2. 출제개요

가. 출제의도

〈문제 1〉

수학 I에서 도형의 평행이동과 대칭이동을 공부하고, 수학 II에서 유리함수의 그래프를 그리고, 그 그래프의 성질을 다루었다. 본 문제는 유리함수의 그래프에 대한 중요한 개념인 점근선을 찾을 수 있는지 알아보고, 유리함수의 그래프의 성질과 도형의 평행이동, 대칭이동을 활용하는 통합적인 사고를 통한 문제해결능력을 평가하고자 한다.

〈문제 2〉

미적분 II의 삼각함수 단원에는 삼각함수의 미분을 학습하기 위한 전 단계로 삼각함수에 관한 여러 가지 극한값을 다루고 있다.

이 문제는 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 나타내도록 하고, 삼각함수의 극한값을 써서 함수의 극한을 계산하도록 구성하였다. 먼저 원에서 호의 길이와 중심각의 크기가 비례함을 이용하여 함수의 식을 찾고, 그것을 이용하여 극한값을 계산하도록 하였으므로 삼각함수의 미분법에 대한 폭 넓은 이해도와 적용능력을 측정하는 문제이다.

〈문제 3〉

미적분 I의 미분법 단원에서는 함수의 그래프에서 접선의 방정식을 구하는 것을 학습하고 있다. 또 적분법 단원에서는 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 계산하는 방법을 다루고 있다.

이 문제는 미분을 이용하여 삼차함수의 그래프 위의 점에서 접선의 방정식을 구하고, 삼차함수의 그래프와 그 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 적분을 이용하여 계산하게 함으로써 미분법과 적분법을 정확하게 알고 있으며 그것을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

〈문제 4〉

실생활에서의 최대 최소 문제 및 이의 해결 능력을, 주어진 상황을 수학적으로 해석하고 논리적으로 추론하며 경우의 수, 중복순열 혹은 조합, 이항정리, 등비급수의 합 등 다양한 수학 지식을 활용해 해결할 수 있는지를 복합적으로 평가한다.

나. 출제근거

〈문제 1〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학 I] ㈐ 도형의 방정식 ④ 도형의 이동 ① 평행이동의 의미를 이해한다. ② 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [수학 II] ㈏ 함수 ② 유리함수와 무리함수 ① 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.
성취기준 / 영역별 내용	[수학 I] 수학1341. 평행이동의 의미를 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다. 수학1342-1. 원점, x축, y축에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다. 수학1342-2. 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다. [수학 II] 수학2221. 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 설명할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 I	우정호 외	두산동아(주)	2014	206, 209	교과서	
수학 II	우정호 외	동아출판(주)	2016	105	교과서	

〈문제 2〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[미적분 II] ㈏ 삼각함수 1 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다. 2 삼각함수의 미분 ② 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
성취기준 / 영역별 내용	[미적분 II] 미적2211-2. 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. 미적2222. 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
미적분 II	류희찬 외	천재교과서	2014	63, 95	교과서	

〈문제 3〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[미적분 I] ㈐ 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 접선의 방정식을 구할 수 있다. ㈑ 다항함수의 적분법 3 정적분의 활용 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
성취기준 / 영역별 내용	[미적분 I] (3) 다항함수의 미분법 (나) 도함수 미적1331. 접선의 방정식을 구할 수 있다. (4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
미적분 I	류희찬 외	천재교과서	2014	120, 192	교과서	

〈문제 4〉

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[확률과 통계]- (가) 순열과 조합 2 순열과 조합 ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. ③ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. 4 이항정리 ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [수학 II]- ㈐ 수열 1 등차수열과 등비수열 ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. 2 수열의 합 ① $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분 I] ㈎ 수열의 극한 2 급수 ② 등비급수의 뜻을 알고 그 합을 구할 수 있다.
성취기준 / 영역별 내용	[확률과 통계] (1) 순열과 조합 (나)순열과 조합 확통1122 조합의 뜻을 알고 조합의 수를 구할 수 있다. 확통1123-3 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] (1) 순열과 조합 (라) 이항정리 확통1141/1142 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [수학 II] (3) 수열 (나) 수열의 합 수학2322 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [미적분 I] (1)수열의 극한 (나) 급수 미적1122 등비급수의 뜻을 알고 그 함을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2016	32-38, 62-68	교과서	
수학 II	우정호 외	동아출판사	2016	148-149, 158-159	교과서	
미적분 I	류희찬 외	천재교과서	2016	35-41	교과서	

다. 문항 해설

〈문제 1〉

(1) 두 유리함수의 점근선을 각각 구하여 네 개의 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구한다.
(2) 한 유리함수의 점근선의 교점이 대각선의 교점이며 각 변이 좌표축에 평행한 정사각형 ABCD의 꼭짓점 A, C가 그 유리함수의 그래프 위에 있을 때, 정사각형의 대칭성을 이용하여 꼭짓점 A, C의 좌표를 나타내고, 이로부터 꼭짓점 B의 좌표를 구하거나, 주어진 유리함수를 평행이동하여 점근선의 교점이 원점에 오도록 하여 원점에 대한 대칭성을 이용하고, 다시 평행이동을 이용하여 꼭짓점 B의 좌표를 구한다.
(3) 한 유리함수의 그래프는 x축에 대칭이동하고, 다른 유리함수의 그래프는 y축의 방향으로 b만큼 평행이동했을 때, 새로 얻어지는 점근선으로 둘러싸인 영역이 정사각형이 되도록 하는 실수 b의 값을 정사각형의 가로와 세로의 길이가 같음을 이용하여 모두 구한다.

〈문제 2〉

(1) 호도법을 이용하여 선분의 길이를 호의 길이에 대한 식으로 나타낸다.
(2) 활꼴과 직각삼각형의 넓이를 호의 길이에 대한 삼각함수를 이용하여 식으로 나타낸다.
(3) 삼각함수의 극한값을 이용하여 주어진 함수의 극한값을 계산한다.

〈문제 3〉

(1) 주어진 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구한다.
(2) 곡선과 그 접선의 교점의 좌표를 구한다.
(3) 곡선과 그 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 계산한다.

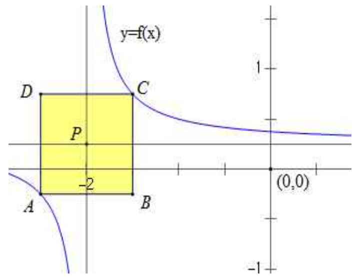
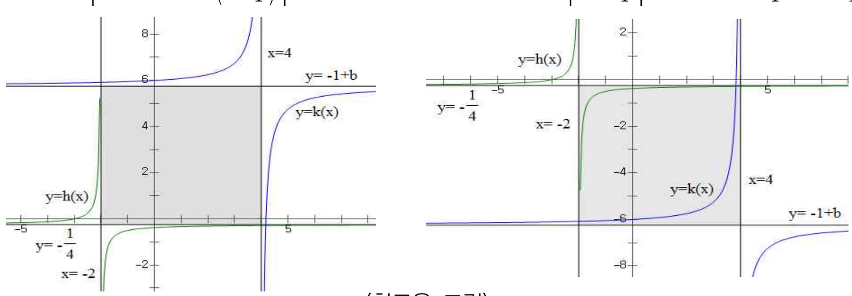
〈문제 4〉

(1) 주어진 삼각형의 분할에서 두 점 사이의 최단거리 경로가 만족해야 할 조건을 찾고, 이를 바탕으로 순열 및 조합의 성질을 활용해 주어진 두 점 사이의 최단거리가 되는 경우의 수를 구한다,
(2) 이항정리의 성질을 활용하여 위에서 구한 최단경로의 경우의 수의 합을 구하고, 이로부터 얻어지는 등비급수의 합을 구한다.
(3) 주어진 정삼각형 위에 놓인 주어진 두 점을 연결하는 한번 지난 점을 다시 지나지 않는 경로의 길이가 가장 클 조건을 찾고 이러한 경로가 실제로 구현되는지를 확인한다.

3. 평가기준

※ 각 소문항마다 아래에 제시된 단계에 따라 1~6등급으로 채점한다. (단, 백지답안은 7등급)

채점 기준	배점
〈문제 1〉 (1) ① $f(x)=\dfrac{x+3}{4x+8}=\dfrac{1}{4(x+2)}+\dfrac{1}{4}$ 이므로 점근선의 방정식은 $x=-2,\ y=\dfrac{1}{4}$ 이다. ② $g(x)=-\dfrac{x-3}{x-4}=-\dfrac{1}{x-4}-1$ 이므로 점근선의 방정식은 $x=4,\ y=-1$ 이다. ③ 따라서 두 그래프의 점근선으로 둘러싸인 영역은 직사각형이고, 그 넓이는 $6\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{2}$ 이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ①, ② 과정은 맞고 ③의 계산이 틀린 경우 3등급 : ①, ② 과정에서 구한 값 중에 하나가 틀린 경우	5

채점 기준	배점
4등급 : ①, ② 과정에서 구한 값 중에 두 개가 틀린 경우 5등급 : ①, ② 과정에서 구한 값 중에 하나만 맞은 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	
〈문제 1〉 (2)  〈참고용 그림〉 ① 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(-2, \frac{1}{4}\right)$이다. ② 정사각형 ABCD의 네 변이 각각 좌표축에 평행하고, 대각선 AC의 교점이 P이며, 점 A의 x좌표가 -2보다 작으므로, 점 A, C의 좌표를 각각 $\mathrm{A}\left(-2-a,\ \frac{1}{4}-a\right)$, $\mathrm{C}\left(-2+a,\ \frac{1}{4}+a\right)$ $(a>0)$로 둘 수 있다. ③ C가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로 $\frac{1}{4}+a=\frac{-2+a+3}{4(-2+a)+8}=\frac{a+1}{4a}$. ④ 따라서 $4a\left(\frac{1}{4}+a\right)=a+1$, $4a^2=1$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다. ⑤ 그러므로 $\mathrm{A}\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$인데, 꼭짓점 B의 x좌표는 C의 x좌표와 같고, B의 y좌표는 A의 y좌표와 같으므로 $\mathrm{B}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$이다. **[다른 풀이]** ①, ②, ⑤ 앞의 풀이와 동일 ③ 점 C를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 점 $\mathrm{C}'(a, a)$는 $y=\frac{1}{4x}$의 그래프 위에 있다. ④ 따라서 $a=\frac{1}{4a}$, $4a^2=1$ $(a>0)$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다. **[채점 기준]** 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ④까지만 맞는 경우 3등급 : ③까지만 맞는 경우 4등급 : ②까지만 맞는 경우 5등급 : ①까지만 맞는 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	10
〈문제 1〉 (3) ① 함수 $y=h(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로, $y=h(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-\frac{1}{4}$이다. ② 함수 $y=k(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로, $y=k(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=-1+b$이다. ③ 두 함수 $y=h(x)$, $y=k(x)$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 영역이 정사각형이 되려면 $4-(-2)=\left\|(-1+b)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\|$을 만족해야 한다. 따라서 $6=\left\|b-\frac{3}{4}\right\|$로부터 $b=\frac{27}{4}$, $-\frac{21}{4}$이다.  〈참고용 그림〉	10

채점 기준	배점
[채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ①, ② 과정은 맞고 ③의 계산이 틀린 경우 3등급 : ①, ② 과정에서 구한 값 중에 하나가 틀린 경우 4등급 : ①, ② 과정에서 구한 값 중에 두 개가 틀린 경우 5등급 : ①, ② 과정에서 구한 값 중에 하나만 맞은 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	
〈문제 2〉 (1) ① $\angle AOP=\theta$라 하자. 호 AP의 길이는 $a=1\times\theta=\theta$이다. 또 호 AQ의 길이는 $2a=1\times\angle AOQ$이므로 $\angle AOQ=2a$이다. 따라서 $\angle POQ=a+2a=3a$이다. ② 부채꼴 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times3a=\frac{3a}{2}$이고 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times\sin3a=\frac{\sin3a}{2}$이므로 활꼴의 넓이는 $f(a)=\frac{1}{2}(3a-\sin3a)$이다. ③ $\overline{PH}=\sin3a$, $\overline{OH}=\cos3a$이고 삼각형 PHQ의 넓이는 삼각형 OPQ의 넓이에서 삼각형 OPH의 넓이를 뺀 것이므로 $g(a)=\frac{1}{2}\sin3a-\frac{1}{2}\sin3a\cos3a=\frac{1}{2}\sin3a(1-\cos3a)$이다. [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ①, ③ 과정은 맞고 ②의 과정 중 하나만 틀린 경우 3등급 : ①, ③ 과정은 맞고 ②가 모두 틀린 경우 4등급 : ①, ② 과정만 맞고 ③이 틀린 경우 5등급 : ①만 맞고 ②, ③의 과정으로 가지 못한 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	10
〈문제 2〉 (2) ① $\lim_{a\to0+}\frac{f(a)}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{\frac{1}{2}(3a-\sin3a)}{a}$ ② $=\frac{1}{2}\left(\lim_{a\to0+}\frac{3a}{a}-3\lim_{a\to0+}\frac{\sin3a}{3a}\right)$ ③ $=\frac{1}{2}(3-3)=0$ [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ②의 각 극한값은 모두 알고 있으나 답만 틀리게 구한 경우 3등급 : ②의 각 극한값 중 하나가 틀린 경우 4등급 : ②의 식만 쓰고 극한값을 구하지 못한 경우 5등급 : ①의 식만 있는 경우 또는 풀이는 없고 답만 쓴 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	5
〈문제 2〉 (3) ① $\lim_{a\to0+}\frac{g(a)}{a^3}=\lim_{a\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin3a(1-\cos3a)}{a^3}=\frac{1}{2}\lim_{a\to0+}\frac{\sin3a\times\sin^2 3a}{a^3(1+\cos3a)}$ ② $=\frac{1}{2}\lim_{a\to0+}\left(\frac{\sin3a}{a}\right)^3\times\frac{1}{1+\cos3a}$ ③ $=\frac{1}{2}\lim_{a\to0+}27\times\left(\frac{\sin3a}{3a}\right)^3\times\lim_{a\to0+}\frac{1}{1+\cos3a}=\frac{27}{4}$ 이다.	10

채점 기준	배점
[채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ③의 각 극한값은 모두 알고 있으나 답만 틀리게 구한 경우 3등급 : ③의 각 극한값 중 하나가 틀린 경우 4등급 : ②의 식만 쓰고 극한값을 구하지 못한 경우 5등급 : ①의 식만 있는 경우 또는 풀이는 없고 답만 쓴 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	
〈문제 3〉 (1) ① 점 A는 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x+10$위에 있으므로 A의 y좌표는 $\frac{8}{3}-2+10=\frac{32}{3}$이다. ② $y'=x^2-1$이므로 $x=2$인 점 A에서의 접선의 기울기는 $2^2-1=3$이고, ③ 접선의 방정식은 $y=3(x-2)+\frac{32}{3}$, 즉 $y=3x+\frac{14}{3}$이다. **[채점 기준]** 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ①, ② 과정은 맞고 ③의 과정 중 계산만 틀린 경우 3등급 : ①, ② 과정이 있으나 A의 y좌표 또는 접선의 기울기 하나만 맞춘 경우 4등급 : ①, ② 과정이 있으나 A의 y좌표와 접선의 기울기가 모두 틀린 경우 5등급 : ①만 맞고 ②, ③의 과정으로 가지 못한 경우 또는 답만 쓴 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	10
〈문제 3〉 (2) ① 접선과 이 곡선이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{1}{3}x^3-x+10=3x+\frac{14}{3}$를 만족한다. ② $\frac{1}{3}(x^3-12x+16)=0$에서 ③ $\frac{1}{3}(x-2)^2(x+4)=0$ ④ $x=2,\ x=-4$이므로 B의 x좌표는 -4이다. **[채점 기준]** 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ①, ②, ③ 과정은 맞고 ④의 답이 틀린 경우 3등급 : ①, ②, ③ 과정이 있으나 ③의 인수분해가 틀린 경우 4등급 : ①, ② 과정이 있으나 ③의 과정으로 가지 못한 경우 5등급 : ①만 맞고 다음 과정으로 가지 못한 경우 또는 답만 쓴 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	5
〈문제 3〉 (3) ① $\left(\frac{1}{3}x^3-x+10\right)-\left(3x+\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{3}(x-2)^2(x+4)$이므로 구간 $[-4,2]$에서 $\left(\frac{1}{3}x^3-x+10\right)-\left(3x+\frac{14}{3}\right)\geq 0$, 즉 $\frac{1}{3}x^3-x+10\geq 3x+\frac{14}{3}$이다. ② 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x+10$과 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_{-4}^{2}\left\{\frac{1}{3}x^3-x+10-\left(3x+\frac{14}{3}\right)\right\}dx$ ③ $=\left[\frac{1}{12}x^4-2x^2+\frac{16}{3}x\right]_{-4}^{2}$ ④ $=\frac{16}{12}-8+\frac{32}{3}-\frac{256}{12}+32+\frac{64}{3}=36$ 이다.	10

채점 기준	배점

[다른 풀이] 위의 ①, ②과정을 묶어서 다음과 같이 서술해도 정답임.

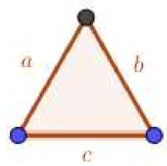
곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x+10$과 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-4}^{2}\left|\frac{1}{3}x^3-x+10-\left(3x+\frac{14}{3}\right)\right|\,dx$$
$$=\int_{-4}^{2}\left\{\frac{1}{3}x^3-x+10-\left(3x+\frac{14}{3}\right)\right\}dx$$

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우
2등급 : ②, ③, ④는 모두 맞으나 ①이 없거나 다른 풀이의 절댓값이 없는 경우
3등급 : ①, ②, ③ 과정은 맞고 ④의 답이 틀린 경우
4등급 : ①, ② 과정은 맞고 ③의 적분이 틀린 경우
5등급 : ①, ② 과정만 있고 다음으로 가지 못한 경우
6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우

〈문제 4〉 (1) — 5점

① $n=1$인 경우: $f(0)=1,\ f(1)=1$
② $n=2$인 경우: $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=1$
③ 오른쪽 그림과 같이 왼쪽 아래로 한 칸 이동하는 것을 a, 오른쪽 아래로 한 칸 이동하는 것을 b라 하면, B에서 $(k,0)$으로 가는 최단경로는 a와 b형태의 선분만 사용하여 $(k,0)$에 도달해야 하므로 최단경로의 가짓수는 $(n-k)$개의 a와 k개의 b를 일렬로 늘어놓는 순열의 수이다.
(또는 n개의 자리 중에서 b를 놓을 k개의 자리를 선택하는 조합의 수로 설명해도 됨.)



④ 따라서 $f(k)={}_nC_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$이다.

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우
2등급 : ①, ② 과정은 맞게 구하고, ③의 설명이 없이 ④를 맞게 구한 경우
3등급 : ①, ② 과정은 맞게 구하고, ③~④ 과정을 잘못 접근한 경우
4등급 : ①, ② 과정을 맞게 구한 경우
5등급 : ①만 맞은 경우
6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우

〈문제 4〉 (2) — 10점

① $g(n)=\sum_{k=0}^{n}f(k)=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k$

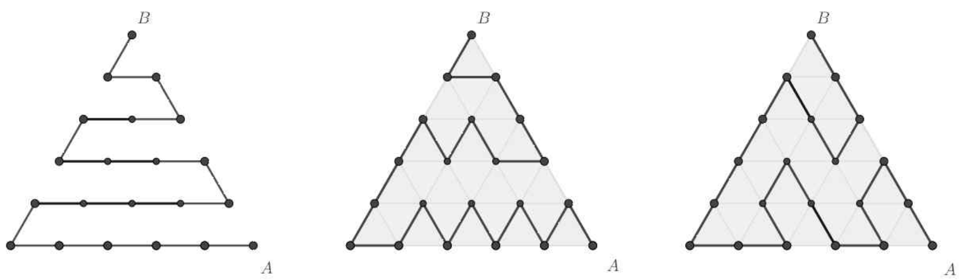
② $\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k={}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n$

③ ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우
2등급 : ④까지만 맞는 경우

채점 기준	배점
3등급 : ③까지만 맞는 경우 4등급 : ②까지만 맞는 경우 5등급 : ①까지만 맞는 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	
〈문제 4〉 (3) ① n^2개의 합동인 정삼각형으로 분할된 정삼각형 OAB에는 $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 개의 꼭짓점이 있다. ② 한번 지난 점은 다시 지나지 않고 모든 꼭짓점을 지나는 경로가 존재하면 이 경로가 가장 긴 경로이고, ③ 위 ②를 만족하는 경로의 길이가 1인 선분 개수는 $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ 이다. ④ 이제 점 B에서 점 A로 가는 길이가 $\frac{n(n+3)}{2}$ 인 경로가 존재함을 보이자. ⑤ x축과 평행한 선분은 $\frac{n(n+1)}{2}$ 개가 있다. x축과 평행한 모든 선분을 변 OB 또는 AB 위의 n개의 선분을 이용해 연결하여 B에서 A로 가는 하나의 경로로 만들면 길이가 $\frac{n(n+3)}{2}$ 인 경로가 된다. (다른 형태의 경로를 제시해도 됨)  ($n = 5$인 경우 최장경로 예시) [채점 기준] 1등급 : 전 과정이 모두 맞는 경우 2등급 : ④까지만 맞고 올바른 경로 제시를 못한 경우 3등급 : ①~③까지만 맞는 경우 (최장경로의 길이가 $\frac{n(n+3)}{2}$ 보다 작거나 같다), 또는 ⑤의 예를 하나 제시한 경우 4등급 : ②까지만 맞는 경우 5등급 : ①까지만 맞는 경우, 또는 틀린 예를 제시한 경우 6등급 : 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우	10점

4. 예시답안

〈문제 1〉 (1)

$f(x) = \frac{x+3}{4x+8} = \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{4}$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = -2$, $y = \frac{1}{4}$ 이다.

$g(x) = -\frac{x-3}{x-4} = -\frac{1}{x-4} - 1$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = 4$, $y = -1$ 이다.

따라서 두 그래프의 점근선으로 둘러싸인 영역은 직사각형이고, 그 넓이는 $6 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{2}$ 이다.

〈문제 1〉 (2)

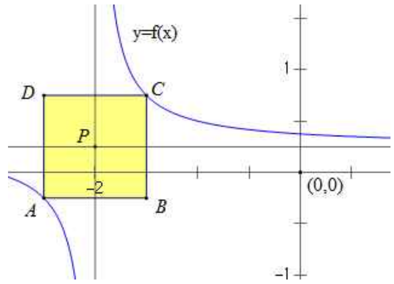
점 P의 좌표는 $P\left(-2, \frac{1}{4}\right)$이다. 정사각형 ABCD의 네 변이 각각 좌표축에 평행하고, 대각선 AC의 교점이 P이며, 점 A의 x좌표가 -2보다 작으므로, 점 A, C의 좌표를 각각 $A\left(-2-a, \frac{1}{4}-a\right)$, $C\left(-2+a, \frac{1}{4}+a\right)$ $(a>0)$로 둘 수 있다.

C가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로

$\frac{1}{4}+a=\frac{-2+a+3}{4(-2+a)+8}=\frac{a+1}{4a}$이다.

따라서 $4a\left(\frac{1}{4}+a\right)=a+1$, $4a^2=1$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다.

그러므로 $A\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$, $C\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$인데, 꼭짓점 B의 x좌표는 C의 x좌표와 같고, B의 y좌표는 A의 y좌표와 같으므로 $B\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$이다.



〈참고용 그림〉

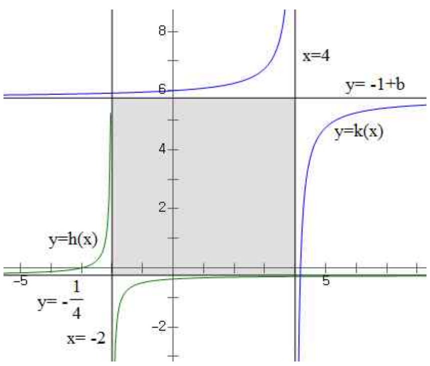
〈문제 1〉 (3)

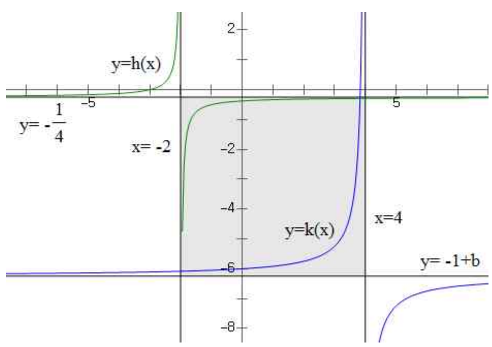
함수 $y=h(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로, $y=h(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-\frac{1}{4}$이다.

함수 $y=k(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로, $y=k(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=-1+b$이다.

두 함수 $y=h(x)$, $y=k(x)$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 영역이 정사각형이 되려면

$4-(-2)=\left|(-1+b)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right|$을 만족해야 한다. 따라서 $6=\left|b-\frac{3}{4}\right|$로부터 $b=\frac{27}{4}$, $-\frac{21}{4}$이다.





〈참고용 그림〉

※ 채점시에만 제시할 다른 풀이

〈문제 1〉 (2) [다른 풀이 방법]

점 P의 좌표는 $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$이다. 정사각형 ABCD에서 대각선 BD의 중점도 P이다.

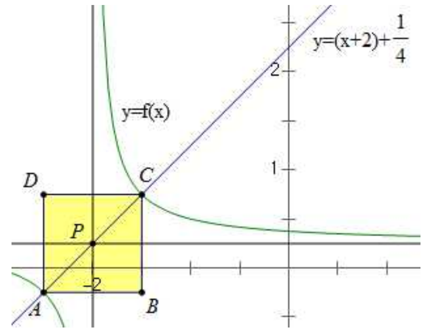
따라서 각 변이 좌표축에 평행한 정사각형 ABCD는 직선 $y=(x+2)+\frac{1}{4}$에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 A와 C는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=(x+2)+\frac{1}{4}$ 의 그래프의 교점이다.

식 $\frac{1}{4(x+2)}+\frac{1}{4}=(x+2)+\frac{1}{4}$ 로부터 $(x+2)^2=\frac{1}{4}$이고,

$x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$ 인데,

조건에 의하여 점 A의 x좌표는 -2보다 작으므로 $-\frac{5}{2}$이고 점 C의 x좌표는 -2보다 크므로 $-\frac{3}{2}$이다. 그리고 점 A의 y좌표는 $-\frac{1}{4}$이다. 따라서 $\mathrm{B}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$이다.



〈참고용 그림〉

〈문제 2〉 (1)

$\angle \mathrm{AOP}=\theta$라 하자. 호 AP의 길이는 $a=1\times\theta=\theta$이다. 또 호 AQ의 길이는 $2a=1\times\angle\mathrm{AOQ}$이므로 $\angle\mathrm{AOQ}=2a$이다. 따라서 $\angle\mathrm{POQ}=a+2a=3a$이다.

부채꼴 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times 3a=\frac{3a}{2}$이고 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin 3a=\frac{\sin 3a}{2}$이므로 활꼴의 넓이는 $f(a)=\frac{1}{2}(3a-\sin 3a)$이다.

$\overline{\mathrm{PH}}=\sin 3a$, $\overline{\mathrm{OH}}=\cos 3a$이고 삼각형 PHQ의 넓이는 삼각형 OPQ의 넓이에서 삼각형 OPH의 넓이를 뺀 것이므로

$$g(a)=\frac{1}{2}\sin 3a-\frac{1}{2}\sin 3a\cos 3a=\frac{1}{2}\sin 3a(1-\cos 3a)$$

이다.

〈문제 2〉 (2)

$$\lim_{a\to 0+}\frac{f(a)}{a}=\lim_{a\to 0+}\frac{\frac{1}{2}(3a-\sin 3a)}{a}=\frac{1}{2}\left(\lim_{a\to 0+}\frac{3a}{a}-3\lim_{a\to 0+}\frac{\sin 3a}{3a}\right)=\frac{1}{2}(3-3)=0$$이다.

〈문제 2〉 (3)

$$\lim_{a\to 0+}\frac{g(a)}{a^3}=\lim_{a\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\sin 3a(1-\cos 3a)}{a^3}=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0+}\frac{\sin 3a\times\sin^2 3a}{a^3(1+\cos 3a)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0+}\left(\frac{\sin 3a}{a}\right)^3\times\frac{1}{1+\cos 3a}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0+}27\times\left(\frac{\sin 3a}{3a}\right)^3\times\frac{1}{1+\cos 3a}=\frac{27}{4}$$ 이다.

〈문제 3〉 (1)

점 A는 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x+10$위에 있으므로 A의 y좌표는 $\frac{8}{3}-2+10=\frac{32}{3}$이다. $y'=x^2-1$이므로 $x=2$인 점 A에서의 접선의 기울기는 $2^2-1=3$이고, 접선의 방정식은 $y=3(x-2)+\frac{32}{3}$, 즉 $y=3x+\frac{14}{3}$이다.

〈문제 3〉 (2)

접선과 이 곡선이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{1}{3}x^3-x+10=3x+\frac{14}{3}$를 만족한다.
$\frac{1}{3}(x^3-12x+16)=0$에서 $(x-2)(x^2+2x-8)=(x-2)^2(x+4)=0$이므로 $x=2,\ x=-4$이다. 따라서 B의 x좌표는 -4이다.

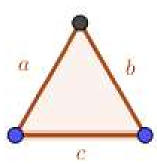
〈문제 3〉 (3)

$\left(\frac{1}{3}x^3-x+10\right)-\left(3x+\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{3}(x-2)^2(x+4)$ 이므로 구간 $[-4,2]$에서
$\left(\frac{1}{3}x^3-x+10\right)-\left(3x+\frac{14}{3}\right)\geq 0$, 즉 $\frac{1}{3}x^3-x+10\geq 3x+\frac{14}{3}$이다.
따라서 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x+10$과 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-4}^{2}\left\{\frac{1}{3}x^3-x+10-\left(3x+\frac{14}{3}\right)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4-2x^2+\frac{16}{3}x\right]_{-4}^{2}$$
$$=\frac{16}{12}-8+\frac{32}{3}-\frac{256}{12}+32+\frac{64}{3}=36$$

〈문제 4〉 (1)

$n=1$인 경우: $f(0)=1,\ f(1)=1$
$n=2$인 경우: $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=1$



오른쪽 그림과 같이 왼쪽 아래로 한 칸 이동하는 것을 a, 오른쪽 아래로 한 칸 이동하는 것을 b라 하면, B에서 $(k,0)$으로 가는 최단경로는 a와 b형태의 선분만 사용하여 $(k,0)$에 도달해야 하므로 최단경로의 가짓수는 $(n-k)$개의 a와 k개의 b를 일렬로 늘어놓는 순열의 수이다.

따라서 $f(k)={}_nC_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$이다.

〈문제 4〉 (2)

$g(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k=2^n$ 이다.

이로부터 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$이다.

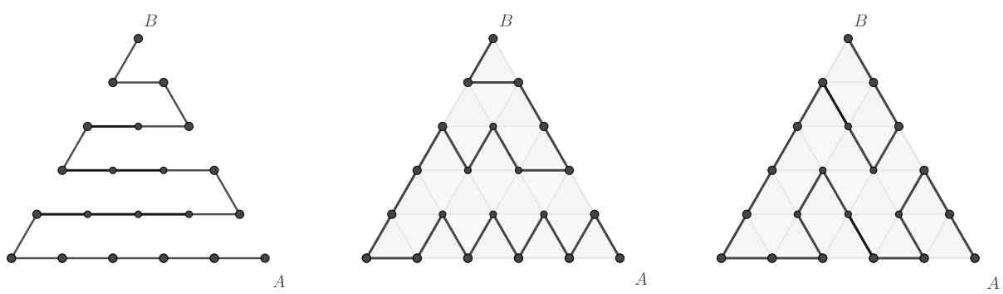
〈문제 4〉 (3)

n^2개의 합동인 정삼각형으로 분할된 정삼각형 OAB에는 $\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$개의 꼭짓점이 있다. 한번 지난 점은 다시 지나지 않고 모든 꼭짓점을 지나는 경로가 존재하면 이 경로가 가장 긴 경로이고, 이 경로에는 길이가 1인 선분이 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$개 있다.

이제 점 B에서 점 A로 가는 길이가 $\frac{n(n+3)}{2}$인 경로가 존재함을 보이자.

x축과 평행한 선분은 $\frac{n(n+1)}{2}$개가 있다. x축과 평행한 모든 선분을 변 OB 또는 AB위의 n개의 선분을 이용해 연결하여 B에서 A로 가는 하나의 경로로 만들면 길이가 $\frac{n(n+3)}{2}$인 경로가 된다. (다른 형태의 경로를 제시해도 됨)

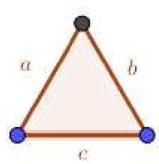
$n=5$인 경우
최장경로 예시



※ 채점시에만 제시할 다른 풀이

〈문제 4〉 (1) [다른 풀이 방법 1]

$n=1$인 경우: $f(0)=1,\ f(1)=1$
$n=2$인 경우: $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=1$



오른쪽 그림과 같이 왼쪽 아래로 한 칸 이동하는 것을 a, 오른쪽 아래로 한 칸 이동하는 것을 b라 하면, a를 따라 y좌표가 감소하는 방향으로 이동하면 y좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 만큼 감소하고 x좌표는 $\frac{1}{2}$만큼 감소한다. 그리고 b를 따라 y좌표가 감소하는 방향으로 이동하면 y좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 만큼 감소하고 x좌표는 $\frac{1}{2}$만큼 증가한다. c를 따라 이동하면 y좌표는 변하지 않는다.

한 변의 길이가 n인 정삼각형 OAB의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}n$이고 점 $(k,0)$의 y좌표는 0이므로 B에서 (k,0)으로 가는

임의의 경로에 a형태의 선분이 r개, b형태의 선분이 s개, c형태의 선분이 m개 있다면 $r+s+m \geq r+s \geq n$이다. 따라서 가능한 경로의 길이는 n이상이고, 경로의 길이가 n인 경우는 사용한 모든 a,b 형태의 선분이 y좌표가 감소하는 방향으로 이동하고 c형태의 선분은 사용되지 않는 경우이다.

이 경우 $(r+s=n, m=0)$, x좌표는 $\frac{(n-r+s)}{2}=k$이어야 하므로 $r=n-k, s=k$이다.

그러므로 $f(k)$는 $(n-k)$개의 a와 k개의 b를 일렬로 늘어놓는 가짓수 $f(k)={}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$이다.

〈문제 4〉 (1) **[다른 풀이 방법 2]**

$n=1$인 경우의 $f(0), f(1)$을 첫 번째 줄
$n=2$인 경우의 $f(0), f(1), f(2)$를 두 번째 줄
이런식으로 $f(k)$를 배열하면 $n \geq 2$인 경우,
n번째 줄의 $f(k)$는 $k=0$일 때는 $(n-1)$번째 줄의 $f(0)$,
n번째 줄의 $f(k)$는 $1 \leq k \leq n-1$일 때는 $(n-1)$번째 줄의 $f(k-1)+f(k)$,
n번째 줄의 $f(k)$는 $k=n$일 때는 $(n-1)$번째 줄의 $f(n-1)$이고
$n=1$인 경우: $f(0)=1, f(1)=1$
이므로 파스칼 삼각형이 된다.

따라서 $f(k)={}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$이다.

〈문제 4〉 (2) **[다른 풀이 방법]**

점 B와 각각의 점 (0,0), (1, 0), ... , (n,0)사이의 최단거리 경로의 개수는 P, O, (n-1, 0)으로 이루어진 삼각형 위에 있는 점 P와 각각의 점 (0,0), (1, 0), ... , (n-1,0) 을 연결하는 최단경로의 개수의 합과 Q, (1,0), (n,0)으로 이루어진 삼각형 위에 있는 점 Q와 각각의 점 (1,0), (2, 0), ... , (n,0)을 연결하는 최단경로의 개수의 합을 더한 것과 같고 이는 $2g(n-1)$이다. 따라서 점화식 $g(n)=2g(n-1), n \geq 2$, $g(1)=2$가 성립한다.
이로부터 $g(n)=2^{n-1}g(1)=2^n$이고
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$이다.