2. 출제개요

가. 출제의도

〈문제 1〉

다항함수에 관한 극한이 주어져 있을 때 다항함수의 식을 찾을 수 있는지를 확인한다. 그리고 도함수를 활용하여 삼차함수의 극댓값, 극솟값, 변곡점을 찾고 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 알아본다. 마지막으로 절댓값을 취한 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 알아보고, 함수가 불연속이 되게 하는 값을 모두 찾을 수 있는지를 확인한다.

〈문제 2〉

치환적분과 정적분의 성질을 이용하여 정적분 계산이 쉬운 형태로 식을 변형할 수 있는지를 확인한다. 그리고 부분적분법 및 정적분의 정의를 이용하여 주어진 적분을 간단한 형태로 변형할 수 있는지를 알아본다. 마지막으로 삼각함수의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 확인한다.

〈문제 3〉

원의 접선이 갖는 성질과 직각삼각형의 삼각비, 접선의 의미, 이차함수의 성질 등을 이해하고 있는지를 확인하고자 한다. 그리고 호도법을 이용한 부채꼴의 넓이와 적분의 활용을 통한 두 곡선 사이의 넓이를 구함으로써 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다. 마지막으로 삼각비의 활용을 통해 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 확인한다.

〈문제 4〉

확률의 의미를 알고 조건을 만족하는 경우의 수와 확률을 계산하는 능력이 있는지를 평가한다. 그리고 두 지점 사이의 최단 경로의 길이로 주어지는 거리를 이해하고 주어진 상황을 분석하여 확률분포표를 완성할 수 있는지를 확인한다. 마지막으로 확률분포표로부터 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있는지를 알아본다.

나. 출제근거

〈문제 1〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학 II] – (1) 함수의 극한과 연속 – $\boxed{1}$ 함수의 극한 – (1) 함수의 극한과 연속 – $\boxed{2}$ 함수의 연속 – (2) 미분 – $\boxed{2}$ 도함수의 활용 [미적분] – (2) 미분법 – $\boxed{3}$ 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	46-48	교과서	재구성
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	110-117	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

〈문제 2〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 2 삼각함수 [수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분 [미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12수학I02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	84-86	교과서	재구성
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	122-131	교과서	재구성
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	30-31, 143-149, 151-153	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

〈문제 3〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식 [수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 (3) 적분 - 3 정적분의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	박교식 외 19인	동아출판	2018	136	교과서	재구성
수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	70-82	교과서	재구성
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	73-75, 137-142	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

〈문제 4〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합 (3) 통계 - 1 확률분포
성취기준 / 영역별 내용	[12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
확률과 통계	김원경 외 14인	비상교육	2019	11-19, 77-82	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

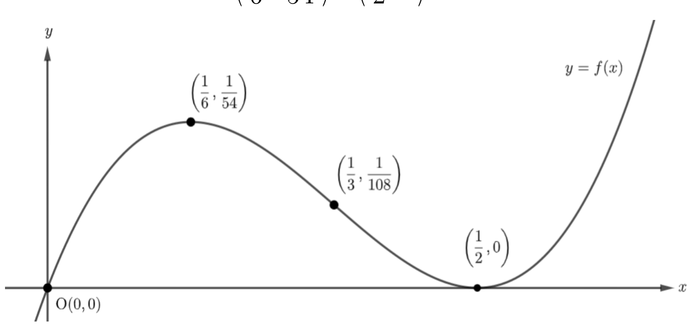
다. 문항 해설

〈문제 1〉

(1) 조건 (가)를 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-1$ 으로 변형할 수 있다. 이로부터 $f(x)$는 최고차항이 x^3인 다항함수가 되어, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓을 수 있다. 조건 (가)의 극한값이 -1이므로, $f(x)$의 이차항의 계수가 -1이 되어 $a=-1$이다. 조건 (나)를 통하여 $f(0)=0$이므로 $c=0$이고, $f'(0)=\frac{1}{4}$이므로 $b=\frac{1}{4}$이 된다. 따라서, $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{4}x$이다.

(2) $f'(x)=3x^2-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(12x^2-8x+1)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-1)$이 된다. $f'(x)$의 그래프를 통해 $x=\frac{1}{6}$일 때 $f(x)$는 극댓값 $f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{54}$을 갖고, $x=\frac{1}{2}$일 때 극솟값 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$을 갖는다.

또한, $f''(x)=6x-2$이므로, $f''(x)$의 그래프를 통해 $x=\frac{1}{3}$에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{108}\right)$이다. 따라서, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 그릴 수 있고, 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{54}\right)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$이다.



변곡점의 좌표가 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이므로, 직접 계산을 통해 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}-x\right)+f\left(\frac{1}{3}+x\right) &= \left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}-x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{36}x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}+x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x\right) \\ &= \frac{1}{54} = 2\cdot\frac{1}{108} = 2f\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} f(a-x)+f(a+x) &= \left((a-x)^3-(a-x)^2+\frac{1}{4}(a-x)\right)+\left((a+x)^3-(a+x)^2+\frac{1}{4}(a+x)\right) \\ &= 2a^3+6ax^2-2(a^2+x^2)+\frac{a}{2} = 2a^3-2a^2+\frac{a}{2}+(6a-2)x^2 = 2f(a)+(6a-2)x^2 \end{aligned}$$

이므로 $a=\frac{1}{3}$을 대입하면 된다.

(3) 위로부터 $g(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{108}$임을 알 수 있다. 따라서, k의 값이 주어졌을 때, $y=\left|f(x)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right|$의 그래프와 $y=k$의 그래프가 만나는 점의 개수를 구하면 된다.

(i) $k<0$: 이 경우에는 k의 값이 음수이므로 두 그래프는 만나지 않는다. 따라서, $p(k)=0$이다.

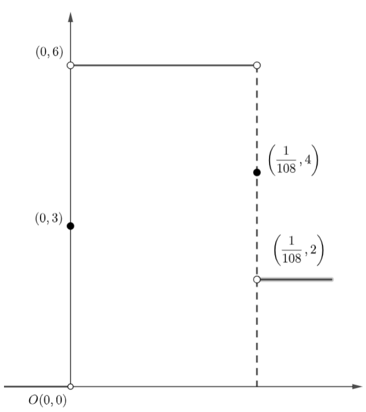
(ii) $k=0$: 이 경우에는 세 점에서 만나는 것을 확인할 수 있다. 따라서, $p(0)=3$이다.

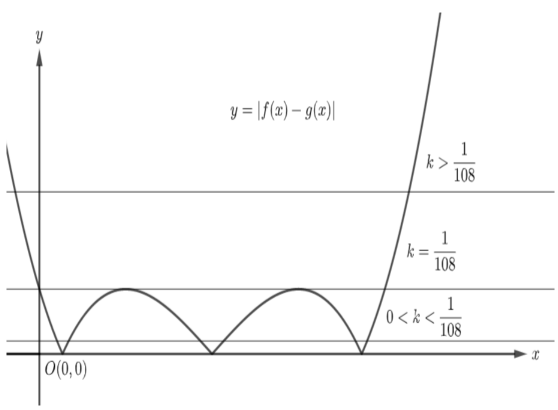
(iii) $0<k<\frac{1}{108}$: 이 경우에는 6개의 점에서 만나므로, $p(k)=6$이다.

(iv) $k=\frac{1}{108}$: 이 경우에는 4개의 점에서 만나므로, $p\left(\frac{1}{108}\right)=4$이다.

(v) $k>\frac{1}{108}$: 이 경우에는 두 점에서 만나므로, $p(k)=2$이다.

이를 통해 함수 $p(k)$는 $k=0, \frac{1}{108}$에서 불연속임을 알 수 있다.





〈문제 2〉

(1) $2-x=u$로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx = \int_1^0 g'(2-u)f(u)(-du) = \int_0^1 g'(2-u)f(u)du$$

따라서, $H(1)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(1)=\int_0^1 f'(x)g(2-x)dx-\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx=\int_0^1 f'(x)g(2-x)dx-\int_0^1 g'(2-u)f(u)du$$
$$=\int_0^1 \{f'(x)g(2-x)-f(x)g'(2-x)\}dx$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$H(1)=\int_0^1 \{f'(x)g(2-x)-f(x)g'(2-x)\}dx=[f(x)g(2-x)]_0^1=f(1)g(1)-f(0)g(2)$이 되고,

$f(1),\ g(1),\ f(0),\ g(2)$의 값을 이용하면 $H(1)=2\cdot 5-1\cdot(-1)=11$이 된다.

(2) $2n-x=u$로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx=\int_n^0 g'(2n-u)f(u)(-du)=\int_0^n g'(2n-u)f(u)du$$

따라서, $H(n)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(n)=\int_0^n f'(x)g(2n-x)dx-\int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx=\int_0^n f'(x)g(2n-x)dx-\int_0^n g'(2n-u)f(u)du$$
$$=\int_0^n \{f'(x)g(2n-x)-f(x)g'(2n-x)\}dx$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$H(n)=\int_0^n \{f'(x)g(2n-x)-f(x)g'(2n-x)\}dx=[f(x)g(2n-x)]_0^n=f(n)g(n)-f(0)g(2n)$$

$f(x)=a^x$이고, $g(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$이므로 $H(n)=a^n\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{2}$가 된다.

(3) 〈문제 2〉 (2)에서 $H(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{2}$임을 알 수 있고, $a_n=H(4n-3)+H(4n-1)$이라 하자.

$$a_n=H(4n-3)+H(4n-1)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3}\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}-\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1}\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}-\sin\frac{(4n-1)\pi}{2}$$

가 되는데, 삼각함수의 대칭성과 주기성에 의해 모든 자연수 n에 대해

$\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}+\sin\frac{(4n-1)\pi}{2}=0$이 성립하므로

$a_n=H(4n-3)+H(4n-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3}\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1}\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}$이다.

이 때, a_{n+1}을 계산해보면,

$a_{n+1}=H(4n+1)+H(4n+3)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}\sin\frac{(4n+1)\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+3}\sin\frac{(4n+3)\pi}{4}$이다.

한편, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$이므로

$\sin\frac{(4n+1)\pi}{4}=-\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}$이고, $\sin\frac{(4n+3)\pi}{4}=-\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}$이 성립한다.

따라서, $a_{n+1}=-\frac{1}{4}a_n$임을 알 수 있다.

첫째항은 $a_1=H(1)+H(3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이고 공비가 $-\frac{1}{4}$이므로 주어진 급수의 합은

$\dfrac{\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$이다.

〈문제 3〉

(1) 점 P_1의 좌표는 $\left(\sin\frac{\pi}{3}, 1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고, 이 점에서 원 C의 접선의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로

접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x-1$이다. 같은 방법으로 점 P_2에서의 접선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x-1$이다. 이제 곡선 $y=f(x)$의 방정식을 구하자. 이 곡선은 y축에 대칭인 두 점 P_1, P_2를 지나므로 $b=0$이다. 그리고 점 P_1에서의 기울기는 $2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$이므로 $a=1$이다. 마지막으로 이 곡선은 점 P_1을 지나므로 $\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+c$로부터 $c=-\frac{1}{4}$이다. 따라서 $f(x)=x^2-\frac{1}{4}$이다.

(2) 두 접선의 교점을 Q라 두면 구하는 영역의 넓이는 사각형 $\mathrm{AP_2QP_1}$의 넓이에서 부채꼴 $\mathrm{AP_2P_1}$의 넓이와 곡선 $y=f(x)$와 두 접선 사이의 넓이를 빼주면 된다. 사각형 $\mathrm{AP_2QP_1}$의 넓이는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이고 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$, 그리고 곡선과 두 접선 사이의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{x^2-\frac{1}{4}-(\sqrt{3}x-1)\right\}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$이다.

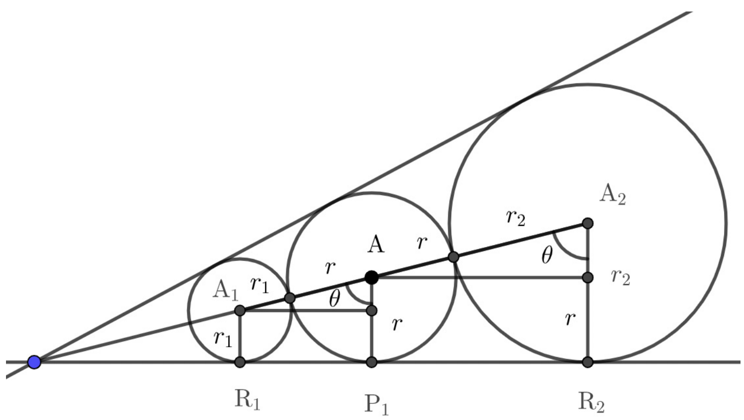
(다른 방법: 직선 $y=1-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$와 $y=f(x)$사이의 넓이

$2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{1}{2}-(x^2-\frac{1}{4})\right\}dx=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 부채꼴 $\mathrm{AP_2P_1}$의 넓이를 빼고 삼각형 $\mathrm{AP_2P_1}$의 넓이를 더해주면 된다. 부채꼴 $\mathrm{AP_2P_1}$의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$이고 삼각형의 넓이는 $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$이다.)

(3) 닮은 직각삼각형에 비례식을 적용하면 작은 원의 반지름은 $1:\sec\theta=r_1:(\sec\theta-1-r_1)$으로부터 $r_1=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$이다.

큰 원의 반지름은 $1:\sec\theta=r_2:(\sec\theta+1+r_2)$으로부터 $r_2=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$이다.

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2}=4$로부터 $3\cos^2\theta-10\cos\theta+3=(3\cos\theta-1)(\cos\theta-3)=0$이 성립하고 이로부터 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.



(다른 방법: $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{r}-\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}+\mathrm{r}_1} = \dfrac{\mathrm{r}_2-\mathrm{r}}{\mathrm{r}_2+\mathrm{r}}$이 성립하고 $\dfrac{r_2}{r_1}=4$이므로 이 식에 $r=1$과 $r_2=4r_1$을 대입하고 정리하면

$(1-r_1)(4r_1+1)=(r_1+1)(4r_1-1)$으로부터 $8r_1^2=2$가 되고 이로부터 $r_1=\dfrac{1}{2}$, $r_2=2$가 된다. 따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이다.)

〈문제 4〉

(1) 성신이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수는 2^4가지이고 수정이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수도 2^4가지이다. 이 두 사건은 독립이므로 전체 경우의 수는 2^8가지이다. 성신이와 수정이가 각각 거리 4 만큼 이동한 후 만나려면 만나는 점은 $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(4,0)$중 하나이다. $(0,4)$ 또는 $(4,0)$에서 만나는 경우의 수는 각각 1가지, $(1,3)$ 또는 $(3,1)$에서 만나는 경우의 수는 각각 ${}_4C_1\times{}_4C_3=16$가지, $(2,2)$에서 만나는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_4C_2=36$가지로 총 70가지이다. 따라서 만날 확률은 $\dfrac{70}{2^8}=\dfrac{35}{128}$이다.

(참고: ${}_nC_r$을 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$로 표현해도 된다.)

(2) 성신이와 수정이가 각각 거리 3 만큼 이동한 후 멈추었으므로 전체 경우의 수는 $2^3\times2^3=64$가지이다. 이때 두 점 P, Q사이의 거리는 2, 4, 6중 하나이다. 거리가 4인 경우는 성신이의 좌표와 수정이의 좌표 순서로 $(0,\ 3)-(3,\ 2)$, $(1,\ 2)-(4,\ 3)$, $(2,\ 1)-(1,\ 4)$, $(3,\ 0)-(2,\ 3)$등 총 4가지이고 각각의 경우의 수는 3, 3, 3, 3가지로 총 12가지이다. 거리가 6인 경우는 성신이의 좌표와 수정이의 좌표 순서로 $(0,3)-(4,1)$, $(3,0)-(1,4)$등 총 2가지이고 각각의 경우의 수는 1, 1로 총 2가지이다. 거리가 2인 경우는 성신이의 좌표와 수정이의 좌표 순서로 $(0,\ 3)-(1,\ 4)$, $(0,\ 3)-(2,\ 3)$, $(1,\ 2)-(1,\ 4)$, $(1,\ 2)-(2,\ 3)$, $(1,\ 2)-(3,\ 2)$, $(2,\ 1)-(2,\ 3)$, $(2,\ 1)-(3,\ 2)$, $(2,\ 1)-(4,\ 1)$, $(3,\ 0)-(3,\ 2)$, $(3,\ 0)-(4,\ 1)$ 등 총 10가지이고 각각의 경우의 수는 1, 3, 3, 9, 9, 9, 9, 3, 3, 1가지로 총 50가지이다. 거리가 2인 경우의 수는 여사건을 이용하여 $64-(2+12)=50$로 계산해도 된다.

따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{50}{64}$	$\dfrac{12}{64}$	$\dfrac{2}{64}$	1

(3) 기댓값(평균): $\mathrm{E}(X)=2\times\dfrac{50}{64}+4\times\dfrac{12}{64}+6\times\dfrac{2}{64}=\dfrac{160}{64}=\dfrac{5}{2}$

분산: $\mathrm{V}(X)=\left(2-\dfrac{5}{2}\right)^2\times\dfrac{50}{64}+\left(4-\dfrac{5}{2}\right)^2\times\dfrac{12}{64}+\left(6-\dfrac{5}{2}\right)^2\times\dfrac{2}{64}=\dfrac{1\times50+9\times12+49\times2}{256}=1$

(다른방법: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=\dfrac{4\times50+16\times12+36\times2}{64}-\dfrac{25}{4}=1$)

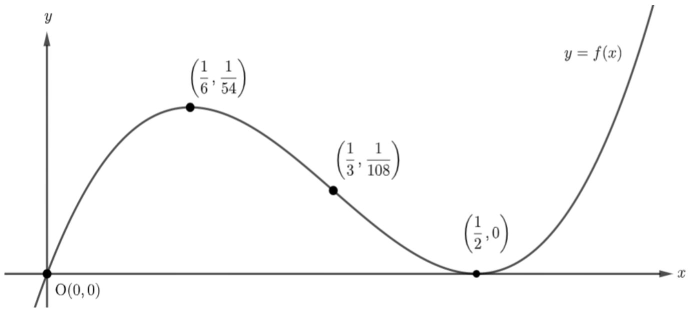
표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

3. 평가기준

※ 각 소문항마다 아래에 제시된 단계에 따라 1~6등급으로 채점한다. (단, 백지답안은 7등급)

채점 기준	배점
〈문제 1〉 (1) ① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-1$ 으로 변형할 수 있다. 이로부터 $f(x)$는 최고차항이 x^3인 다항함수가 되어, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓을 수 있다. (단, a,b,c는 상수) ② 조건 (가)의 극한값이 -1이므로, $f(x)$의 이차항의 계수가 -1이 되어 $a=-1$이다. ③ 조건 (나)를 통하여 $f(0)=0$이므로 $c=0$이고, ④ $f'(0)=\dfrac{1}{4}$이므로 $b=\dfrac{1}{4}$이 된다. 따라서, $f(x)=x^3-x^2+\dfrac{1}{4}x$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계까지 모두 서술했으나 계수가 1개 틀린 경우 3등급 : 삼차함수임을 알고, 계수가 2개 틀린 경우 4등급 : ③단계와 ④단계만 맞은 경우 (상수항과 일차항의 계수만 찾은 경우) 5등급 : ③단계만 맞은 경우 (상수항만 찾은 경우) 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지 답안	7
〈문제 1〉 (2) ① $f(x)=x^3-x^2+\dfrac{1}{4}x=x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ 이고, $f'(x)=3x^2-2x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(12x^2-8x+1)=\dfrac{1}{4}(2x-1)(6x-1)$이 된다. $f'(x)$의 그래프를 통해 $x=\dfrac{1}{6}$일 때 $f(x)$는 극댓값 $f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{54}$을 갖고, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 극솟값 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$을 갖는다. 따라서, 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{54}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$이다. ② 또한, $f''(x)=6x-2$이므로, $f''(x)$의 그래프를 통해 $x=\dfrac{1}{3}$에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{108}\right)$이다. ③ 따라서, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 그릴 수 있다.	8

채점 기준	배점



④ 변곡점의 좌표가 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이므로, 직접 계산을 통해 다음과 같이 보일 수 있다.

$$f\left(\frac{1}{3}-x\right)+f\left(\frac{1}{3}+x\right)=\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}-x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{36}x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}+x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x\right)$$
$$=\frac{1}{54}=2\cdot\frac{1}{108}=2f\left(\frac{1}{3}\right)$$

또는

$$f(a-x)+f(a+x)=\left((a-x)^3-(a-x)^2+\frac{1}{4}(a-x)\right)+\left((a+x)^3-(a+x)^2+\frac{1}{4}(a+x)\right)$$
$$=2a^3+6ax^2-2(a^2+x^2)+\frac{a}{2}$$
$$=2a^3-2a^2+\frac{a}{2}+(6a-2)x^2=2f(a)+(6a-2)x^2$$

이므로 $a=\frac{1}{3}$을 대입하면 된다.

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 서술했으나 계산 실수가 있는 경우
3등급 : ③단계까지 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우
4등급 : ②단계까지 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우
5등급 : ①단계만 서술했고 그 이후 과정이 없는 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

〈문제 1〉 (3)

① 〈문제 1〉 (2)로부터 $g(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{108}$임을 알 수 있다. 따라서, k의 값이 주어졌을 때,

$y=\left|f(x)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right|$의 그래프와 $y=k$의 그래프가 만나는 점의 개수를 구하면 된다. (배점: 10)

② (i) $k<0$: 이 경우에는 k의 값이 음수이므로 두 그래프는 만나지 않는다. 따라서, $p(k)=0$이다.

(ii) $k=0$: 이 경우에는 세 점에서 만나는 것을 확인할 수 있다. 따라서, $p(0)=3$이다.

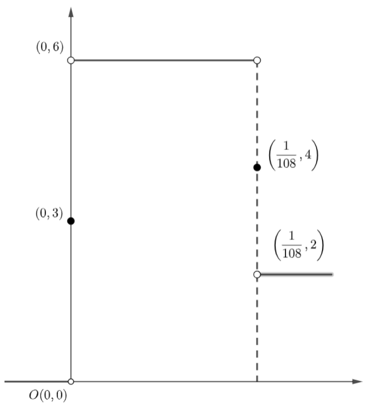
채점 기준	배점

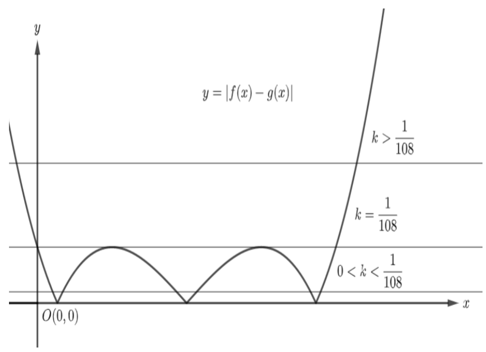
③ (iii) $0 < k < \dfrac{1}{108}$: 이 경우에는 6개의 점에서 만나므로, $p(k) = 6$이다.

④ (iv) $k = \dfrac{1}{108}$: 이 경우에는 4개의 점에서 만나므로 $p\left(\dfrac{1}{108}\right) = 4$이다.

(v) $k > \dfrac{1}{108}$: 이 경우에는 두 점에서 만나므로 $p(k) = 2$이다.

이를 통해 함수 $p(k)$는 $k = 0,\ \dfrac{1}{108}$에서 불연속임을 알 수 있다.





[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 서술했으나 함수 $p(k)$에서 오류가 1개만 있는 경우
3등급 : ②단계를 고려하지 않고, ①단계, ③단계 ,④단계를 서술한 경우
4등급 : ②단계만을 서술한 경우
5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

〈문제 2〉 (1)

① $2 - x = u$로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx = \int_1^0 g'(2-u)f(u)(-du) = \int_0^1 g'(2-u)f(u)du$$

② 따라서, $H(1)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(1) = \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_1^2 g'(x)f(2-x)dx$$
$$= \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_0^1 g'(2-u)f(u)du = \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx$$

③ 부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$H(1) = \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx = [f(x)g(2-x)]_0^1$$
$$= f(1)g(1) - f(0)g(2)$$

④ $f(1),\ g(1),\ f(0),\ g(2)$의 값을 이용하면 $H(1) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) = 11$이 된다.

배점: 5

<table>
<tr><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 서술했으나, ④단계에서 계산 실수가 있는 경우
3등급 : ③단계를 시도하여 $H(1)$을 $f(x)$와 $g(x)$의 함숫값들로 나타내었으나,
$f(1)g(1)-f(0)g(2)$가 나오지 않은 경우
4등급 : ②단계에서 $H(1)$을 구간 $[0,1]$에서의 적분 형태로 바꾸었으나 그 이후 과정이 없는 경우
5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

</td><td></td></tr>
<tr><td>

〈문제 2〉 (2)

① $2n-x=u$로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{n}^{2n} g'(x)f(2n-x)dx=\int_{n}^{0} g'(2n-u)f(u)(-du)=\int_{0}^{n} g'(2n-u)f(u)du$$

② 따라서, $H(n)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H(n)&=\int_{0}^{n} f'(x)g(2n-x)dx-\int_{n}^{2n} g'(x)f(2n-x)dx \\ &=\int_{0}^{n} f'(x)g(2n-x)dx-\int_{0}^{n} g'(2n-u)f(u)du \\ &=\int_{0}^{n} \{f'(x)g(2n-x)-f(x)g'(2n-x)\}dx \end{aligned}$$

③ 부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$\begin{aligned} H(n)&=\int_{0}^{n} \{f'(x)g(2n-x)-f(x)g'(2n-x)\}dx = [f(x)g(2n-x)]_{0}^{n} \\ &=f(n)g(n)-f(0)g(2n) \end{aligned}$$

④ $f(x)=a^x$이고, $g(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$이므로 $H(n)=a^n\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{2}$가 된다.

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 서술했으나, 계산 실수가 1-2개 있는 경우
3등급: ③단계를 시도하여 $H(n)$을 $f(x)$와 $g(x)$의 함숫값들로 나타내었으나,
$f(n)g(n)-f(0)g(2n)$가 나오지 않은 경우
4등급 : ②단계에서 $H(n)$을 구간 $[0,n]$에서의 적분 형태로 바꾸었으나 그 이후 과정이 없는 경우
5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

</td><td>10</td></tr>
<tr><td>

〈문제 2〉 (3)

〈문제 2〉 (2)에서 $H(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{2}$임을 알 수 있고,

$a_n=H(4n-3)+H(4n-1)$이라 하자.

</td><td>10</td></tr>
</table>

채점 기준	배점
① $a_n=H(4n-3)+H(4n-1)$ $=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3}\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}-\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1}\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}-\sin\frac{(4n-1)\pi}{2}$ 가 되는데, 삼각함수의 대칭성과 주기성에 의해 모든 자연수 n에 대해 $\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}+\sin\frac{(4n-1)\pi}{2}=0$이 성립하므로 ② $a_n=H(4n-3)+H(4n-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3}\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1}\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}$이다. ③ 이 때, a_{n+1}을 계산해보면, $a_{n+1}=H(4n+1)+H(4n+3)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}\sin\frac{(4n+1)\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+3}\sin\frac{(4n+3)\pi}{4}$ 이다. 한편, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$이므로 $\sin\frac{(4n+1)\pi}{4}=-\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}$이고, $\sin\frac{(4n+3)\pi}{4}=-\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}$이 성립한다. 따라서, $a_{n+1}=-\frac{1}{4}a_n$임을 알 수 있다. 혹은 $a_1=H(1)+H(3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $a_2=H(5)+H(7)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5\sin\frac{5\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{3}{16}$ 등 항을 직접 계산하여 수열 a_n이 공비가 $-\frac{1}{4}$인 등비수열임을 알 수 있다. ④ 따라서, 첫째항은 $\frac{3}{4}$이고 공비가 $-\frac{1}{4}$이므로 주어진 급수의 합은 $\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계까지 서술하였으나, ④단계에서 계산 실수가 있는 경우 3등급 : ③단계에서 a_n의 관계식을 직접 찾거나 혹은 규칙을 찾으려고 시도한 경우 4등급 : ②단계까지 계산한 경우 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지 답안	
〈문제 3〉 (1) ① 점 P_1의 좌표는 $\left(\sin\frac{\pi}{3}, 1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이 점에서 원의 접선의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x-1$이다.	8

채점 기준	배점
② 주어진 곡선은 y축에 대칭인 두 점 P_1, P_2를 지나므로 $b=0$이다. ③ 점 P_1에서의 기울기는 $2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$이므로 $a=1$이다. ④ 곡선은 점 P_1을 지나므로 $\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+c$로부터 $c=-\frac{1}{4}$이다. 따라서 $f(x)=x^2-\frac{1}{4}$이다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ④단계까지 서술하였으나 ②~④ 단계 또는 ①단계 계산에서 1개가 틀린 경우 3등급: 접선의 방정식을 제대로 구하고 곡선의 방정식에서 실수가 2개인 경우, 또는 곡선의 방정식을 제대로 구하고 접선을 구하지 못한 경우 4등급: ①을 옳게 계산하고 ②~④ 단계를 잘못된 방법으로 시도한 경우 5등급: ①을 옳게 계산한 경우 또는 ①을 시도하지 않고 ②~④ 단계에서 1개 맞은 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	
〈문제 3〉 (2) ① 두 접선의 교점을 Q라 두면 구하는 영역의 넓이는 사각형 $\mathrm{AP_2QP_1}$의 넓이에서 부채꼴 $\mathrm{AP_2P_1}$의 넓이와 $y=f(x)$와 두 접선 사이의 넓이를 빼주면 된다. ② 사각형 $\mathrm{AP_2QP_1}$의 넓이는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이고 ③ 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$, ④ 곡선과 두 접선 사이의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{x^2-\frac{1}{4}-(\sqrt{3}x-1)\right\}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 ⑤ 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$이다. **다른 방법:** ① 직선 $y=1-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$와 $y=f(x)$사이의 넓이에서 부채꼴 $\mathrm{AP_2P_1}$의 넓이를 빼고 삼각형 $\mathrm{AP_2P_1}$의 넓이를 더해주면 된다. ② 직선 $y=1-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$와 $y=f(x)$사이의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{1}{2}-(x^2-\frac{1}{4})\right\}dx=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$, ④ 삼각형의 넓이는 $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$	10

<table>
<tr><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>⑤ 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ①~⑤단계까지 서술하였으나 ②~⑤에서 계산 실수가 1개 있는 경우
3등급: ①을 옳게 서술하고 ②~④단계에서 2개의 계산이 맞은 경우
4등급: ①을 옳게 서술하고 ②~④단계에서 1개의 계산이 맞은 경우
5등급: ②~④단계에서 1개의 계산이 맞은 경우 또는 ①을 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안</td><td></td></tr>
<tr><td>〈문제 3〉 (3)
① 작은 원의 반지름은 $1 : \sec\theta = r_1 : (\sec\theta - 1 - r_1)$으로부터 $r_1 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
② 큰 원의 반지름은 $1 : \sec\theta = r_2 : (\sec\theta + 1 + r_2)$으로부터 $r_2 = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$
③ $\frac{r_2}{r_1} = \frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} = 4$로부터 $3\cos^2\theta - 10\cos\theta + 3 = (3\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$이 성립
④ $\cos\theta - 3 \neq 0$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{3}$이다.
(참고: $\cos\theta$에 대한 식이 아닌 $\sec\theta$에 대한 식으로 서술해도 됨. 그리고 ③ 단계에서 삼각함수의 성질을 이용하여 양의 제곱근을 구한 후 정리해도 됨)
다른 방법:
① 삼각비로부터 $\cos\theta = \frac{\mathrm{r} - \mathrm{r}_1}{\mathrm{r} + \mathrm{r}_1} = \frac{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}}{\mathrm{r}_2 + \mathrm{r}}$이 성립
② $\frac{r_2}{r_1} = 4$이므로 이 식에 $r = 1$과 $r_2 = 4r_1$을 대입하고 정리
③ $(1-r_1)(4r_1+1) = (r_1+1)(4r_1-1)$로부터 $8r_1^2 = 2$가 되고 이로부터 $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 2$
④ $\cos\theta = \frac{1}{3}$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 1개 있는 경우
3등급: ①~③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ①~②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: 비례식을 이용하여 원의 반지름 계산을 시도한 경우 또는 해당하는 원을 의미 있게 스케치한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안</td><td>7</td></tr>
</table>

채점 기준	배점
〈문제 4〉 (1) ① 성신이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수는 2^4가지이고 수정이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수도 2^4가지이다. 이 두 사건은 독립이므로 전체 경우의 수는 2^8가지이다. ② 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 진행해서 만나는 점은 $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(4,0)$중 하나이다. ③ $(0,4)$ 또는 $(4,0)$에서 만나는 경우의 수는 각각 1가지, $(1,3)$ 또는 $(3,1)$에서 만나는 경우의 수는 각각 ${}_4C_1 \times {}_4C_3 = 16$가지, $(2,2)$에서 만나는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$가지로 총 70가지이다. ④ 만날 확률은 $\dfrac{70}{2^8} = \dfrac{35}{128}$이다. (참고: ${}_nC_r$을 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$로 표현해도 된다.) [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ④단계까지 서술하였으나 ①~③단계를 맞고 답이 틀린 경우 3등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산에서 1~2개 맞은 경우 4등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산을 접근하지 못한 경우 5등급: ①을 옳게 계산한 경우 또는 ②를 옳게 서술한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	7
〈문제 4〉 (2) ① 성신이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 P는 $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$ 중 하나이고 수정이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 Q는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$ 중 하나이다. ② 가능한 P와 Q의 쌍은 16가지이고 P와 Q 사이의 거리는 2, 4, 6 중 하나이다. ③ $X=6$인 경우는 $(0,\ 3)-(4,\ 1)$, $(3,\ 0)-(1,\ 4)$ 등 2가지이고 이 경우의 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{64}$이다. $X=4$인 경우는 $(0,3)-(3,2)$, $(1,2)-(4,3)$, $(2,1)-(1,4)$, $(3,0)-(2,3)$ 등 4가지이고 이 경우의 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{12}{64}$이다. 나머지 10가지 경우는 모두 거리가 2이고, 이때의 확률은 전체 확률의 합이 1이므로 $1-\left(\frac{2}{64}+\frac{12}{64}\right) = \frac{50}{64}$이다. (거리가 6인 경우의 수 2가지, 거리가 4인 경우의 수 12가지, 거리가 2인 경우의 수 50가지를 계산해도 된다.)	10

채점 기준	배점
④ 따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.	

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{50}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$	1

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 1개 있는 경우
3등급: ①~②단계를 옳게 서술하고 ③단계의 계산을 1개 맞은 경우
4등급: ①~②단계를 옳게 서술한 경우
5등급: ① 또는 ② 중 하나를 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

〈문제 4〉 (3)

① 기댓값(평균): $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{50}{64}+4\times\frac{12}{64}+6\times\frac{2}{64}$

② $=\frac{160}{64}=\frac{5}{2}$

③ 분산: $\mathrm{V}(X)=\left(2-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{50}{64}+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{12}{64}+\left(6-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{2}{64}$

$=\frac{1\times50+9\times12+49\times2}{256}=1$

(다른방법: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=\frac{4\times50+16\times12+36\times2}{64}-\frac{25}{4}=1$)

④ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ③단계까지 맞은 경우 또는 ④단계까지 서술하였으나 답이 틀린 경우(표준편차를 직접 계산하고 제곱근 안에 분산에 대한 식이 있으면 ③-④단계식의 서술로 인정)
3등급: 기댓값을 옳게 계산하고 ③단계 분산의 식을 옳게 서술하였으나 계산 실수한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 계산한 경우
5등급: ①의 기댓값 계산 방법을 제대로 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

배점: 8

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

4. 예시답안

〈문제 1〉 (1)

조건 (가)를 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-1$ 으로 변형할 수 있다. 이로부터 $f(x)$는 최고차항이 x^3인 다항함수가 되어, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓을 수 있다. 조건 (가)의 극한값이 -1이므로, $f(x)$의 이차항의 계수가 -1이 되어 $a=-1$이다. 조건 (나)를 통하여 $f(0)=0$이므로 $b=0$이고, $f'(0)=\frac{1}{4}$이므로 $c=\frac{1}{4}$이 된다.

따라서, $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{4}x$이다.

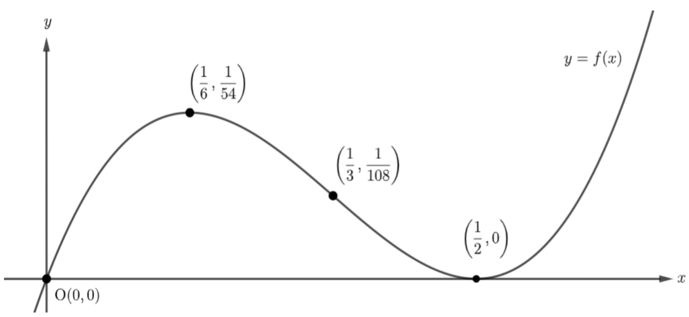
〈문제 1〉 (2)

$f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{4}x=x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 이고, $f'(x)=3x^2-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(12x^2-8x+1)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-1)$이 된다. $f'(x)$의 그래프를 통해 $x=\frac{1}{6}$일 때 $f(x)$는 극댓값 $f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{54}$을 갖고, $x=\frac{1}{2}$일 때 극솟값 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$을 갖는다.

따라서, 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{54}\right)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$이다.

또한, $f''(x)=6x-2$이므로, $f''(x)$의 그래프를 통해 $x=\frac{1}{3}$에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{108}\right)$이다.

따라서, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 그릴 수 있다.



변곡점의 좌표가 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{108}\right)$ 이므로, 직접 계산을 통해 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{3}-x\right)+f\left(\frac{1}{3}+x\right)&=\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\\
&=\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)\\
&=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}-x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{36}x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}+x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x\right)\\
&=\frac{1}{54}=2\cdot\frac{1}{108}=2f\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned}
f(a-x)+f(a+x)&=\left((a-x)^3-(a-x)^2+\frac{1}{4}(a-x)\right)+\left((a+x)^3-(a+x)^2+\frac{1}{4}(a+x)\right)\\
&=2a^3+6ax^2-2(a^2+x^2)+\frac{a}{2}=2a^3-2a^2+\frac{a}{2}+(6a-2)x^2=2f(a)+(6a-2)x^2
\end{aligned}$$

이므로 $a=\frac{1}{3}$을 대입하면 된다.

〈문제 1〉 (3)

위로부터 $g(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{108}$임을 알 수 있다. 따라서, k의 값이 주어졌을 때, $y=\left|f(x)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right|$의 그래프와 $y=k$의 그래프가 만나는 점의 개수를 구하면 된다.

(i) $k<0$: 이 경우에는 k의 값이 음수이므로 두 그래프는 만나지 않는다. 따라서, $p(k)=0$이다.

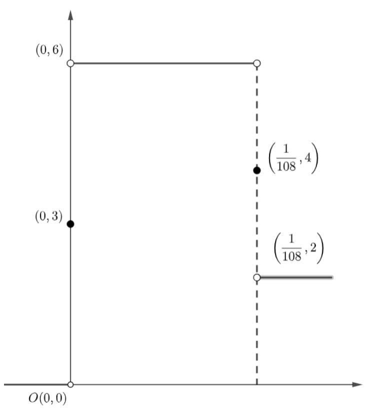
(ii) $k=0$: 이 경우에는 세 점에서 만나는 것을 확인할 수 있다. 따라서, $p(0)=3$이다.

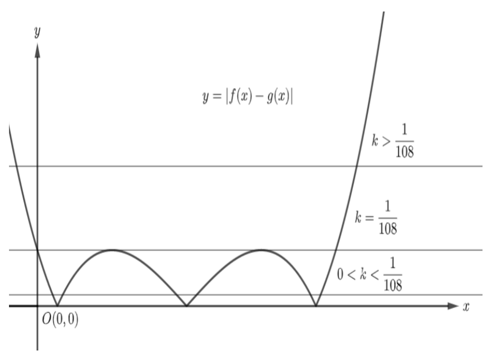
(iii) $0<k<\frac{1}{108}$: 이 경우에는 6개의 점에서 만나므로 $p(k)=6$이다.

(iv) $k=\frac{1}{108}$: 이 경우에는 4개의 점에서 만나므로 $p\left(\frac{1}{108}\right)=4$이다.

(v) $k>\frac{1}{108}$: 이 경우에는 두 점에서 만나므로 $p(k)=2$이다.

이를 통해 함수 $p(k)$는 $k=0,\ \frac{1}{108}$에서 불연속임을 알 수 있다.





〈문제 2〉 (1)

$2-x=u$로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx=\int_1^0 g'(2-u)f(u)(-du)=\int_0^1 g'(2-u)f(u)du$$

따라서, $H(1)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(1)=\int_0^1 f'(x)g(2-x)dx-\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx=\int_0^1 f'(x)g(2-x)dx-\int_0^1 g'(2-u)f(u)du$$
$$=\int_0^1 \{f'(x)g(2-x)-f(x)g'(2-x)\}dx$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$H(1)=\int_0^1 \{f'(x)g(2-x)-f(x)g'(2-x)\}dx=[f(x)g(2-x)]_0^1=f(1)g(1)-f(0)g(2)$이 되고,

$f(1),\ g(1),\ f(0),\ g(2)$의 값을 이용하면 $H(1)=2\cdot 5-1\cdot(-1)=11$이 된다.

〈문제 2〉 (2)

$2n-x=u$로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx = \int_n^0 g'(2n-u)f(u)(-du) = \int_0^n g'(2n-u)f(u)du$$

따라서, $H(n)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H(n) &= \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx = \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_0^n g'(2n-u)f(u)du \\ &= \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$H(n) = \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx = [f(x)g(2n-x)]_0^n = f(n)g(n) - f(0)g(2n)$$

$f(x)=a^x$이고, $g(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$이므로 $H(n)=a^n\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{2}$가 된다.

〈문제 2〉 (3)

〈문제 2〉 (2)에서 $H(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{2}$임을 알 수 있고, $a_n=H(4n-3)+H(4n-1)$이라 하자.

$$\begin{aligned} a_n &= H(4n-3)+H(4n-1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3}\sin\frac{(4n-3)\pi}{4} - \sin\frac{(4n-3)\pi}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1}\sin\frac{(4n-1)\pi}{4} - \sin\frac{(4n-1)\pi}{2} \end{aligned}$$

인데, 삼각함수의 대칭성과 주기성에 의해 모든 자연수 n에 대해

$\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}+\sin\frac{(4n-1)\pi}{2}=0$이 성립하므로

$a_n=H(4n-3)+H(4n-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3}\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1}\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}$이다.

이 때, a_{n+1}을 계산해보면,

$a_{n+1}=H(4n+1)+H(4n+3)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}\sin\frac{(4n+1)\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+3}\sin\frac{(4n+3)\pi}{4}$이다.

한편, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$이므로

$\sin\frac{(4n+1)\pi}{4}=-\sin\frac{(4n-3)\pi}{4}$이고, $\sin\frac{(4n+3)\pi}{4}=-\sin\frac{(4n-1)\pi}{4}$이 성립한다.

따라서, $a_{n+1}=-\frac{1}{4}a_n$임을 알 수 있다.

첫째항은 $a_1=H(1)+H(3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이고 공비가 $-\frac{1}{4}$이므로 주어진 급수의 합은

$\dfrac{\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$이다.

〈문제 3〉 (1)

점 P_1의 좌표는 $\left(\sin\frac{\pi}{3}, 1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고, 이 점에서 원의 접선의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x-1$이다. 같은 방법으로 점 P_2에서의 접선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x-1$이다. 이제 곡선의 방정식을 구하자. 이 곡선은 y축에 대칭인 두 점 P_1, P_2를 지나므로 $b=0$이다. 그리고 점 P_1에서의 기울기는 $2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$이므로 $a=1$이다. 마지막으로 이 곡선은 점 P_1을 지나므로 $\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+c$로부터 $c=-\frac{1}{4}$이다. 따라서 $f(x)=x^2-\frac{1}{4}$이다.

〈문제 3〉 (2)

두 접선의 교점을 Q라 두면 구하는 영역의 넓이는 사각형 AP_2QP_1의 넓이에서 부채꼴 AP_2P_1의 넓이와 (1)에서 구한 곡선과 두 접선 사이의 넓이를 빼주면 된다. 사각형 AP_2QP_1의 넓이는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이고 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$, 그리고 곡선과 두 접선 사이의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{x^2-\frac{1}{4}-(\sqrt{3}x-1)\right\}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$이다.

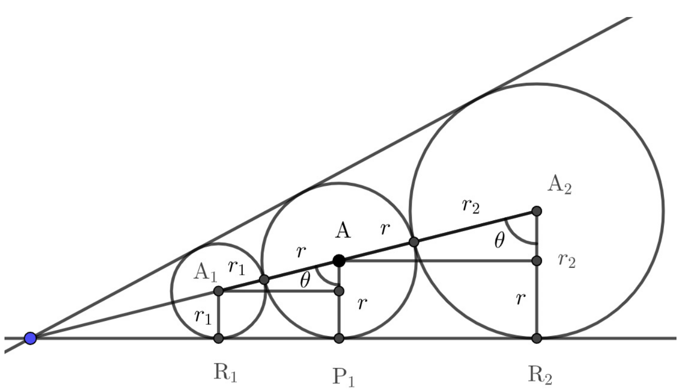
(다른 방법: 직선 $y=1-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$와 $y=f(x)$사이의 넓이 $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{1}{2}-(x^2-\frac{1}{4})\right\}dx=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 부채꼴 AP_2P_1의 넓이를 빼고 삼각형 AP_2P_1의 넓이를 더해주면 된다. 부채꼴 AP_2P_1의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$이고 삼각형의 넓이는 $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$이다.)

〈문제 3〉 (3)

닮은 직각삼각형에 비례식을 적용하면 작은 원의 반지름은 $1:\sec\theta=r_1:(\sec\theta-1-r_1)$으로부터 $r_1=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$이다.

큰 원의 반지름은 $r_1\sec\theta=\mathrm{r}\sec\theta-\mathrm{r}-\mathrm{r}_1$으로부터 $r_2=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$이다.

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2}=4$로부터 $3\cos^2\theta-10\cos\theta+3=(3\cos\theta-1)(\cos\theta-3)=0$이 성립하고 이로부터 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.



(다른 방법: $\cos\theta = \frac{\mathrm{r}-\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}+\mathrm{r}_1} = \frac{\mathrm{r}_2-\mathrm{r}}{\mathrm{r}_2+\mathrm{r}}$이 성립하고 $\frac{r_2}{r_1} = 4$이므로 이 식에 $r=1$과 $r_2 = 4r_1$을 대입하고 정리하면

$(1-r_1)(4r_1+1) = (r_1+1)(4r_1-1)$으로부터 $8r_1^2 = 2$가 되고 이로부터 $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 2$가 된다. 따라서 $\cos\theta = \frac{1}{3}$이다.)

〈문제 4〉 (1)

동시에 출발하여 같은 속력으로 이동하는 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 이동한 후 만난다면 만나는 점은

$(4,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(0,\ 4)$중 하나이다. 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수는 각각 2^4이므로 총 2^8가지이고 이 중 두 사람이 만날 경우의 수는

${}_4C_4 \cdot {}_4C_0 + {}_4C_3 \cdot {}_4C_1 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_2 + {}_4C_1 \cdot {}_4C_3 + {}_4C_0 \cdot {}_4C_4 = 1+16+36+16+1 = 70$ 이므로 확률은

$\frac{35}{128}$이다

〈문제 4〉 (2)

성신이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 P는 $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$ 중 하나이고 수정이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 Q는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$ 중 하나이다. 가능한 P와 Q의 쌍은 16가지이고 P와 Q 사이의 거리는 $2,\ 4,\ 6$ 중 하나이다. $X=6$인 경우는 $(0,\ 3)-(4,\ 1)$, $(3,\ 0)-(1,\ 4)$ 등 2가지이고 이 경우의 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{64}$이다. $X=4$인 경우는

$(0,3)-(3,2)$, $(1,2)-(4,3)$, $(2,1)-(1,4)$, $(3,0)-(2,3)$ 등 4가지이고 이 경우의 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{12}{64}$이다.

나머지 10가지 경우는 모두 거리가 2이고, 이때의 확률은 전체 확률의 합이 1이므로 $1-\left(\frac{2}{64}+\frac{12}{64}\right) = \frac{50}{64}$이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{50}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$	1

〈문제 4〉 (3)

기댓값(평균): $\mathrm{E}(X) = 2\times\frac{50}{64} + 4\times\frac{12}{64} + 6\times\frac{2}{64} = \frac{160}{64} = \frac{5}{2}$

분산: $\mathrm{V}(X) = \left(2-\frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{50}{64} + \left(4-\frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{12}{64} + \left(6-\frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{2}{64} = \frac{1\times50+9\times12+49\times2}{256} = 1$

(또는 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{4\times50+16\times12+36\times2}{64} - \frac{25}{4} = 1$)

표준편차: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = 1$