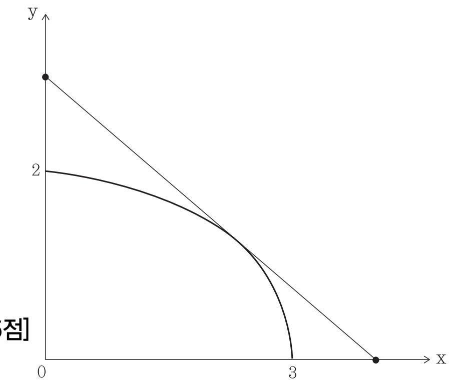
문제 3

매개변수 t $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 로 나타낸 곡선

$$x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 25점]



(1) 이 곡선 위의 $t = \frac{5\pi}{12}$ 에 대응되는 점의 x좌표를 $a\sqrt{2} + b\sqrt{6}$ 으로 나타낼 때 유리수 a, b의 값을 각각 구하시오. [5점]

(2) 이 곡선 위의 $t = \alpha$ 에 대응되는 점에서 접하는 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 α 에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 이 곡선 위의 $t = \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ 에 대응되는 점에서 접하는 접선이 x축과 y축에 의해 잘려서 만들어지는 선분의 길이가 $2\sqrt{7}$ 일 때, α 의 값을 구하시오. [10점]

문제 4

안이 들여다보이지 않는 상자에 모양과 크기가 같아서 구분할 수 없는 n개의 탁구공이 들어있는데, 그 중 6개는 노란색, 나머지는 모두 흰색이다. 이 상자에서 임의로 꺼낸 4개의 탁구공 중에서 2개는 노란색, 2개는 흰색 공일 확률을 p_n이라 할 때, p_n의 최댓값을 구하려고 한다. (단, $n \geq 8$ 이다.)
다음 물음에 답하시오. [총 20점]

(1) p_n의 값을 n의 식으로 나타내시오. [5점]

(2) $p_n \leq p_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n의 범위를 구하시오. [10점]

(3) p_n의 최댓값을 구하시오. [5점]

02 출제개요

가. 출제의도

1) 출제 방향

우리대학의 자연계 논술 시험은 지난해와 마찬가지로 수험생의 학업 부담을 경감시키고자 수학 문제로만 구성하여, 고등학교 수학의 기초 원리를 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 고등학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있는 수리적 문제상황을 제시하고, 논리적인 사고를 따르면 쉽게 해결할 수 있는 세부 문제로 구성하였다. 개별적인 교과지식의 반복학습과 암기를 통해 습득된 지식을 묻는 것을 지양하고, 수학적 원리에 대한 확실하고 통합적인 이해를 바탕으로 문제를 분석하여 해결하며 그 과정과 결과를 논리적으로 명확하게 기술할 수 있는지를 평가하였다. 그리고 평가의 객관성을 위해 채점의 기준을 최대한 객관화할 수 있도록 출제하였다.

2) 문항별 출제의도

문제 1

수학 I의 방정식과 부등식 단원에서 다루는 이차함수와 이차방정식의 관계 및 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계,

도형의 방정식 단원에서 다루는 점과 직선 사이의 거리를 활용할 수 있는지를 알아본다. 본 문제에는 이차함수의 그래프와 직선의 교점을 구하고, 점과 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 이들로 만들어지는 사각형의 넓이를 구하는 문제로, 방정식 단원과 도형의 방정식 단원에 대한 폭넓은 이해도와 적용능력을 평가하고자 한다.

문제 2

미적분 II에서 다루는 지수함수와 로그함수, 삼각함수 및 함수의 몫과 합성함수, 초월함수의 미분과 적분법을 이용한다. 본 문제는 삼각함수의 기본 개념 중 부채꼴의 넓이를 라디안으로 나타낸 원주각의 크기를 이용하여 구하는 방법을 아는지 알아보고, 부채꼴과 같은 둘레의 길이를 가지는 삼각형의 넓이를 이용하여 그 비를 함수로 나타내고, 그 함수의 최솟값을 몫의 미분법을 이용하여 구하게 함으로써 미적분에 관한 종합적인 사고력과 적용능력을 평가하고자 한다.

문제 3

미적분II에서 다루는 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 덧셈공식, 삼각함수의 미분과 기하와 벡터에서 다루는 매개변수로 나타낸 함수의 접선에 대한 내용을 통합적으로 활용하여 주어진 문제를 정확히 분석하고 주어진 조건을 종합하여 해결할 수 있는지 평가하고자 한다.

문제 4

확률과 통계에서 다루는 순열과 조합 등을 이용하여 경우의 수를 구하고, 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해하여 간단한 확률을 구할 수 있는지 알아본다. 본 문제는 일반적 상황에서 조합의 수를 구하여 확률을 식으로 나타내고, 그 확률이 최대가 되도록 하는 부등식을 구하여 그를 풀어서 문제를 해결하게 함으로써 확률과 통계에서의 종합적인 문제 해결 능력을 평가하고자 한다.

나. 출제 근거

1) 교육과정 근거

문제 1	**교육과정**	[수학 I]-(나) 방정식과 부등식 – $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수 ① 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다. ② 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [수학 I]-(다) 도형의 방정식 – (다) 도형의 방정식 – $\boxed{1}$ 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 I]-(다) 도형의 방정식 – $\boxed{2}$ 직선의 방정식 ③ 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준 /영역별 내용	[수학 I]-(나) 방정식과 부등식 – $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수 수학1221. 이차함수와 이차방정식의 관계를 설명할 수 있다. 수학1222. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 설명할 수 있다. [수학 I]-(다) 도형의 방정식 – (다) 도형의 방정식 – $\boxed{1}$ 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 I]-(다) 도형의 방정식 – $\boxed{2}$ 직선의 방정식 수학1323. 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
문제 2	**교육과정**	[미적분 II]-(나) 삼각함수 – $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [미적분 II]-(다) 미분법 – $\boxed{1}$ 여러 가지 미분법 ① 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분 II]-(다) 미분법 – $\boxed{2}$ 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

문제 2	성취기준/영역별 내용	[미적분 II]-(나) 삼각함수 – 1 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2211-2. 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. [미적분 II]-(다) 미분법 – 1 여러 가지 미분법 미적2311. 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분 II]-(다) 미분법 – 2 도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제 3	교육과정	[미적분II]-(나) 삼각함수-1 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [미적분II]-(나) 삼각함수-2 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. ③ 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [기하와 벡터]-(가) 평면 곡선-2 평면 곡선의 접선 ② 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준/영역별 내용	미적2212-1. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. 미적2223. 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. 기백1122. 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 4	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합 – 2 순열과 조합 ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률- 1 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.
	성취기준/영역별 내용	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합 – 2 순열과 조합 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률- 1 확률의 뜻과 활용 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.

2) 자료 출처

문항구분	출처
문제 1	[수학 I] 신사고, 황선욱 외 11인, 2014년, 68쪽, 71쪽, 117쪽, 140쪽
문제 2	[미적분 II] 신사고, 황선욱 외 11인, 2014년, 51쪽, 97쪽, 116쪽
문제 3	[미적분 II] 미래엔, 이강섭 외 14인, 2014년, 58쪽, 78쪽, 92쪽, 108쪽 [기하와 벡터] 미래엔, 이강섭 외 14인, 2014년, 45쪽
문제 4	[확률과 통계] 미래엔, 이강섭 외 14인, 2014년, 31쪽, 59쪽

03 평가기준

가. 배점기준표

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	5	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	10	
문제1(3)	10	

문항	배점	세 부 내 용
문제2(1)	5	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제2(2)	10	
문제2(3)	15	
문제3(1)	5	
문제3(2)	10	
문제3(3)	10	
문제4(1)	5	
문제4(2)	10	
문제4(3)	5	

나. 채점기준

* 각 문제에 대하여 아래에 제시된 답안과 같이 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다.
  이후 등급을 해당 문제의 점수로 환산하여 총점을 계산한다.
* 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1등급을 감점한다.
* 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1등급을 감점한다.

문제 1 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① $y=x^2-ax+b$와 $y=-x+b$의 교점 $\mathrm{A,C}$의 x좌표는 방정식

$-x+b=x^2-ax+b$의 근이므로 $x(x-a+1)=0$에서

② $x=0$ 또는 $x=a-1$이다.

③ $x=0$일 때 $y=b$이므로 $\mathrm{A}(0,b)$이고 D의 y좌표는 A의 y좌표와 같은 b이다.

$b=x^2-ax+b$에서 $x(x-a)=0$인데, $x\neq 0$이므로 $x=a$이다.

④ 즉 $\mathrm{D}(a,b)$인데, D가 직선 $y=2x-8$위에 있으므로 $b=2a-8$이다.

문제 1 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $\mathrm{B,D}$의 x좌표는 방정식 $x^2-ax+b=2x-8$의 근이다.

② 이때 $2x-8=x^2-ax+2a-8$에서

$x^2-(a+2)x+2a=(x-2)(x-a)=0$이고,

D의 x좌표가 a이므로 B의 x좌표는 2이다.

③ B의 y좌표는 $y=2\times2-8=-4$이다. 즉 $\mathrm{B}(2,-4)$이다.

④ 또, C의 x좌표가 $x=a-1$이므로 $y=-(a-1)+b=a-7$이다.

따라서 $\mathrm{C}(a-1,a-7)$이다.

⑤ $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(a-1-2)^2+(a-7+4)^2}=|a-3|\sqrt{2}=3\sqrt{2}$에서 $a=0$ 또는 $a=6$이다.

그런데 a는 양수이므로 $a=6$이다. 따라서 $b=2a-8=4$이다.

문제 1 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $\mathrm{A}(0,4)$, $\mathrm{B}(2,-4)$, $\mathrm{C}(5,-1)$, $\mathrm{D}(6,4)$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{(6-2)^2+(4+4)^2}=4\sqrt{5}$이고

② 직선 BD의 방정식은 $2x-y-8=0$이다.

③ $\mathrm{A}(0,4)$에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 내린 수선의 길이는 $\dfrac{|2\times0-4-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{5}}$ 이므로

$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\dfrac{12}{\sqrt{5}}=24$이다.

④ 또, $\mathrm{C}(3,-4)$에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 내린 수선의 길이는 $\dfrac{|2\times5-(-1)-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$이다.

따라서 $\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}=6$이다.

⑤ 따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=24+6=30$이다.

문제 2 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① 부채꼴 OAB의 둘레의 길이는 $r+r+r\theta=r(2+\theta)$

② 정삼각형 CDE의 둘레의 길이는 $3x$

③ 앞의 ①, ②에서 $3x=r(2+\theta)$

④ 따라서 $x=\dfrac{r(2+\theta)}{3}$

문제 2 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 부채꼴 OAB의 넓이는 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

② 정삼각형 CDE의 넓이는

$$T=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{r^2(2+\theta)^2}{9}=\frac{\sqrt{3}r^2(2+\theta)^2}{36}$$

③ 따라서 $f(\theta)=\dfrac{T}{S}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}r^2(2+\theta)^2}{36}}{\dfrac{1}{2}r^2\theta}=\dfrac{\sqrt{3}(2+\theta)^2}{18\theta}$

문제 2 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 15점]

① $\theta>0$에서 $18\theta\neq0$이므로 $f(\theta)$는 미분가능하다.

② $f'(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\times\dfrac{2(2+\theta)\times\theta-(2+\theta)^2}{\theta^2}=\dfrac{\sqrt{3}(2+\theta)(\theta-2)}{18\theta^2}$이므로

③ $f'(\theta)=0$이면 $\theta=2$이다.

④ $\theta<2$이면 $f'(\theta)<0$이고, $\theta>2$이면 $f'(\theta)>0$이므로 $f(\theta)$는 $\theta=2$일 때 극솟값을 갖고 이것이 최솟값이다.

⑤ $f(\theta)$의 최솟값은 $f(2)=\dfrac{\sqrt{3}(2+2)^2}{18\times2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

[다른 풀이] 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [15점]

① $f(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}(2+\theta)^2}{18\theta}$에서 $\dfrac{(2+\theta)^2}{\theta}=\dfrac{4+4\theta+\theta^2}{\theta}=\dfrac{4}{\theta}+4+\theta$이다.

② $\theta>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\dfrac{4}{\theta}+\theta\geq2\sqrt{\dfrac{\theta}{4}\times\theta}=1$이고

③ 등호는 $\theta=2$일 때 성립한다.

④ 따라서 $f(\theta)$가 최솟값을 가지는 θ의 값은 2이고,

⑤ $f(\theta)$의 최솟값은 $f(2)=\dfrac{\sqrt{3}(2+2)^2}{18\times 2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

문제 3 **(1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]**

① 곡선 위의 $t=\dfrac{5\pi}{12}$에 대응되는 점의 x좌표는 $x=3\cos\dfrac{5\pi}{12}$이다.

② $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

③ $3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

④ $=3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\dfrac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=a\sqrt{2}+b\sqrt{6}$ 따라서 $a=-\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{3}{4}$

문제 3 **(2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]**

① 점 $(x,y)=(3\cos\alpha,2\sin\alpha)$에서 접하는 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos\alpha}{-3\sin\alpha}=-\dfrac{2}{3}\cot\alpha$ 이다.

② 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{2}{3}\cot\alpha\,(x-3\cos\alpha)+2\sin\alpha=-\dfrac{2}{3}\cot\alpha\,x+2\csc\alpha$ 이다

③ 이 접선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 $y=2\csc\alpha$이고, 이 접선이

x축과 만나는 점의 x좌표는 $0=-\dfrac{2}{3}\cot\alpha\,x+2\csc\alpha$로부터

$x=\dfrac{3\csc\alpha}{\cot\alpha}=3\sec\alpha$이다.

④ 따라서 이 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(3\sec\alpha,0)$, y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,2\csc\alpha)$ 이다.

문제 3 **(3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]**

① $L^2=9\sec^2\alpha+4\csc^2\alpha$이고, 주어진 조건으로부터

$28=9\sec^2\alpha+4\csc^2\alpha$ 이다.

② 삼각함수 사이의 관계로부터

$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$, $\csc^2\alpha=1+\cot^2\alpha$ 이다.

③ $k=\tan^2\alpha$로 두면

$28=9(1+k)+4\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$,

즉 $9k^2-15k+4=(3k-4)(3k-1)=0$으로부터 $k=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\dfrac{4}{3}$ 이다.

④ 문제의 조건 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ 으로부터 $0<\tan\alpha<1$이다.

따라서 $k=\tan^2\alpha=\dfrac{1}{3}$ 이고, $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

⑤ 그러므로 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 이다.

문제 4 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① 상자 안에 들어있는 n 개의 탁구공 중에서 노란색 공은 6개, 흰색 공은 $n-6$개가 있다.

② 상자에서 임의로 4개의 탁구공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{n}C_4$이고,

③ 노란색 공 6개 중 2개를 꺼내고 흰색 공 $n-6$개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{6}C_2 \times {}_{n-6}C_2$이므로

④ 구하는 확률은 $p_n = \dfrac{{}_{6}C_2 \times {}_{n-6}C_2}{{}_{n}C_4}$

문제 4 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 부등식 $p_n \le p_{n+1}$에서 $\dfrac{{}_{6}C_2 \times {}_{n-6}C_2}{{}_{n}C_4} \le \dfrac{{}_{6}C_2 \times {}_{n-5}C_2}{{}_{n+1}C_4}$이므로

② ${}_{n+1}C_4 \times {}_{n-6}C_2 \le {}_{n}C_4 \times {}_{n-5}C_2$

③ $\dfrac{(n+1)!}{4! \times (n-3)!} \times \dfrac{(n-6)(n-7)}{2} \le \dfrac{n!}{4! \times (n-4)!} \times \dfrac{(n-5)(n-6)}{2}$

④ 이 식을 정리하면 $(n+1)(n-7) \le (n-3)(n-5)$이다.

⑤ 이 부등식을 풀면 $n \le 11$이다. (※여기까지만 있어도 정답으로 인정함)

또 문제의 조건에서 $n \ge 8$이므로, $8 \le n \le 11$이다.

문제 4 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① (2)의 결과에 의하여 $8 \le n \le 11$이면 $p_n \le p_{n+1}$이고, $n \ge 12$이면 $p_{n+1} < p_n$이다.

② 따라서 p_n의 최댓값은 p_{12}이다.

③ 그런데 $p_{12} = \dfrac{{}_{6}C_2 \times {}_{12-6}C_2}{{}_{12}C_4} = \dfrac{15 \times 15}{\dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4!}} = \dfrac{5}{11}$이므로

④ p_n의 최댓값은 $\dfrac{5}{11}$이다.