〈문제 4〉 단백질의 구성단위는 아미노산이다. 이들 아미노산들은 펩타이드 결합을 통해 긴 사슬 모양의 1차 단백질 구조를 이루게 된다. 결국 단백질의 종류는 아미노산의 종류, 수, 배열 순서에 의해 결정된다. 일반적인 아미노산의 형태는 좌우가 비대칭이기 때문에 종류가 n가지인 아미노산 m개로 만들 수 있는 단백질 종류의 수는 n^m가지가 된다. 예를 들어 A, B, C 세 종류의 아미노산 두 개로 만들 수 있는 단백질 종류는 AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC으로 $9(=3^2)$가지이다. [총 15점]

(1) A, B, C, D 네 종류의 아미노산 5개로 이루어진 단백질들 중에서 아미노산 A를 두 개 이상 포함한 종류의 수를 구하시오. [7점]

(2) E, F, G 세 종류의 아미노산이 각각 2개씩 있다. 이들 총 6개의 아미노산 중에서 5개를 골라 만들 수 있는 단백질 종류의 수를 구하시오. [8점]

2. 출제의도 및 문제해설

가. 출제의 방향

이번 자연계 논술 시험은 수험생의 학업 부담을 경감시키고자 수학 문제로만 구성하여, 고등학교 수학의 기초 원리를 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 고등학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있는 수리적 문제 상황을 만들고, 논리적인 사고를 따르면 쉽게 해결할 수 있는 세부 문제로 구성하였다. 개별적인 교과지식의 반복학습과 암기를 통해 습득된 지식을 묻는 것을 지양하고, 수학적 원리에 대한 이해를 기초로 수리적 현상을 논리적으로 기술할 수 있는지를 평가하였다. 그리고 평가의 객관성을 위해 채점의 기준을 최대한 객관화할 수 있는 문제를 출제하였다.

나. 문항별 출제의도

[문제 1(1)] 절댓값을 포함한 일차부등식을 이해하여 함수의 최솟값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지 평가

[문제 1(2)] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고 활용할 수 있는지 평가

[문제 1(3)] 다항함수의 미분법을 이해하고, 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 논리적으로 판정할 수 있는지 평가

[문제 2(1)] 쌍곡선의 뜻을 알고, 이를 실제 상황에 적용할 수 있는지 평가

[문제 2(2)] 주어진 상황을 쌍곡선과 원의 개념을 적용하여 이해하고, 이들 이차곡선의 식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가

[문제 3(1)] 주어진 가속도로부터 정적분을 통해 속도와 위치를 구한 후 속도가 위치의 도함수라는 관계를 이용하여 위치의 극댓값을 구할 수 있는지 평가

[문제 3(2)] 움직인 거리가 속도의 절댓값을 정적분하여 구한다는 것을 이해하고, 실제 구간별로 부호가 바뀌는 속도를 주어진 구간에 대해 정적분 할 수 있는지 평가

[문제 4(1)] 중복순열과 조합을 응용하여 경우의 수를 구할 수 있는지 평가

[문제 4(2)] 중복순열을 새롭게 응용하여 적용하는 상황에서 경우의 수를 구할 수 있는지 평가

다. 출제근거

1) 교육과정 근거

문항		관련 성취기준
문제 1(1)	교육과정	[수학Ⅰ]-㈏ 방정식과 부등식-[4] 여러 가지 부등식 ① 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. [수학Ⅰ]-㈐ 도형의 방정식-[2] 직선의 방정식 ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ]-(2) 방정식과 부등식-(라) 여러 가지 부등식 수학1241. 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. [수학Ⅰ]-(3) 도형의 방정식-(나) 직선의 방정식 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1(2)	교육과정	[수학Ⅰ]-㈏ 방정식과 부등식-[2] 이차방정식과 이차함수 ③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅰ]-㈎ 다항식-[1] 다항식의 연산 ① 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ]-(2) 방정식과 부등식-(나) 이차방정식과 이차함수 수학1223. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅰ]-(1) 다항식-(가) 다항식의 연산 수학1111. 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
문제 1(3)	교육과정	[미적분Ⅰ]-㈐ 다항함수의 미분법-[3] 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ]-(3) 다항함수의 미분법-(다) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문제 2(1)	교육과정	[기하와 벡터]-㈎ 평면 곡선-[1] 이차곡선 ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]-(1) 평면곡선-(가) 이차곡선 기벡1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 2(2)	교육과정	[기하와 벡터]-㈎ 평면 곡선-[1] 이차곡선 ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. [수학Ⅰ]-㈐ 도형의 방정식-[3] 원의 방정식 ① 원의 방정식을 구할 수 있다 [수학Ⅰ]-㈏ 방정식과 부등식-[3] 여러 가지 방정식 ② 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]-(1) 평면곡선-(가) 이차곡선 기벡1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. [수학Ⅰ]-(3) 도형의 방정식-(다) 원의 방정식 수학1331. 원의 방정식을 구할 수 있다. [수학Ⅰ]-(2) 방정식과 부등식-(다) 여러 가지 방정식 수학1232-2. 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
문제 3(1)	교육과정	[미적분Ⅰ] (다) 다항함수의 미분법 - 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분Ⅰ] (라) 다항함수의 적분법 - 3 정적분의 활용 ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분Ⅰ] (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1336. 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있다. [미적분Ⅰ] (4) 다항함수의 적분법 - (다) 정적분의 활용 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 3(2)	교육과정	[미적분Ⅰ] (라) 다항함수의 적분법 - 3 정적분의 활용 ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] (4) 다항함수의 적분법 - (다) 정적분의 활용 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

문제 4(1)	교육과정	[확률과 통계] (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 미적1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 미적1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 미적1123-3. 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
문제 4(2)	교육과정	[확률과 통계] (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 미적1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 미적1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 미적1123-3. 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

문항	출처
문제 1(1)	[수학I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 124쪽, 118쪽 [수학I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 124쪽, 164쪽
문제 1(2)	[수학I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 124쪽, 89쪽 [수학I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 124쪽, 12쪽
문제 1(3)	[미적분I] 미래엔, 이강섭외 15인, 2014년, 117쪽, 120쪽
문제 2(1)	[기하와 벡터] 미래엔, 이강섭외 15인, 2014년, 27쪽
문제 2(2)	[기하와 벡터] 미래엔, 이강섭외 15인, 2014년, 34쪽 [수학I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 124쪽, 186쪽
문제 3(1)	[미적분I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 142쪽 [미적분I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 226쪽
문제 3(2)	[미적분I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 142쪽 [미적분I] 동아출판, 우정호외 25인, 2014년, 226쪽
문제 4(1)	[확률과 통계] 미래엔, 이강섭외 15인, 2014년, 18쪽 [확률과 통계] 미래엔, 이강섭외 15인, 2014년, 30쪽
문제 4(2)	[확률과 통계] 미래엔, 이강섭외 15인, 2014년, 18쪽 [확률과 통계] 미래엔, 이강섭외 15인, 2014년, 30쪽

3. 평가기준

가. 배점기준표(자연계열)

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	8	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	7	
문제1(3)	10	
문제2(1)	5	
문제2(2)	10	
문제3(1)	8	
문제3(2)	7	
문제4(1)	7	
문제4(2)	8	

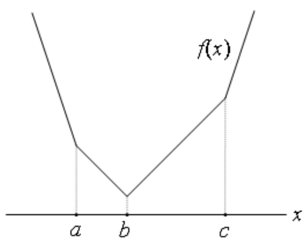
나. 채점기준

* 각 문제에 대하여 아래에 제시된 답안에서와 같이 단계에 따라 점수를 부여한다.
* 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1점을 감점한다.
* 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1점을 감점한다.

〈문제 1(1)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [8점]

① $f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| = \begin{cases} (a+b+c) - 3x, & x \le a \\ -(a-b-c) - x, & a < x \le b \\ -(a+b-c) + x, & b < x \le c \\ -(a+b+c) + 3x, & x > c \end{cases}$

② 그래프 그리기



③ 따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f(b) = |b-a| + |b-c| = (b-a) + (c-b) = c - a = R$ 이다.

〈문제 1(2)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [7점]

① $g(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (a^2+b^2+c^2)$

$$= 3\left(x - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 - \frac{(a+b+c)^2}{3} + (a^2+b^2+c^2)$$

② $g(x)$의 최솟값은 $-\frac{(a+b+c)^2}{3} + (a^2+b^2+c^2)$ 이다.

③ $-\frac{(a+b+c)^2}{3} + (a^2+b^2+c^2) = \frac{2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca)}{3}$

$$= \frac{1}{3}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$$= \frac{1}{3}(P^2 + Q^2 + R^2)$$

〈문제 1(3)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [10점]

① $h(x) = (x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3$

$\quad = 3x^3 - 3(a+b+c)x^2 + 3(a^2+b^2+c^2)x - (a^3+b^3+c^3)$

② $h'(x) = 9x^2 - 6(a+b+c)x + 3(a^2+b^2+c^2)$

$\quad = 3\{3x^2 - 2(a+b+c)x + (a^2+b^2+c^2)\}$

③ $D = (a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) = 2(ab+bc+ca) - 2(a^2+b^2+c^2)$

④ $D = -\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} < 0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $h'(x) > 0$이다.

⑤ 따라서 $h(x)$는 증가함수이므로, $a \le x \le c$인 범위에서 함수 $h(x)$의 최솟값은

$h(a) = (a-b)^3 + (a-c)^3 = P^3 - R^3$이다.

〈문제 2(1)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [5점]

① 이 배는 B기지에 더 가까우며 두 기지까지의 거리의 차는

$0.0005 \times 200000 = 100$ ㎞이다.

② 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선 모양의 항로를 따른다면,

이 거리의 차이는 일정하게 유지되고, $2a = 100$, $a = 50$이다.

③ 따라서 이 배가 해안에 닿는 지점의 x좌표는 50이다.

〈문제 2(2)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [10점]

① 이 배는 A기지에 더 가까우며 두 기지까지의 거리의 차는

$0.001 \times 200000 = 200$ ㎞이므로 $a = 100$이다.

② 두 초점이 $A(-120, 0)$, $B(120, 0)$이므로, 쌍곡선의 식 $\dfrac{x^2}{100^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에서

$120^2 = a^2 + b^2$이 성립한다.

③ $a = 100$이므로 $120^2 = 100^2 + b^2$에서 $b^2 = 120^2 - 100^2 = 14400 - 10000 = 4400$이다.

따라서 쌍곡선의 식은 $\dfrac{x^2}{100^2} - \dfrac{y^2}{4400} = 1$이다.

④ A기지와 B기지 사이의 중점은 좌표평면의 원점이고,

이 지점에서 $20\sqrt{70}$ km 떨어져있는 배의 위치 (x, y)는

원의 방정식 $x^2 + y^2 = 28000$을 만족한다.

⑤ 따라서 ③의 식과 ④의 식을 연립하여

$$44x^2 - 100y^2 = 440000$$
$$100x^2 + 100y^2 = 2800000$$

$144x^2 = 3240000$, $\quad x^2 = 22500$, $\quad x = \pm 150$이다.

⑥ 배가 A기지에 더 가까우므로, 이 배의 위치의 x좌표는 -150이다.

〈문제 3(1)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [8점]

① $v_0 = 2$로부터 가속도 $a(t) = -e^t$을 정적분하여 얻은 점 P의 속도는

$v(t) = v_0 + \displaystyle\int_0^t a(u)du = 3 - e^t$이 된다.

② $x_0 = 0$로부터 속도 $v(t) = 3 - e^t$을 다시 정적분하여 얻은 P의 위치는

$x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t v(u)du = 3t - e^t + 1$이 된다.

③ 물체가 양의 방향으로 가장 멀리 도달한 시간은 $v(t) = 0$일 때, 즉 $t = \ln 3$이다.

④ 이 때 점 P의 위치는 $x(\ln 3) = 3\ln 3 - 2$가 된다.

〈문제 3(2)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [7점]

① 점 P가 시각 $t=0$부터 시각 $t=2$까지 움직인 거리는 $\int_0^2 |v(t)|dt$이다.

② $0<\ln 3<2$이므로 속도 $v(t)$는 시각 $t=0$부터 시각 $t=\ln 3$까지는 양의 값을, 그 이후는 음의 값을 가진다.

③ 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2 |v(t)|dt = \int_0^{\ln 3}(3-e^t)dt - \int_{\ln 3}^2 (3-e^t)dt = 6\ln 3 + e^2 - 11$이 된다.

〈문제 4(1)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [7점]

① 4종류의 아미노산 5개로 만들 수 있는 단백질 종류의 수는 4^5=1024가지이다.

② 이들 중 아미노산 A를 한 개도 포함하지 않는 경우의 수는 3^5=243가지이고, 아미노산 A를 한 개만 포함하는 경우는 ${}_5C_1 \times 3^4$=405가지이다.

③ 이로부터 아미노산 A를 2개 이상 포함하는 단백질 종류의 수는 1024-243-405=376가지가 된다.

〈문제 4(2)〉 아래에 제시된 단계에 따라 점수를 부여한다. [8점]

① 3종류의 아미노산으로 각각 최대 2개까지 뽑아서 5개를 만들 수 있는 경우의 수는 (n(A),n(B),n(C)) = (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2) 세 가지이다.

② 그 각각의 경우 배열 가능한 단백질의 종류의 수는 ${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1$=30가지가 된다.

③ 이로부터 전체 단백질 종류의 수는 3×30=90가지가 된다.