2. 출제개요

가. 출제의도

〈문제 1〉

직각삼각형에서의 삼각비의 개념을 바탕으로 직각삼각형의 넓이, 원의 넓이와 둘레의 길이에 대한 수열의 일반항을 나타낼 수 있고, 미적분에서 다루는 삼각함수의 극한에 대한 성질을 통합적으로 활용하는 문제해결능력을 평가하고자 한다. 주어진 문제를 정확히 이해하고 필요한 성질을 적용하여 문제를 해결하는 단계를 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 명확하게 서술할 수 있는지도 평가하고자 한다.

〈문제 2〉

미적분에서 다루는 삼각함수의 미분과 적분을 이해하며, 수학Ⅱ에서 다루는 연속함수의 정적분의 기하학적 의미, 또는 함수의 증감에 관한 성질을 파악하여 함수를 정할 수 있고, 적분과 미분과의 관계를 이용하는 통합적 문제해결 능력을 평가하고자 한다. 문제의 상황을 정확히 이해하고 주어진 조건을 종합하여 추론할 수 있는지, 또 문제를 해결하는 단계를 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 명확하게 서술할 수 있는지도 평가하고자 한다.

〈문제 3〉

호도법과 삼각함수와의 관계를 이용하여 주어진 길이에 대응하는 원의 중심각, 주어진 원에 내접하는 삼각형의 한 변의 길이, 주어진 중심각에 대응하는 현의 길이, 그리고 주어진 도형을 계산 가능한 도형으로 분할하여 제시된 도형의 넓이를 구하는 문제풀이 능력 등을 복합적으로 측정한다.

〈문제 4〉

평면에 제시된 도형을 구하고 이 도형에 놓여 있는 각 좌표가 정수인 점의 개수를 집합, 경우의 수, 수열의 합 등을 적절하게 활용하여 구하는 능력을 측정한다. 주어진 문제를 해결하기 위한 방법을 고안하고, 경우를 잘 나누어서 원하는 답을 구체적으로 계산할 수 있는 능력을 측정하기 위해 출제하였다.

나. 출제근거

〈문제 1〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[미적분]-수열의 극한-① 수열의 극한 [미적분]-미분법-① 여러 가지 함수의 미분
성취기준 / 영역별 내용	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
미적분	황선욱 외	미래엔	2019	11, 72	교과서	

〈문제 2〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학Ⅱ]-미분-3 도함수의 활용 [수학Ⅱ]-적분-2 정적분 [수학Ⅱ]-적분-3 정적분의 활용 [미적분]-미분법-1 여러 가지 함수의 미분 [미적분]-적분법-1 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 Ⅱ	박교식 외	동아출판	2018	79, 124, 140	교과서	
미적분	황선욱 외	미래엔	2019	76, 166	교과서	

〈문제 3〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학]-기하 - 3 원의 방정식 [수학 Ⅰ]-해석 - 1 삼각함수
성취기준 / 영역별 내용	[10수학 02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	황선욱 외	미래엔	2017	144-148	교과서	
수학 Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2018	73, 78	교과서	

〈문제 4〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학]-수와 연산-[1] 집합 [수학]-확률과 통계-[1] 경우의 수 [수학 I]-수열-[2] 수열의 합
성취기준 / 영역별 내용	[10수학 03-03] 집합의 연산을 할 수 있다. [10수학 05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	황선욱 외	미래엔	2018	175, 261	교과서	
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2017	140	교과서	

다. 문항 해설

〈문제 1〉

(1) 중심이 점 O이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정n각형에서 이웃한 두 꼭짓점을 각각 P_n, Q_n이라고 할 때, 중심 O 주위의 중심각 2π를 n등분하여 $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n = \frac{2\pi}{n}$이므로,

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n = \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$이고, $\overline{\mathrm{OP}_n}=1$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n} = \sin\frac{\pi}{n}$, $\overline{\mathrm{OR}_n} = \cos\frac{\pi}{n}$이다.

따라서 직각삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{R}_n$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\cos\frac{\pi}{n}$ 이다.

(2) 정n각형에 내접하는 원 O_n의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OR}_n} = \cos\frac{\pi}{n}$이므로, 원 O_n의 넓이는

$a_n = \pi\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2$이고, 둘레의 길이는 $b_n = 2\pi\cos\frac{\pi}{n}$이다.

따라서 $b_6 - 2a_6 = 2\pi\cos\frac{\pi}{6} - 2\pi\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 = \pi\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.

[다른 방법 풀이]

정육각형에 내접하는 원 O_6의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OR}_6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로, 원 O_6의 넓이는

$a_6 = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4}$ 이고, 둘레의 길이는 $b_6 = 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $b_6 - 2a_6 = \pi\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.

(3) $n^2(b_n-2a_n) = n^2\left(2\pi\cos\frac{\pi}{n} - 2\pi\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\right) = 2\pi^3 \times \cos\frac{\pi}{n} \times \frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}$ 이고,

$x = \frac{\pi}{n}$ 로 두면

$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n} = 1$ 이고,

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ 인데,

여기에서 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} n^2(b_n-2a_n) = 2\pi^3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \pi^3$ 이다.

〈문제 2〉

(1) 구간 $[1,2]$에서 연속인 함수 $g(x) = 4-\cos\pi x - f(x)$에 대하여 조건 (가)에 의하여 $g(x) \geq 0$ 이므로

$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ 로 두면

$1 \leq a < b \leq 2$ 일 때 $G(b) - G(a) = \int_a^b g(t)\,dt \geq 0$, 즉 $G(a) \leq G(b)$ 가 성립한다.

그런데 조건 (다)에 의하여

$G(1) = \int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 (4-\cos\pi t - f(t))\,dt = \left[4t - \frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1 - F(1) = 4-2 = 2$

$G(2) = \int_0^2 g(t)\,dt = \int_0^2 (4-\cos\pi t - f(t))\,dt = \left[4t - \frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^2 - F(2) = 8-6 = 2,$

즉 $G(1) = 2 = G(2)$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 x에 대하여 $G(x) = 2$ 인 상수함수이다.

따라서 $1 < x < 2$ 인 모든 x에 대하여 $0 = G'(x) = g(x) = 4-\cos\pi x - f(x)$ 이고, $f(x) = 4-\cos\pi x$ 이다. 그러므로 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$ 이다.

(2) 조건 (나)에 의하여 구간 $[0,1]$에서 $f(x) = a\sin\pi x + b\cos\pi x$ 이므로 $f(1) = b\cos\pi = -b$ 이며,

구간 $[1,2]$에서 $f(x) = 4-\cos\pi x$ 이므로 $f(1) = 4-\cos\pi = 4-(-1) = 5$ 이다.

이때 f가 $x=1$ 에서 연속이므로 $b = -5$ 이다. 그리고 조건 (다)에 의하여

$2 = F(1) = \int_0^1 (a\sin\pi t - 5\cos\pi t)\,dt = \left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi t - \frac{5}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1 = \frac{2a}{\pi}$ 이므로

$a = \pi$ 이다.

[다른 방법 풀이]

조건 (다)에 의하여 $2 = F(1) = \int_0^1 (a\sin\pi t + b\cos\pi t)\,dt = \left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi t + \frac{b}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1 = \frac{2a}{\pi}$ 이므로
$a = \pi$ 이다. 그리고 조건 (나)에 의하여 구간 $[0,1]$에서 $f(x) = \pi\sin\pi x + b\cos\pi x$ 이므로
$f(1) = b\cos\pi = -b$ 이며, 구간 $[1,2]$에서 $f(x) = 4 - \cos\pi x$ 이므로
$f(1) = 4 - \cos\pi = 4 - (-1) = 5$ 이다.
이때 f가 $x = 1$에서 연속이므로 $b = -5$ 이다.

(3) 정의 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 에 따라

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\pi\sin\pi t - 5\cos\pi t)\,dt = \left[-\cos\pi t - \frac{5}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{\pi} + 1 \text{ 이고,}$$

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\frac{3}{2}} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (4 - \cos\pi t)\,dt$$

$$= F(1) + \left[4t - \frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_1^{\frac{3}{2}} = 2 + 2 + \frac{1}{\pi} = 4 + \frac{1}{\pi} \text{ 이므로}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{4}{\pi} \text{ 이다.}$$

〈문제 3〉

(1) 반지름의 길이가 2π인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 한 변의 길이는
$\overline{\mathrm{AB}} = 2\times 2\pi \times \sin\frac{\pi}{3} = 2\times 2\pi\times\cos\frac{\pi}{6} = 2\pi\sqrt{3}$ 이다.
직선 AB가 점 $\mathrm{P_0}$에서 원 C_1에 접하므로 직선 AB와 직선 $\mathrm{O_1P_0}$는 서로 수직이고 직선 BC와 x축은 서로 평행하므로 각 $\mathrm{P_0O_1O_0}$의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. 그러므로 각 $\mathrm{P_0O_1P_1}$의 크기는 $\frac{2\pi}{3}$이고 호 $\mathrm{P_0P_1}$의 길이는 $r\times\frac{2\pi}{3}$이다. 문제의 조건으로부터 선분 AB의 길이와 호 $\mathrm{P_0P_1}$의 길이가 같으므로
$2\pi\sqrt{3} = r\times\frac{2\pi}{3}$이고 이로부터 $r = 3\sqrt{3}$ 이다.

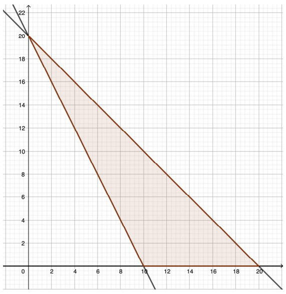
(2) 선분 $\mathrm{P_0P_1}$의 길이는 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$인 원의 중심각 $\frac{2\pi}{3}$에 대응하는 현의 길이이므로
$2\times 3\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3} = 9$이다. 따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$가 주어진 길을 따라 한 바퀴 돌 때 선분 $\mathrm{AA'}$의 길이는
$3\times\overline{\mathrm{P_0P_1}} = 3\times 9 = 27$이다.

(3) 구하는 도형의 넓이는 사각형 $\mathrm{RSO_2O_1}$의 넓이에서 부채꼴 $\mathrm{O_1RQ}$의 넓이와 부채꼴 $\mathrm{O_2QS}$의 넓이, 그리고 삼각형 $\mathrm{O_1QO_2}$의 넓이의 합을 빼면 된다.
사각형 $\mathrm{RSO_2O_1}$의 넓이: 주어진 사각형은 직각사각형이고 $\overline{\mathrm{O_1O_2}} = \overline{\mathrm{P_0P_1}}$, $\overline{\mathrm{O_1R}} = r$이므로
$\overline{\mathrm{O_1O_2}}\times\overline{\mathrm{O_1R}} = 9\times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$
부채꼴 $\mathrm{O_1RQ}$와 부채꼴 $\mathrm{O_2QS}$의 넓이는 같고 이 부채꼴의 반지름의 길이는 $r = 3\sqrt{3}$, 중심각은 $\frac{\pi}{3}$이므로
각각의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\times(3\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{2}$
$\triangle\mathrm{O_1QO_2}$의 넓이: $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times r\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\times 9\times 3\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$
따라서 구하는 넓이는 $\frac{81\sqrt{3}}{4} - 9\pi = \frac{9}{4}\times(9\sqrt{3} - 4\pi)$이다.

〈문제 4〉

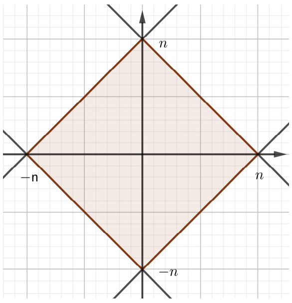
(1) $0 \le n \le 20$인 정수 n에 대하여 주어진 도형의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 순서쌍 중 $x=n$인 점의 개수를 세면 직선 PR의 방정식은 $2x+y=20$, 직선 QR의 방정식은 $x+y=20$이므로

$\begin{cases} n+1, & 0 \le n \le 10 \\ 21-n, & 11 \le n \le 20 \end{cases}$을 만족한다.



따라서 각 좌표가 정수인 점의 개수는 $\sum_{n=0}^{10}(n+1)+\sum_{n=11}^{20}(21-n)=2\sum_{n=1}^{10}n+11=121$개다.

(2) 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(n,0)$, $\mathrm{B}(0,n)$, $\mathrm{C}(-n,0)$, $\mathrm{D}(0,-n)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓여 있는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $N(n)$을 구하자. $-n \le k \le n$인 정수 k에 대하여 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 점 중 $x=k$인 점의 개수는 $2n-2|k|+1$개다.



따라서 $N(n)=\sum_{k=-n}^{n}(2n-2|k|+1)=2n+1+2\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)=2n^2+2n+1$이고, 이로부터

$$\sum_{k=1}^{n}N(k)=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

이다. $n=11$인 경우 계산하면 1155이다.

(3) $x+y+z=20$을 만족하는 자연수의 순서쌍 (x,y,z) 중 x는 홀수, y는 짝수, z는 소수인 해의 개수를 구하는 문제이므로 음이 아닌 정수 s,t에 대해 $x=2s+1$, $y=2t+2$로 쓸 수 있고 따라서 주어진 문제는 $(2s+1)+(2t+2)+z=20$을 만족하는 음이 아닌 정수 s,t와 소수 z의 쌍의 개수를 구하면 된다. z은 17보다 작거나 같은 홀수인 소수이므로 3, 5, 7, 11, 13, 17중 하나이다.

$z=3$인 경우: $s+t=7$인 음이 아닌 정수해의 개수는 8개

$z=5$인 경우: $s+t=6$인 음이 아닌 정수해의 개수는 7개

$z=7$인 경우: $s+t=5$인 음이 아닌 정수해의 개수는 6개

$z=11$인 경우: $s+t=3$인 음이 아닌 정수해의 개수는 4개

$z=13$인 경우: $s+t=2$인 음이 아닌 정수해의 개수는 3개

$z=17$인 경우: $s+t=0$인 음이 아닌 정수해의 개수는 1개

따라서 구하는 수는 $8+7+6+4+3+1=29$이다.

3. 평가기준

※ 각 소문항마다 아래에 제시된 단계에 따라 1~6등급으로 채점한다. (단, 백지답안은 7등급)

채점 기준	배점
〈문제 1〉 (1) ① $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n = \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$이고, ② $\mathrm{OP}_n = 1$, ③ $\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n = \sin\frac{\pi}{n}$, $\mathrm{OR}_n = \cos\frac{\pi}{n}$이므로 ④ 직각삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{R}_n$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\cos\frac{\pi}{n}$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우 3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우 4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안	7
〈문제 1〉 (2) ① 정n각형에 내접하는 원 O_n의 반지름의 길이는 $\mathrm{OR}_n = \cos\frac{\pi}{n}$이므로, ② 원 O_n의 넓이는 $a_n = \pi\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2$이고, ③ 둘레의 길이는 $b_n = 2\pi\cos\frac{\pi}{n}$이다. ④ 따라서 $b_6 - 2a_6 = 2\pi\cos\frac{\pi}{6} - 2\pi\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 = \pi\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다. [다른 방법 풀이] ① 정육각형에 내접하는 원 O_6의 반지름의 길이는 $\mathrm{OR}_6 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 ② 원 O_6의 넓이는 $a_6 = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4}$ 이고 ③ 둘레의 길이는 $b_6 = 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3}$ 이다. ④ 따라서 $b_6 - 2a_6 = \pi\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우 3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우 4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안	6

채점 기준	배점
〈문제 1〉(3) ① $n^2(b_n - 2a_n) = n^2\left(2\pi\cos\frac{\pi}{n} - 2\pi\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\right)$ $= 2\pi^3 \times \cos\frac{\pi}{n} \times \frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}$ ② $x = \frac{\pi}{n}$로 두면 $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n} = 1$이고, ③ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$인데, 여기에서 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이다. ④ 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$이므로 $\lim_{n\to\infty} n^2(b_n - 2a_n) = 2\pi^3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \pi^3$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우 3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우 4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안	12
〈문제 2〉(1) ① 구간 $[1, 2]$에서 $g(x) = 4 - \cos\pi x - f(x)$는 연속함수이고, $g(x) \ge 0$이다. ② $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$로 두면 $1 \le a < b \le 2$일 때 $G(b) - G(a) = \int_a^b g(t)\,dt \ge 0$, 즉 $G(a) \le G(b)$가 성립한다. ③ $G(1) = \int_0^1 (4 - \cos\pi t - f(t))\,dt = \left[4t - \frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1 - F(1) = 4 - 2 = 2$ $G(2) = \int_0^2 (4 - \cos\pi t - f(t))\,dt = \left[4t - \frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^2 - F(2) = 8 - 6 = 2$, ④ 즉 $G(1) = 2 = G(2)$이므로 $1 \le x \le 2$인 모든 x에 대하여 $G(x) = 2$인 상수함수이다. ⑤ $1 < x < 2$인 모든 x에 대하여 $0 = G'(x) = g(x) = 4 - \cos\pi x - f(x)$이고, $f(x) = 4 - \cos\pi x$이다. 따라서 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음	10

채점 기준	배점
2등급 : ②~⑤단계를 잘 서술했으나 ①의 조건을 언급하지 않은 경우 3등급 : ③~④단계를 잘 서술했으나 ②단계를 확인하지 않은 경우 4등급 : ②~③단계를 시도하지 않고 ④의 결론을 설명 없이 쓴 경우 5등급 : ④의 결론을 설명 없이 쓰고 ⑤단계의 계산에서도 오류가 있는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안	
〈문제 2〉 (2) ① 구간 $[0,1]$에서 $f(x)=a\sin\pi x+b\cos\pi x$ 이므로 $f(1)=b\cos\pi=-b$ 이고, ② 구간 $[1,2]$에서 $f(x)=4-\cos\pi x$ 이므로 $f(1)=4-\cos\pi=4-(-1)=5$ 이다. ③ f가 $x=1$ 에서 연속이므로 $b=-5$ 이다. ④ $2=F(1)=\int_0^1(a\sin\pi t-5\cos\pi t)\,dt=\left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi t-\frac{5}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1=\frac{2a}{\pi}$ 이므로 $a=\pi$ 이다. [다른 방법 풀이] ① $2=F(1)=\int_0^1(a\sin\pi t+b\cos\pi t)\,dt$ $=\left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi t+\frac{b}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1=\frac{2a}{\pi}$ 이므로 $a=\pi$ 이다. ② 구간 $[0,1]$에서 $f(x)=a\sin\pi x+b\cos\pi x$ 이므로 $f(1)=b\cos\pi=-b$ 이고, ③ 구간 $[1,2]$에서 $f(x)=4-\cos\pi x$ 이므로 $f(1)=4-\cos\pi=4-(-1)=5$ 이다. ④ f가 $x=1$ 에서 연속이므로 $b=-5$ 이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우 3등급 : ③단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안	8
〈문제 2〉 (3) ① $F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(\pi\sin\pi t-5\cos\pi t)\,dt=\left[-\cos\pi t-\frac{5}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}$ $=-\frac{5}{\pi}+1$ ② $F\left(\frac{3}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}}f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^{\frac{3}{2}}(4-\cos\pi t)\,dt$ ③ $=F(1)+\left[4t-\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_1^{\frac{3}{2}}=2+2+\frac{1}{\pi}=4+\frac{1}{\pi}$ ④ 따라서 $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{3}{2}\right)=5-\frac{4}{\pi}$ 이다.	7

<table>
<tr><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우
3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우
4등급 : ②단계를 시도했으나 오류가 있는 경우
5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지답안</td><td></td></tr>
<tr><td>〈문제 3〉 (1)
① 반지름의 길이가 2π인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 한 변의 길이는
$\overline{\mathrm{AB}} = 2 \times 2\pi \times \sin\frac{\pi}{3} = 2 \times 2\pi \times \cos\frac{\pi}{6} = 2\pi\sqrt{3}$이다.
② 직선 AB가 점 P_0에서 원 C_1에 접하므로 직선 AB와 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{P}_0$는 서로 수직이고
직선 BC와 x축은 서로 평행하므로 각 $\mathrm{P}_0\mathrm{O}_1\mathrm{O}_0$의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.
③ 그러므로 각 $\mathrm{P}_0\mathrm{O}_1\mathrm{P}_1$의 크기는 $\frac{2\pi}{3}$이고 호 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$의 길이는 $r \times \frac{2\pi}{3}$이다.
④ 문제의 조건으로부터 선분 AB의 길이와 호 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$의 길이가 같으므로
$2\pi\sqrt{3} = r \times \frac{2\pi}{3}$이고 이로부터 $r = 3\sqrt{3}$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
5등급: ①을 옳게 계산한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안</td><td>12</td></tr>
<tr><td>〈문제 3〉 (2)
① 선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$의 길이는 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$인 원의
② 중심각 $\frac{2\pi}{3}$에 대응하는 현의 길이이므로
③ $2 \times 3\sqrt{3} \times \sin\frac{\pi}{3} = 9$이다.
④ 따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$가 주어진 길을 따라 한 바퀴 돌 때 선분 AA'의 길이는
$3 \times \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = 3 \times 9 = 27$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 서술했으나 계산의 오류가 있는 경우
3등급: ③단계까지의 답을 옳게 서술한 경우
4등급: ①~③단계를 이용해 현의 길이를 구하려고 했으나 답이 틀린 경우
5등급: ① 또는 ②의 내용을 이용해 문제 풀이를 시도한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>

〈문제 3〉 (3)

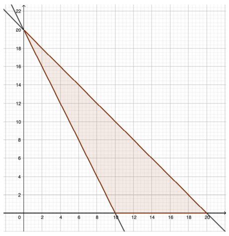
① 구하는 도형의 넓이는 사각형 RSO_2O_1의 넓이에서 부채꼴 O_1RQ의 넓이와 부채꼴 O_2QS의 넓이, 그리고 삼각형 O_1QO_2의 넓이의 합을 빼면 된다.
② 사각형 RSO_2O_1의 넓이: 주어진 사각형은 직각사각형이고 $\overline{O_1O_2}=\overline{P_0P_1}$, $\overline{O_1R}=r$이므로 $\overline{O_1O_2}\times\overline{O_1R}=9\times3\sqrt{3}=27\sqrt{3}$
③ 부채꼴 O_1RQ와 부채꼴 O_2QS의 넓이는 같고 이 부채꼴의 반지름의 길이는 $r=3\sqrt{3}$, 중심각은 $\frac{\pi}{3}$이므로 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{9\pi}{2}$
④ $\triangle O_1QO_2$의 넓이: $\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times r\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times9\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$
⑤ 따라서 구하는 넓이는 $\frac{81\sqrt{3}}{4}-9\pi=\frac{9}{4}\times(9\sqrt{3}-4\pi)$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ①~④ 과정을 이해하고 있으나 ②~④ 중 계산 실수가 1개인 경우
3등급: ①~④ 과정을 이해하고 있으나 ②~④ 중 계산 실수가 2개인 경우
4등급: ①~④ 과정을 이해하고 있으나 ②~④ 중 계산 실수가 3개인 경우
5등급: ①을 서술하였거나 넓이를 구하는 잘못된 다른 방법을 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

</td><td>8</td></tr>
<tr><td>

〈문제 4〉 (1)

① $0\le n\le 20$인 정수 n에 대하여 주어진 도형의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 순서쌍 중 $x=n$인 점의 개수를 세면 직선 PR의 방정식은 $2x+y=20$, 직선 QR의 방정식은 $x+y=20$이므로



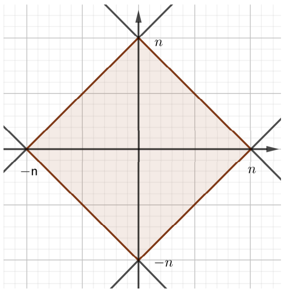
② $0\le n\le 10$ (또는 $0\le n\le 9$)인 경우 $n+1$개
③ $11\le n\le 20$ (또는 $10\le n\le 20$) 인 경우 $21-n$개
④ 따라서 구하고자 하는 각 좌표가 정수인 점의 개수는

$$\sum_{n=0}^{10}(n+1)+\sum_{n=11}^{20}(21-n)$$

⑤ $=2\sum_{n=1}^{10}n+11=121$개다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④까지 맞게 구하고 최종 답이 틀린 경우
3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
4등급: ②~③단계에서 계산 실수가 1개인 경우
5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우

</td><td>7</td></tr>
</table>

채점 기준	배점
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	
〈문제 4〉 (2) ① $-n \le k \le n$인 정수 k에 대하여 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 점 중 $x=k$인 점의 개수는 $2n-2\|k\|+1$개다.  ② $N(n)=\sum_{k=-n}^{n}(2n-2\|k\|+1)$ ③ $\quad = 2n+1+2\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)=2n^2+2n+1$ ④ $\sum_{k=1}^{n}N(k)=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$이다. ⑤ $n=11$인 경우 계산하면 1155이다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우 3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우 4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	8
〈문제 4〉 (3) ① 음이 아닌 정수 s, t에 대해 $x=2s+1, y=2t+2$라 두면 ② $(2s+1)+(2t+2)+z=20$으로부터 $2s+2t+z=17$을 만족하는 음이 아닌 정수 s, t와 소수 z의 쌍의 개수를 구하면 된다. ③ z는 17보다 작거나 같은 홀수인 소수이므로 3, 5, 7, 11, 13, 17중 하나이다. ④ $z=3$인 경우: $s+t=7$인 음이 아닌 정수해의 개수는 8개 $z=5$인 경우: $s+t=6$인 음이 아닌 정수해의 개수는 7개 $z=7$인 경우: $s+t=5$인 음이 아닌 정수해의 개수는 6개 $z=11$인 경우: $s+t=3$인 음이 아닌 정수해의 개수는 4개 $z=13$인 경우: $s+t=2$인 음이 아닌 정수해의 개수는 3개 $z=17$인 경우: $s+t=0$인 음이 아닌 정수해의 개수는 1개 ⑤ 따라서 구하는 수는 $8+7+6+4+3+1=29$이다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ①~③과정을 맞게 서술했으나 ④의 계산에서 2개 이하가 틀린 경우	10

채점 기준	배점
3등급: ①~③과정을 맞게 서술한 경우 4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우 5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우, 또는 문제의 조건을 이용하여 식의 변형을 시도한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	

4. 예시답안

〈문제 1〉 (1)

$\angle P_nOR_n = \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$이고, $OP_n = 1$, $P_nR_n = \sin\frac{\pi}{n}$, $OR_n = \cos\frac{\pi}{n}$이므로

직각삼각형 OP_nR_n의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\cos\frac{\pi}{n}$ 이다.

〈문제 1〉 (2)

정n각형에 내접하는 원 O_n의 반지름의 길이는 $OR_n = \cos\frac{\pi}{n}$이므로, 원 O_n의 넓이는

$a_n = \pi\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2$이고, 둘레의 길이는 $b_n = 2\pi\cos\frac{\pi}{n}$이다.

따라서 $b_6 - 2a_6 = 2\pi\cos\frac{\pi}{6} - 2\pi\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 = \pi\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.

〈문제 1〉 (3)

$$n^2(b_n - 2a_n) = n^2\left(2\pi\cos\frac{\pi}{n} - 2\pi\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\right) = 2\pi^3\times\cos\frac{\pi}{n}\times\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}$$ 이고,

$x = \frac{\pi}{n}$로 두면

$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n} = 1$ 이고,

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ 인데,

여기에서 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} n^2(b_n - 2a_n) = 2\pi^3\times 1\times\frac{1}{2} = \pi^3$ 이다.

〈문제 2〉 (1)

구간 $[1,2]$에서 연속인 함수 $g(x)=4-\cos\pi x-f(x)$에 대하여 $g(x)\ge 0$이므로

$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$로 두면 $1\le a<b\le 2$일 때 $G(b)-G(a)=\int_a^b g(t)\,dt\ge 0$,

즉 $G(a)\le G(b)$가 성립한다. 그런데

$$G(1)=\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1 (4-\cos\pi t-f(t))\,dt=\left[4t-\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1-F(1)=4-2=2$$

$$G(2)=\int_0^2 g(t)\,dt=\int_0^2 (4-\cos\pi t-f(t))\,dt=\left[4t-\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^2-F(2)=8-6=2,$$

즉 $G(1)=2=G(2)$이므로 $1\le x\le 2$인 모든 x에 대하여 $G(x)=2$인 상수함수이다.
따라서 $1<x<2$인 모든 x에 대하여 $0=G'(x)=g(x)=4-\cos\pi x-f(x)$이고,

$f(x)=4-\cos\pi x$이다. 그러므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)=4$이다.

〈문제 2〉 (2)

구간 $[0,1]$에서 $f(x)=a\sin\pi x+b\cos\pi x$이므로 $f(1)=b\cos\pi=-b$이며,
구간 $[1,2]$에서 $f(x)=4-\cos\pi x$이므로 $f(1)=4-\cos\pi=4-(-1)=5$이다.
이때 f가 $x=1$에서 연속이므로 $b=-5$이다. 그리고

$$2=F(1)=\int_0^1 (a\sin\pi t-5\cos\pi t)\,dt=\left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi t-\frac{5}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1=\frac{2a}{\pi}$$ 이므로

$a=\pi$이다.

〈문제 2〉 (3)

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}} (\pi\sin\pi t-5\cos\pi t)\,dt=\left[-\cos\pi t-\frac{5}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{5}{\pi}+1$$

$$F\left(\frac{3}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}} f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^{\frac{3}{2}} (4-\cos\pi t)\,dt$$

$$=F(1)+\left[4t-\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_1^{\frac{3}{2}}=2+2+\frac{1}{\pi}=4+\frac{1}{\pi}$$

따라서 $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{3}{2}\right)=5-\frac{4}{\pi}$이다.

〈문제 3〉 (1)

반지름의 길이가 2π인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\times 2\pi\times\sin\frac{\pi}{3}=2\times 2\pi\times\cos\frac{\pi}{6}=2\pi\sqrt{3}$이다.

직선 AB가 점 P_0에서 원 C_1에 접하므로 직선 AB와 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{P}_0$는 서로 수직이고 직선 BC와 x축은 서로 평행하므로 각 $\mathrm{P}_0\mathrm{O}_1\mathrm{O}_0$의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. 그러므로 각 $\mathrm{P}_0\mathrm{O}_1\mathrm{P}_1$의 크기는 $\frac{2\pi}{3}$이고 호 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$의 길이는

$r \times \frac{2\pi}{3}$이다. 문제의 조건으로부터 선분 AB의 길이와 호 P_0P_1의 길이가 같으므로

$2\pi\sqrt{3} = r \times \frac{2\pi}{3}$이고 이로부터 $r = 3\sqrt{3}$이다.

〈문제 3〉 (2)

선분 P_0P_1의 길이는 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$인 원의 중심각 $\frac{2\pi}{3}$에 대응하는 현의 길이이므로

$2 \times 3\sqrt{3} \times \sin\frac{\pi}{3} = 9$이다. 따라서 $\triangle ABC$가 주어진 길을 따라 한 바퀴 돌 때 선분 AA'의 길이는

$3 \times \overline{P_0P_1} = 3 \times 9 = 27$이다.

〈문제 3〉 (3)

구하는 도형의 넓이는 사각형 RSO_2O_1의 넓이에서 부채꼴 O_1RQ의 넓이와 부채꼴 O_2QS의 넓이, 그리고 삼각형 O_1QO_2의 넓이의 합을 빼면 된다.

사각형 RSO_2O_1의 넓이: 주어진 사각형은 직각사각형이고 $\overline{O_1O_2} = \overline{P_0P_1}$, $\overline{O_1R} = r$이므로

$\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1R} = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$

부채꼴 O_1RQ와 부채꼴 O_2QS의 넓이는 같고 이 부채꼴의 반지름의 길이는 $r = 3\sqrt{3}$, 중심각은 $\frac{\pi}{3}$이므로

각각의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{2}$

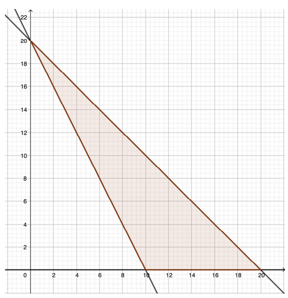
$\triangle O_1QO_2$의 넓이: $\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times r\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{81\sqrt{3}}{4} - 9\pi = \frac{9}{4} \times (9\sqrt{3} - 4\pi)$이다.

〈문제 4〉 (1)

$0 \le n \le 20$인 정수 n에 대하여 주어진 도형의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 순서쌍 중 $x = n$인 점의 개수를 세면 직선 PR의 방정식은 $2x + y = 20$, 직선 QR의 방정식은 $x + y = 20$이므로

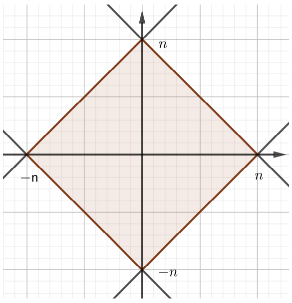
$\begin{cases} n+1, & 0 \le n \le 10 \\ 21-n, & 11 \le n \le 20 \end{cases}$을 만족한다.



따라서 각 좌표가 정수인 점의 개수는 $\sum_{n=0}^{10}(n+1) + \sum_{n=11}^{20}(21-n) = 2\sum_{n=1}^{10} n + 11 = 121$개다.

〈문제 4〉 (2)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(n,0)$, $\mathrm{B}(0,n)$, $\mathrm{C}(-n,0)$, $\mathrm{D}(0,-n)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓여 있는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $N(n)$을 구하자. $-n \le k \le n$인 정수 k에 대하여 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 점 중$x=k$인 점의 개수는 $2n-2|k|+1$개다.



따라서 $N(n)=\sum_{k=-n}^{n}(2n-2|k|+1)=2n+1+2\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)=2n^2+2n+1$이고, 이로부터

$\sum_{k=1}^{n}N(k)=2\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n$

이다. $n=11$인 경우 계산하면 1155이다.

〈문제 4〉 (3)

$x+y+z=20$을 만족하는 자연수의 순서쌍 (x,y,z) 중 x는 홀수, y는 짝수, z는 소수인 해의 개수를 구하는 문제이므로 음이 아닌 정수 s, t에 대해 $x=2s+1$, $y=2t+2$로 쓸 수 있고 따라서 주어진 문제는 $(2s+1)+(2t+2)+z=20$을 만족하는 음이 아닌 정수 s, t와 소수 z의 쌍의 개수를 구하면 된다. z은 17보다 작거나 같은 홀수인 소수이므로 3, 5, 7, 11, 13, 17중 하나이다.

$z=3$인 경우: $s+t=7$인 음이 아닌 정수해의 개수는 8개

$z=5$인 경우: $s+t=6$인 음이 아닌 정수해의 개수는 7개

$z=7$인 경우: $s+t=5$인 음이 아닌 정수해의 개수는 6개

$z=11$인 경우: $s+t=3$인 음이 아닌 정수해의 개수는 4개

$z=13$인 경우: $s+t=2$인 음이 아닌 정수해의 개수는 3개

$z=17$인 경우: $s+t=0$인 음이 아닌 정수해의 개수는 1개

따라서 구하는 수는 $8+7+6+4+3+1=29$이다.