$로부터 $f(x)$의 최고차항은

$x\cdot\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}=\dfrac{1}{n+1}x^{n+2}$ 이고, 이것이 사차항이 되려면 $n=2$ 이다. 따라서 $g(x)=x^2+ax$ 꼴이다. (a는 상수)

그리고 주어진 식에 의해 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt = x\left[\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{a}{2}t^2\right]_0^x = \dfrac{1}{6}x^3(2x+3a)$인데,

주어진 조건 $f(3)=0$ 으로부터 $a=-2$ 이다. 따라서 $g(x)=x^2-2x$ 이고, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 이다.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 이므로, $f(0)=0,\ f(3)=0$ 이다.

따라서 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율은 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-0}{3}=0$ 이고,

$f'(x)=\dfrac{4}{3}x^3-3x^2=\dfrac{1}{3}x^2(4x-9)$ 이다.

이때 $f'(x)=0$ 은 구간 $(0,3)$ 에서 $x=\dfrac{9}{4}$ 일 때만 성립한다. 따라서 $b=\dfrac{9}{4}$ 이다.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 으로부터 $f''(x)=4x^2-6x=2x(2x-3)$ 이므로 $0\le x\le\dfrac{3}{2}$ 에서는 $f''(x)\le 0$ 이고,

$x<0$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}$ 이면 $f''(x)>0$ 이다.

따라서 $|f''(x)|-f''(x)=\begin{cases}-2f''(x), & 0\le x\le\dfrac{3}{2}\\ 0, & x<0 \text{ 또는 } x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$

그러므로

$$\int_0^3(|f''(x)|-f''(x))\,dx=-2\int_0^{\frac{3}{2}}f''(x)\,dx=-2\,[f'(x)]_0^{\frac{3}{2}}=-2\left[\frac{1}{3}x^2(4x-9)\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{2}$$ 이다.