2. 출제개요

가. 출제의도 및 문제 해설

1) 출제의 방향

우리대학의 자연계 논술 시험은 예년과 마찬가지로 수험생의 학업 부담을 경감시키고자 수학 문제로만 구성하여, 고등학교 수학의 기초 원리를 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 한다. 출제범위는 고등학교 공통 수학, 수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ, 미적분, 확률과 통계로 한정한다. 고등학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있는 수리적 문제 상황을 제시하고, 논리적인 사고를 따르면 쉽게 해결할 수 있는 세부 문제로 구성하였다. 개별적인 교과 지식의 반복 학습과 암기를 통해 습득된 지식을 묻는 것을 지양하고, 수학적 원리에 대한 확실하고 통합적인 이해를 바탕으로 문제를 분석하여 해결하며 그 과정과 결과를 논리적으로 명확하게 기술할 수 있는지를 평가한다. 그리고 평가의 객관성을 위해 채점의 기준을 최대한 객관화할 수 있도록 출제하였다.

2) 문항별 출제의도

[문제 1] 삼각함수와 로그의 성질을 이해하고 극한과 수열의 합을 활용하는 문제해결 능력을 평가하고자 한다. 주어진 조건에 따라 삼각함수를 포함한 수열에서 나타나는 규칙성을 파악하여 적절한 수열의 합을 적용하는 문제해결 능력을 평가하고자 한다. 또한, 문제를 해결하는 단계를 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 명확하게 서술할 수 있는지도 평가하고자 한다.

[문제 2] 함수의 성질과 극한의 정의, 접선의 방정식과 함수의 극대, 극소, 두 곡선 사이에 놓인 영역의 면적 등 ‘수학’과 ‘수학 I’, ‘수학 II’에서 학습한 기본적인 내용을 활용하여 제시된 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 측정하고자 한다. 또한 두 직선이 서로 수직한 조건을 이해하고 삼각함수 등을 활용하여 직사각형의 면적을 구할 수 있는지의 여부도 평가하고자 한다.

[문제 3] 문제의 조건으로부터 정삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 규칙성을 발견하여 점화식을 찾아가는 논리력을 측정하고자 한다. 그리고 등비급수의 합을 구하고, 이 결과를 해석하고 도함수의 성질 또는 삼각함수의 증감 등을 활용하여 문제에 제시된 명제를 증명할 수 있는지의 여부를 평가한다.

[문제 4] 로그함수의 정의와 성질, 경우의 수 등 기초적인 수학 지식을 활용하여 문제에서 요구하는 원소의 개수를 구하고 규칙성을 발견하는 능력을 측정한다. 그리고 발견한 규칙성을 활용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

나. 출제 근거

1) 교육과정 근거

문제 1	교육과정	[수학 Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수-$\boxed{1}$ 지수와 로그 (2) 삼각함수-$\boxed{1}$ 삼각함수 (3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합 [미적분]-(1) 수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수 (2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
	성취기준 /영역별 내용	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
문제 2	교육과정	[수학]-(2) 기하-$\boxed{2}$ 직선의 방정식 (4) 함수-$\boxed{1}$ 함수 [수학 Ⅰ]-(2) 삼각함수-$\boxed{1}$ 삼각함수 [수학 Ⅱ]-(2) 미분-$\boxed{1}$ 미분계수 $\boxed{3}$ 도함수의 활용 (3) 적분-$\boxed{3}$ 정적분의 활용
	성취기준 /영역별 내용	[10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 3	교육과정	[수학 Ⅰ]-(2) 삼각함수-$\boxed{1}$ 삼각함수 (3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [수학 Ⅱ]-(2) 미분-$\boxed{3}$ 도함수의 활용 [미적분]-(1) 수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수
	성취기준 /영역별 내용	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
문제 4	교육과정	[수학]-(3) 수와 연산-$\boxed{1}$ 집합 (5) 확률과 통계-$\boxed{1}$ 경우의 수 [수학 Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수-$\boxed{1}$ 지수와 로그 (3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합 [미적분]-(1) 수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수
	성취기준 /영역별 내용	[10수학03-03] 집합의 연산을 할 수 있다. [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	세 부 내 용
문제 1	[수학 Ⅰ] 천재교과서, 류회찬 외 10인, 2018년, 29쪽, 77쪽, 140쪽 [미적분] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2019년, 73쪽
문제 2	[수학] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, 118쪽 [수학 Ⅰ] 천재교과서, 류회찬 외 10인, 2018년, 105쪽 [수학 Ⅱ] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, 60쪽, 73쪽, 93쪽, 141쪽
문제 3	[수학 Ⅰ] 천재교과서, 류회찬 외 10인, 2018년, 105쪽, 133쪽 [수학 Ⅱ] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, 83쪽 [미적분] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2019년, 37쪽
문제 4	[수학] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, 169쪽. 258쪽 [수학 Ⅰ] 천재교과서, 류회찬 외 10인, 2018년, 29쪽, 41쪽, 145쪽 [미적분] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2019년, 31쪽

3. 평가기준

가. 배점기준표

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	7	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	8	
문제1(3)	10	
문제2(1)	5	
문제2(2)	10	
문제2(3)	10	
문제3(1)	7	
문제3(2)	8	
문제3(3)	10	
문제4(1)	7	
문제4(2)	10	
문제4(3)	8	

나. 채점기준

* 각 문제에 대하여 아래에 제시된 예시답안과 같이 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. 이후 등급을 해당 문제의 점수로 환산하여 총점을 계산한다.
* 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1등급을 감점한다.
* 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1등급을 감점한다.
* 백지답안은 7등급을 부여한다.

〈문제 1〉 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 7점]

① $N(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\times\sin(\theta x)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\times\sin(\theta x)\times\cos(\theta x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\times\sin(2\theta x)$

② $\lim\limits_{x\to0}\frac{N(x)}{x}=\frac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\right)^x\times\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2\theta x}{x}=\frac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2\theta x}{x}$

③ $t=2\theta x$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

④ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2\theta x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(2\theta\times\frac{\sin2\theta x}{2\theta x}\right)=2\theta\times\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=2\theta$

⑤ $\lim\limits_{x\to0}\frac{N(x)}{x}=\frac{1}{2}\times2\theta=\theta$

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④까지 맞게 구하고 최종 답이 틀린 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ①~④단계를 이해하고 있으나 실수가 있는 경우
5등급: ①~④단계의 접근 중 하나를 옳게 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 1〉 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 8점]

① $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $N(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

② $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$는 x가 1부터 1씩 증가함에 따라 1, 0, −1, 0, 1, 0, ... 로 나타난다

③ 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}|N(n)|=\left(\frac{1}{2}\right)^2+0+\left(\frac{1}{2}\right)^4+0+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\dots$

④ 주어진 급수는 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 무한등비급수이다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}|N(n)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④까지 맞게 구하고 최종 답이 틀린 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ①~④단계를 이해하고 있으나 실수가 있는 경우
5등급: ①~④단계의 접근 중 하나를 옳게 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 1〉 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $N(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\times\sin(2\theta x)$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\cos(2\theta x)\times N(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\cos(2\theta x)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\times\sin(2\theta x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\left(1+\frac{1}{2}\sin(4\theta x)\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}(2+\sin(4\theta x))$

② 따라서,

$\log_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\cos(2\theta x)\times N(x)\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}(2+\sin(4\theta x))=-(x+2)+\log_2(2+\sin(4\theta x))$

③ $\theta=\frac{\pi}{8}$일 때, $2+\sin(4\theta x)=2+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$이므로

$\sum_{n=1}^{20}\left(-(n+2)+\log_2\left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)\right)=\sum_{n=1}^{20}(-(n+2))+\sum_{n=1}^{20}\log_2\left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)=-\frac{20\times21}{2}-2\times20+\sum_{n=1}^{20}\log_2\left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$

④ $2+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$은 n이 1부터 1씩 증가함에 따라 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2...로 나타나므로

$\sum_{n=1}^{20}\log_2\left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)=(\log_2 3+1+0+1)\times5=5\log_2 3+10$이다.

⑤ 따라서, 구하는 식의 값은 $5\log_2 3-240$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④까지 맞게 구하고 최종 답이 틀린 경우
3등급: ②~④단계에서 옳게 접근했으나 실수가 1개인 경우
4등급: ②~④단계에서 옳게 접근했으나 실수가 2개인 경우
5등급: ①~④단계의 접근 중 하나를 옳게 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 2〉 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립하므로
② $(-x)^3+a(-x)^2+b(-x)+c=-(x^3+ax^2+bx+c)$로부터 $2ax^2+2c=0$이고
③ 이로부터 $a=0,\ c=0$이다.
④ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=8$로부터 $f(2)=0$이 됨을 알 수 있고 이로부터 $8+2b=0$이므로 $b=-4$이다.
⑤ 따라서 $f(x)=x^3-4x$가 된다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④까지 맞게 구하고 최종 답이 틀린 경우
3등급: ②~④단계에서 옳게 접근했으나 실수가 1개인 경우
4등급: ②~④단계에서 옳게 접근했으나 계산 실수가 2개인 경우
5등급: ②~③단계 또는 ④단계의 접근 중 하나를 옳게 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

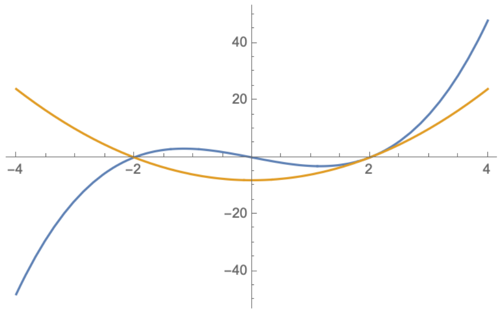
〈문제 2〉 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $y=f(x)$와 $y=2x^2+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $x^3-4x=2x^2+k$가 두 실근을 가지면 된다. 따라서 3차 곡선 $y=x^3-2x^2-4x$의 그래프와 x축에 평행한 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 k의 값을 구하면 된다.

② $g(x)=x^3-2x^2-4x$라 두면 $g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)=0$으로부터 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$에서 극값을 갖고

③ $g\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{40}{27}$, $g(2)=-8$이므로 $k=\frac{40}{27}$ 또는 $k=-8$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

④ $k=-8$인 경우 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=2x^2-8$은 $x=-2$와 $x=2$에서 만나고 그래프는



가 되므로

⑤ 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_{-2}^{2}\left(x^3-4x-(2x^2-8)\right)dx=\frac{64}{3}$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ⑤단계까지 옳게 접근하였으나 ④~⑤단계에서 실수한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ①~③단계를 이해하고 있으나 실수가 있는 경우
5등급: ①단계를 이해하고 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 2〉(3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $f'(x)=3x^2-4$로부터 $f'(x)=1$을 만족하는 값은 $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$이고 $f'(x)=-1$을 만족하는 값은 $x=\pm 1$이다.

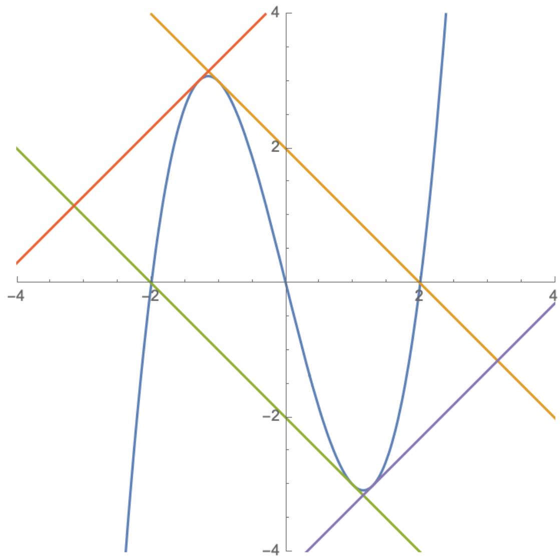
② 따라서 기울기가 1인 직선 중 이 곡선에 접하는 직선의 방정식은 $y=x\pm\frac{10\sqrt{15}}{9}$이고,

③ 이 두 직선의 x절편 사이의 거리에 삼각함수를 적용하면 직사각형의 두 변 중 기울기가 -1인 직선위에 놓여있는 변의 길이는 $\left(\frac{10\sqrt{15}}{9}-\frac{-10\sqrt{15}}{9}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$이다.

④ 같은 방법으로 기울기가 -1인 직선 중 이 곡선에 접하는 직선의 방정식은 $y=-x\pm 2$이고, 이로부터 직사각형의 두 변 중 기울기가 1인 직선위에 놓여있는 변의 길이는 $(2-(-2))\times\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$이다.

⑤ 따라서 주어진 직사각형의 면적은 $2\times 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\times 2\times\frac{10\sqrt{15}}{9}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{40\sqrt{15}}{9}$이다.

(③~④ 단계에서 삼각형의 면적을 구하는 여러 가지 방법을 이용해 원점에서 4개의 접선까지의 거리를 계산해도 된다.)



[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 옳게 서술하고 ⑤의 면적 계산에서 실수한 경우
3등급: ②~④단계에서 옳게 접근했으나 실수가 1개인 경우
4등급: ②~④단계에서 옳게 접근했으나 계산 실수가 2개인 경우
5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 3〉 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 7점]

① 직각삼각형 $\triangle \mathrm{OO_2P_1}$에서 선분 $\mathrm{O_2P_1}$의 길이는 $\frac{r_1}{2}$, 각 $\angle P_1OO_2$의 크기는 $\frac{\theta}{2}$이고

② 선분 $\mathrm{OO_2}$의 길이는 $a - r_1 \sin\frac{\pi}{3} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1 = \frac{r_1}{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$이다.

③ 이로부터 $r_1 = \frac{2a\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}$이다.

④ $\mathrm{OO_2}$를 반지름으로 갖는 부채꼴에 위의 논의를 반복하면

$$r_2 = \frac{2\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1\right)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} = \frac{2a\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} \times \frac{1}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} \text{ 이다.}$$

$$= r_1 \times \frac{1}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}$$

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계의 계산에서 1개의 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 3〉 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 8점]

① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$는 초항이 $r_1 = \frac{2a\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}$이고

② 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}$이고 $0 < \frac{1}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} < 1$ 이므로

③ 이 급수의 합은 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$이다.

④ 따라서 각 θ와 상관없이 일정하다.

(다른 풀이: 자연수 n에 대하여 선분 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}$의 길이는 $r_n\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$이고 이의 합은 선분 $\mathrm{OO_1}$의 길이가 된다. 따라서 $a = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2}r_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r_n$이고 이로부터 $\sum_{n=1}^{\infty}r_n = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$이다.)

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ③단계까지의 계산이 맞았는데 이를 해석하여 증명을 마무리 하지 못한 경우
3등급: ③단계 계산에서 1개의 실수가 있는 경우
4등급: ①~②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①~②단계에서 오류가 1개인 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 3〉 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 정삼각형 $\triangle \mathrm{O}_n\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은 $\frac{1}{2}r_n^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}r_n^2$이므로

② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$는 초항이 $\dfrac{\sqrt{3}a^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)^2}$이고 공비가 $\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)^2}$인 등비급수이고

③ 이의 합은

$$\frac{\dfrac{\sqrt{3}a^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)^2}}{1-\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)^2}}=\frac{a^2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+2}=\frac{a^2}{\sqrt{3}+2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$ 이다.

④ $0<\theta<\pi$에서 $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$이므로

⑤ $\dfrac{a^2}{\sqrt{3}+2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}<\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ⑤단계까지 옳게 접근하였으나 ④~⑤단계 서술에서 실수한 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ①~③단계를 이해하고 있으나 실수가 있는 경우
5등급: ①단계를 이해하고 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 4〉 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 7점]

① $f(x)$와 $g(x)$는 연속인 증가함수이고 $f(1)=0, f(2)=1, f(4)=2, f(8)=3$, $g(1)=0, g(4)=1$이다.

② 따라서

$A_1=\{0\}$, $A_2=\{1\}$, $A_3=\{1\}$, $A_4=\{1,2\}$, $A_5=\{2\}$,
$A_6=\{2\}$, $A_7=\{2\}$, $A_8=\{2,3\}$, $A_9=\{2,3\}$, $A_{10}=\{2,3\}$

이 성립하고

③ $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이므로

④ 원소 개수는 4개이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ③단계까지의 계산이 맞았는데 답을 잘못 구한 경우
3등급: ①~③단계 계산에서 1개의 실수가 있는 경우
4등급: ①~③단계 계산에서 2개의 실수가 있는 경우
5등급: ①~③단계 계산에서 3개의 실수가 있는 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 4〉 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 자연수 m에 대하여 $k\log_n 2 = m$이라면 $n^m = 2^k$가 성립한다.

② 따라서 n은 2^k의 약수이므로 $n = 2^l$형태이고 $(2^l)^m = 2^k$로부터 l은 k의 약수이어야 한다.

③ 그러므로 N_k는 k의 약수의 개수와 같고

④ 이로부터

$N_1 = 1,\ N_2 = 2,\ N_3 = 2,\ N_4 = 3,\ N_5 = 2,\ N_6 = 4,\ N_7 = 2,\ N_8 = 4,\ N_9 = 3,\ N_{10} = 4$이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ①~③단계 과정을 옳게 서술하고 ④에서 1개의 실수가 있는 경우

3등급: ①~③단계 과정을 옳게 서술하고 ④에서 2~3개의 실수가 있는 경우

4등급: ①~③단계에 대한 서술을 통해 ③의 결론을 도출했지만 논리적 오류가 있는 경우

5등급: ①~③단계를 시도했지만 올바른 추축을 하지 못한 경우

6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우

7등급: 백지 답안

〈문제 4〉 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 8점]

① (2)의 논의로부터 $N_{2^{k+1}}$는 2^{k+1}의 약수의 개수이므로 $k+2$이다.

따라서

② $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot N_{2^{k+1}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+2)}$$

③ $$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

④ $$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 옳게 접근했으나 답이 틀린 경우

3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우

6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우

7등급: 백지 답안