2. 출제개요

가. 출제의도 및 문제 해설

1) 출제의 방향

우리대학의 자연계 논술 시험은 예년과 마찬가지로 수험생의 학업 부담을 경감시키고자 수학 문제로만 구성하여, 고등학교 수학의 기초 원리를 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 한다. 출제범위는 고등학교 공통 수학, 수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ, 미적분, 확률과 통계로 한정한다. 고등학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있는 수리적 문제상황을 제시하고, 논리적인 사고를 따르면 쉽게 해결할 수 있는 세부 문제로 구성하였다. 개별적인 교과지식의 반복학습과 암기를 통해 습득된 지식을 묻는 것을 지양하고, 수학적 원리에 대한 확실하고 통합적인 이해를 바탕으로 문제를 분석하여 해결하며 그 과정과 결과를 논리적으로 명확하게 기술할 수 있는지를 평가한다. 그리고 평가의 객관성을 위해 채점의 기준을 최대한 객관화할 수 있도록 출제하였다.

2) 문항별 출제의도

[문제 1] 공통 과목인 ‘수학’에서 배운 이차함수의 그래프를 바탕으로 최대, 최소를 이해하고, 절댓값이 포함된 일차부등식을 다룰 수 있으며, 수학 Ⅰ의 수열의 합을 통합적으로 활용하는 문제해결 능력을 평가하고자 한다. 주어진 문제를 정확히 이해하고 수학적으로 가능한 모든 경우를 분석하여 종합하여 해결할 수 있는지 평가하고자 한다. 또한, 문제를 해결하는 단계를 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 명확하게 서술할 수 있는지도 평가하고자 한다.

[문제 2] 공통 과목인 ‘수학’에서 배운 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 그래프에 대한 이해를 바탕으로 접선의 기울기와 미분의 관계를 이해하고, 구간 $[a,b]$ 에서 평균값 정리를 만족하는 점 c를 찾을 수 있는지 확인한다. 수학 Ⅱ에서 다룬 함수의 극한과 접선의 방정식, 평균값 정리를 통합적으로 활용하는 문제해결 능력을 평가한다. 그리고 미적분에서 다룬 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 근사적인 사다리꼴의 넓이와 비교할 수 있는 분석능력을 살펴본다. 또한, 문제를 해결하는 단계를 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 명확하게 서술할 수 있는지도 평가하고자 한다.

[문제 3] 수학 Ⅰ에서 다루는 삼각함수의 활용과 미적분의 등비급수의 극한에 대한 활용 능력을 평가하고자 한다. 문제의 상황을 분석하고 이해하는 능력, 사인법칙과 삼각비를 활용한 선분의 길이 계산과 삼각형의 면적 계산, 그리고 주어진 상황을 적절하게 해석하여 규칙성을 찾고 식을 세우는 능력, 이를 활용한 급수의 합 도출 능력 등을 종합적으로 평가한다.

[문제 4] 수학에서 가장 기본이 되는 논리적인 사고력과 경우의 수, 이항정리, 수열의 일반항 및 수열의 합 도출 능력 등을 복합적으로 확인하기 위하여 출제하였다. (1)번 문제를 해결하려면 경우의 수에서 합의 법칙을 적절히 활용하고, 이항정리를 이용하면 된다. (2)번 문제는 주어진 도로망에 주어진 크기의 정사각형이 몇 개나 있는지를 세는 문제이다. 수학적 사고를 통해 규칙성을 도출할 수 있는지를 측정한다. (3)번은 (2)번의 해결을 통해 얻어진 규칙성을 이용해 수열을 정의하고 이 수열의 합을 구체적으로 구할 수 있는지의 여부를 확인한다.

나. 출제 근거

1) 교육과정 근거

문제 1	교육과정	[수학]-문자와 식-$\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 [수학 Ⅰ]-수열-$\boxed{2}$ 수열의 합
	성취기준 /영역별 내용	[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 2	교육과정	[수학]-함수-$\boxed{2}$ 유리함수와 무리함수 [수학 Ⅱ]-함수의 극한과 연속-$\boxed{1}$ 함수의 극한 미분-$\boxed{3}$ 도함수의 활용 [미적분]-미분법-$\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [미적분]-적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용
	성취기준 /영역별 내용	[10수학04-05] 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 3	교육과정	[수학 Ⅰ]-(2) 삼각함수-$\boxed{1}$ 삼각함수 (3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [미적분]-(1) 수열의 극한 -$\boxed{2}$ 급수
	성취기준 /영역별 내용	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
문제 4	교육과정	[수학]-(5) 확률과 통계 -$\boxed{1}$ 경우의 수 [수학]-(5) 확률과 통계 -$\boxed{2}$ 순열과 조합 [확률과 통계]-(1) 경우의 수-$\boxed{2}$ 이항정리 [수학 Ⅰ]-(3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합
	성취기준 /영역별 내용	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. [12수학Ⅰ 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	
문제 1	[수학] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, 64쪽, 81쪽 [수학 Ⅰ] 비상교육, 김원경 외 14인, 2018년, 139쪽, 142쪽
문제 2	[수학] 동아출판, 박교식 외 19인, 2018년, 238쪽 [수학 Ⅱ] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2018년, 12쪽 57쪽, 73쪽, 78쪽 [미적분] 천재교과서, 류희찬 외 9인, 2019년, 115쪽, 157쪽, 183쪽
문제 3	[수학 Ⅰ] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2018년, 97쪽, 134쪽 [미적분] 좋은책 신사고, 고성은 외 5인, 2019년, 32쪽
문제 4	[수학] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2018년, 261쪽, 263쪽, 271쪽 [수학 Ⅰ] 미래엔, 황선욱 외 8인, 2018년, 146쪽 [확률과 통계] 금성출판사, 배종숙 외 6인, 2019년, 31쪽, 35쪽

3. 평가기준

가. 배점기준표

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	5	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	12	
문제1(3)	8	
문제2(1)	8	
문제2(2)	7	
문제2(3)	10	
문제3(1)	7	
문제3(2)	8	
문제3(3)	10	
문제4(1)	8	
문제4(2)	5	
문제4(3)	12	

나. 채점기준

* 각 문제에 대하여 아래에 제시된 예시답안과 같이 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. 이후 등급을 해당 문제의 점수로 환산하여 총점을 계산한다.
* 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1등급을 감점한다.
* 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1등급을 감점한다.
* 백지답안은 7등급을 부여한다.

〈문제 1〉 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① $y=f(x)=(x-a)^2-a^2+2a$ 의 그래프의 대칭축은 $x=a$ 이고

② $f(1)=1$ 이다.

③ $a \le 1$ 일 때, 구간 $1 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 는 증가함수이고

④ $f(2)>f(1)=1$ 이므로, $M(a)=|f(2)|=f(2)=4-2a$ 이다.

〈문제 1〉 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 12점]

① $1<a\le\frac{3}{2}$ 인 경우: 구간 $1\le x\le 2$ 에서

$f(1)=1,\ f(a)=-a^2+2a=a(2-a)>0,$

$f(2)=4-2a\ge 4-2\cdot\frac{3}{2}=1$ 이므로

$M(a)=|f(2)|=f(2)=4-2a$ 이다.

② $\frac{3}{2}<a\le 2$ 인 경우: 구간 $1\le x\le 2$ 에서

$f(1)=1,\ f(a)=-a^2+2a=a(2-a)>0,$

$f(2)=4-2a\le 4-2\cdot\frac{3}{2}=1$ 이므로

$M(a)=|f(1)|=1$ 이다.

③ $2<a\le\frac{5}{2}$ 인 경우: 구간 $1\le x\le 2$ 에서

$f(x)$ 는 감소함수이고 $f(1)=1$ 이다.

그리고 $f(2)=4-2a$ 에 대하여 $-1\le f(2)<0$ 이다.

따라서 $M(a)=|f(1)|=1$ 이다.

④ $\frac{5}{2} < a$ 인 경우: 구간 $1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 는 감소함수이고 $f(1) = 1$이다.
그리고 $f(2) = 4 - 2a$ 에 대하여 $f(2) < -1$ 이다.
따라서 $M(a) = |f(2)| = -f(2) = 2a - 4$ 이다.

〈문제 1〉 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 8점]

① $\sum_{k=1}^{8} M(k-7) = \sum_{k=1}^{8} (18 - 2k)$

② $k = 9$ 이면 $M(k-7) = M(2) = 1$

③ $\sum_{k=10}^{n} M(k-7) = \sum_{k=10}^{n} (2k - 18)$

④
$$\sum_{k=1}^{n} M(k-7) = \left(\sum_{k=1}^{8} (18 - 2k)\right) + 1 + \left(\sum_{k=10}^{n} (2k - 18)\right)$$
$$= 1 + 18 \cdot 8 - 18(n-9) - 2\sum_{k=1}^{8} k + 2\sum_{k=10}^{n} k$$
$$= 1 + 18 \cdot 8 - 18(n-9) - 2\sum_{k=1}^{8} k + 2\left(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{9} k\right)$$
$$= 1 + 18 \cdot 8 - 18(n-9) - 2 \cdot 9 - 4\sum_{k=1}^{8} k + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

⑤ 그러므로
$$\sum_{k=1}^{n} M(k-7) = 1 + 18(8+9-1) - 18n - 4 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= n^2 - 17n + 145$$

〈문제 2〉 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 8점]

① 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 이고,

② $x = c$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ 이다.

③ 따라서 $b - a = h$ 라 하면
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$ 이다.

④ $\sqrt{c} = \frac{h}{2(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})} = \frac{1}{2}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})$ 이므로

양변을 제곱하면 $c = \frac{1}{4}(2a + h + 2\sqrt{a^2 + ah})$ 이다.

〈문제 2〉 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 7점]

① $c - a = \frac{1}{4}(-2a + h + 2\sqrt{a^2 + ah})$ 이므로

② $$\lim_{b \to a} \frac{c - a}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sqrt{a^2 + ah} - (2a - h)}{4h}$$

③ $$= \lim_{h \to 0} \frac{4(a^2 + ah) - (2a - h)^2}{4h(2\sqrt{a^2 + ah} + (2a - h))}$$

④ $$= \lim_{h \to 0} \frac{8a - h}{4(2\sqrt{a^2 + ah} + (2a - h))} = \frac{1}{2}$$

〈문제 2〉 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $c = \frac{1}{4}(2a + 3a + 2\sqrt{a^2 + 3a^2}) = \frac{1}{4}(5a + 4a) = \frac{9}{4}a$

② $S = \int_a^{4a} \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_a^{4a} = \frac{2}{3}(8-1)a\sqrt{a} = \frac{14}{3}a\sqrt{a}$

③ $S_1 = \frac{f(a)+f(c)}{2} \cdot (c-a) = \frac{\sqrt{a} + \frac{3}{2}\sqrt{a}}{2} \cdot \left(\frac{9}{4}a - a\right)$

$= \frac{5}{4}\sqrt{a} \cdot \frac{5}{4}a = \frac{25}{16}a\sqrt{a}$

④ $S_2 = \frac{f(c)+f(b)}{2} \cdot (b-c) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{a} + 2\sqrt{a}}{2} \cdot \left(4a - \frac{9}{4}a\right)$

$= \frac{7}{4}\sqrt{a} \cdot \frac{7}{4}a = \frac{49}{16}a\sqrt{a}$

$\therefore\ S_1 + S_2 = \left(\frac{25}{16} + \frac{49}{16}\right)a\sqrt{a} = \frac{74}{16}a\sqrt{a}$

⑤ 따라서 $S : (S_1 + S_2) = \frac{14}{3} : \frac{74}{16} = 224 : 222$ 또는 $112 : 111$ 이다.

〈문제 3〉 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 7점]

① 반지름이 1인 원의 중심을 O라 하면 삼각형 OA_0B_0는 정삼각형이므로 선분 A_0B_0의 길이는 1이다

② 삼각형 $A_0C_0D_0$는 A_0D_0가 주어진 원의 지름이므로 각 $A_0C_0D_0$가 직각이고

③ 빗변 A_0D_0의 길이가 2, 선분 C_0D_0의 길이는 1인 직각삼각형이다.

④ 따라서 피타고라스 정리에 의하여 선분 A_0C_0의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

⑤ 삼각형 $A_0C_0E_0$는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 정삼각형이므로 면적은 $\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

〈문제 3〉 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 8점]

① 정육각형 $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$의 한 변의 길이는 1이다.

② 정육각형 $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$에는 한 변의 길이가 1인 합동인 정삼각형이 6개 있으므로 이의 면적은

$6 \times \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

③ 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

④ 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 면적은 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

⑤ 따라서 면적의 차는 $\sqrt{3}$ 이다.

〈문제 3〉 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $\overline{A_1B_1} = \frac{1}{3}\overline{A_0C_0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 $\overline{A_0A_1} = \frac{2}{3}\overline{A_0C_0} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

② 이런 작업을 반복하면 $\overline{A_kC_k} = \sqrt{3} \times \overline{A_kB_k}$, $\overline{A_kB_k} = \frac{1}{3}\overline{A_{k-1}C_{k-1}}$, $\overline{A_kA_{k+1}} = \frac{2}{3}\overline{A_kC_k}$ 로부터

③ $\overline{A_kA_{k+1}} = \frac{2}{3}\overline{A_kC_k} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\overline{A_kB_k} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\overline{A_{k-1}C_{k-1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{A_{k-1}A_k}$

이므로 $\overline{A_kA_{k+1}} = 2\frac{1}{\sqrt{3}^{k+1}}, (k \geq 0)$ 이다.

④ 따라서

$$\sum_{k=0}^{n}\overline{A_kA_{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\sqrt{3}^{k+1}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)}{\sqrt{3}-1}$$

이고

⑤ 이로부터 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\overline{A_kA_{k+1}}=\sqrt{3}+1$ 이다.

〈문제 4〉(1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 8점]

① A에서 C로 가는 경로는 $(0,n),(1,n-1),\cdots,(n-1,1),(n,0)$중 한 점을 반드시 지나고 꼭 한번 지난다.

② $0\le k\le n$을 만족하는 정수 k에 대해 A에서 출발하여 점 $(k,n-k)$를 지나서 C로 가는 최단 경로의 수는 ${}_nC_k$이므로

③ 구하는 최단 경로의 수는 합의 법칙에 의하여 $\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k$이고

④ 이항정리 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^k$를 사용하여

⑤ 이 값을 계산하면 2^n이다.

〈문제 4〉(2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① $a_1=(1+2+3+4+5)+1=16$

② $a_2=(1+2+3)+1=7$

③ $a_3=1+1=2$

④ $a_4=1$

⑤ $a_5=1$

⑥ $a_6=1$

〈문제 4〉(3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~7등급으로 채점한다. [배점: 12점]

① n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각하자.

② 경우 1. n이 짝수인 경우 $n=2m$이라 두자.
그러면 $1\le k\le m$인 자연수 k에 대해

$a_k=(1+2+\cdots+(n-2k+1)))+1=\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}+1$ 이고 $m+1\le k\le n$인 자연수 k에 대해 $a_k=1$이다.

③ 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{(2k-1)(2k)}{2}+n=\frac{m(m+1)(4m-1)}{6}+n=\frac{n(n+2)(2n-1)}{24}+n$$

④ 경우 2. n이 홀수인 경우 $n=2m+1$이라 두자.
그러면 $1\le k\le m$인 자연수 k에 대해

$a_k=(1+2+\cdots+(n-2k+2))+1=\frac{(n-2k+2)(n-2k+3)}{2}+1$ 이고

$m+1\le k\le n$인 자연수 k에 대해 $a_k=1$이다.

⑤ 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{(2k)(2k+1)}{2}+n=\frac{m(m+1)(2m+1)}{3}+\frac{m(m+1)}{2}+n=\frac{m(m+1)(4m+5)}{6}+n$$

이고 이를 정리하면 $\frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}+n$이다.