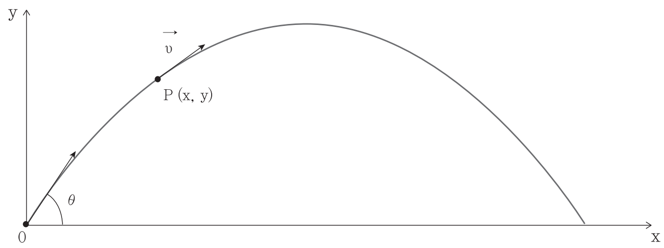
문제 3

아래 그림과 같이 지면을 x축, 지면에 수직인 방향을 y축으로 하는 좌표평면을 설정하고, 시각 $t=0$일 때 원점 O로부터 발사된 공의 위치를 점 $\mathrm{P}(x, y)$로 나타내었다. 공을 원점 O에서 속력 v_0로 x축의 양의 방향과 예각 θ를 이루는 방향으로 발사했다고 하면 시각 t일 때 공의 속도는 $\vec{v}=(v_0\cos\theta,\ -10t+v_0\sin\theta)$로 주어진다. 공이 x축으로부터 높이 36인 한 지점을 지날 때 관측된 속도가 $\vec{v}=(15, 24)$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 30점]



(1) 점 P의 y좌표의 최댓값을 구하시오. [10점]

(2) 원점 O에서 발사된 공이 다시 지면에 닿는 지점의 x좌표를 구하시오. [10점]

(3) 이번에는 공을 원점 O에서 속력 v_0로 x축의 양의 방향과 예각 $\frac{\theta}{2}$를 이루는 방향으로 발사했다. 이때 발사된 공이 다시 지면에 닿는 지점의 x좌표를 구하시오. [10점]

문제 4

자연수 n에 대하여 $p\times q\times r=5^n$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어, $a_1=0$이다. 다음 물음에 답하시오. [총 15점]

(1) $a_n\neq 0$인 자연수 n의 최솟값을 k라 할 때, k의 값을 구하시오. [5점]

(2) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값을 구하시오. [10점]

02 출제개요

가. 출제의도

문제 1

미적분 I 에서 다루는 다항함수의 미적분은 도함수를 구하고 이를 활용하며, 부정적분과 정적분을 구하고 이를 이용하여 도형의 넓이와 부피 등을 구하는 과정으로 되어 있다. 본 문제의 출제 의도는 이러한 과정 전반을 이해하고 활용할 줄 알아야 풀 수 있도록 함으로써 미적분 전반에 관한 종합적 사고력을 측정하기 위한 것이다.

문제 2

미적분 II 에서 다루는 호도법과 부채꼴의 넓이에 대한 이해를 바탕으로 삼각함수를 활용하여 도형의 넓이 문제를 정확히 분석하고 논리적 과정을 통하여 해결할 수 있는 지 평가하고자 한다. 또한 삼각함수의 극한에 대한 이해와 적용을 스스로 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 서술할 수 있는 지도 평가하고자 한다.

문제 3

기하와 벡터에서 다루는 평면좌표계에서의 운동에 대한 개념과 미적분 I에서 다루는 정적분 개념을 응용하여 포물선 운동을 하는 물체가 다다를 수 있는 최대 높이와 수평 방향으로 이동한 거리를 구한다. 그리고 미적분 II에서 다루는 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 다른 각도로 발사된 물체가 수평 방향으로 이동한 거리를 구한다. 본 문제는 이러한 과정 전반을 이해하고 활용할 줄 알아야 풀 수 있도록 함으로써 종합적 사고능력을 측정하기 위하여 출제 되었다.

문제 4

확률과 통계에서 다루는 중복조합의 수를 구하고, 이를 이용하여 급수의 합을 계산하도록 함으로써 확률과 통계 교과 및 미적분I의 학습 내용에 관한 종합적 이해와 사고력을 측정하기 위한 것이다.

나. 출제근거

문제 1

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[미적분I]-(다) 다항함수의 미분법- 2 도함수 ② 함수의 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [미적분I]-(라) 다항함수의 적분법- 1 부정적분 ② 함수의 합, 차, 곱의 적분법을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [미적분I]-(라) 다항함수의 적분법- 3 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
성취기준 / 영역별 내용	[미적분I]-(3)다항함수의 미분법- (나) 도함수 미적 1321/1322 / 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [미적분I]-(4)다항함수의 적분법- (가) 부정적분 미적 1411/1412 / 부정적분의 뜻을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [미적분I]-(4)다항함수의 적분법- (다) 정적분의 활용 미적 1431 / 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
미적분I	이강섭외 14인	미래엔	2014	102, 150, 180

문제 2

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[미적분 II]-(나) 삼각함수-1 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다. ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [미적분 II]-(나) 삼각함수-2 삼각함수의 미분 ② 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
성취기준 / 영역별 내용	미적2211-2. 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. 미적2212-1. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 미적2222. 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
미적분 II	이강섭외 14인	미래엔	2014	51, 53, 57, 87

문제 3

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[기하와 벡터] (나) 평면벡터 - 3 평면 운동 (101쪽) ③ 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 I] (라) 다항함수의 적분법 - 3 정적분의 활용 (83쪽) ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 II] (나) 삼각함수 - 3 삼각함수의 미분 (91쪽) ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
성취기준 / 영역별 내용	[기하와 벡터] (2) 평면벡터 – (다) 평면운동 (278쪽) 기벡1232. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 I] (4) 다항함수의 적분법 – (다) 정적분의 활용 (189쪽) 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 II] (2) 삼각함수 – (나) 삼각함수의 미분 (230쪽) 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
기하와 벡터	우정호외 24인	동아출판	2014	137쪽	교과서 자료	
기하와 벡터	이강섭외 14인	미래엔	2014	116쪽	교과서 자료	
미적분 I	우정호외 24인	동아출판	2014	142, 226쪽	교과서 자료	
미적분 II	우정호외 24인	동아출판	2014	103쪽	교과서 자료	
미적분 II	이강섭외 14인	미래엔	2014	83쪽	교과서 자료	
미적분 II	김원경외 11인	비상교육	2014	79쪽	교과서 자료	

문제 4

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	[미적분I]-(가) 수열의 극한-1 수열의 극한 ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [미적분I]-(가) 수열의 극한-2 급수 ① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [확률과 통계] (가) 순열과 조합-2 순열과 조합 ④ 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
성취기준 / 영역별 내용	[미적분I]-(1) 수열의 극한 (가) 수열의 극한 미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [미적분I]-(1) 수열의 극한 (나) 급수 미적 1121. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고 이를 판별할 수 있다. [확률과 통계] (1) 순열과 조합 – (나) 순열과 조합 미적1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
미적분 1	이강섭외 14인	미래엔	2014	32쪽
확률과 통계	김원경 외 11인	비상	2014	35쪽

다. 문항 해설

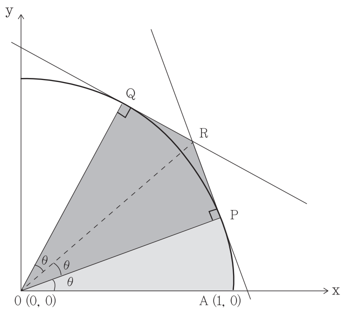
문제 1

(1) $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $\{f'(x)\}^2-8f'(x)=kF(x)$가 성립할 때 도함수와 부정적분의 차수 사이의 관계를 이용하여 $f(x)$의 차수를 구한다.

(2) 앞에서 얻은 정보를 종합하여 $f(x)=x^3+ax$ 꼴로 두고 주어진 관계식을 이용하여 k, a를 구한 다음 $f(x)$를 구한다.

(3) $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점을 구한 다음 그래프의 모양을 보고 주어진 도형의 넓이를 구한다.

문제 2



(1) 원 위의 한 점에서의 접선이 그 점까지의 반지름에 수직이라는 성질에 의하여 $\overline{OP}\perp\overline{PR}$ 임을 서술하고 $\triangle OPR$은 직각삼각형임을 밝힌다. 이로부터 삼각함수의 뜻을 적용하여 $\cos\theta=\dfrac{1}{\overline{OR}}$ 임을 설명하고, $\overline{OR}=\sec\theta$ 임을 보인다.

그리고 $\angle ROA=2\theta$ 임을 확인한다.

이 두 가지 사실로부터 점 R의 x좌표가 $\sec\theta\cos 2\theta$임을 보인다.

(2) 사각형 $OPRQ$의 넓이 $f(\theta)$는 합동인 두 직각삼각형의 넓이의 합임을 이해하고, 직각삼각형 $\triangle OPR$에서 변 OP의 길이는 1이고, 변 PR의 길이는 $\tan\theta$ 임을 보여

$f(\theta)=2\left(\dfrac{1}{2}\overline{OP}\times\overline{PR}\right)=\overline{PR}=\tan\theta$ 임을 설명한다.

(3) 부채꼴 POA의 넓이는 호도법으로 나타낸 중심각 θ에 대하여 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ 임을 이해하여

$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\theta=\dfrac{\theta}{2}$를 구하고, 앞에서 구한 $f(\theta)$를 적용하여 주어진 극한을 구한다.

이때 $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$임을 이용하여

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2}{\cos\theta}\right)=\left(\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\left(\lim_{\theta\to0+}\frac{2}{\cos\theta}\right)=2$$ 임을 보인다.

문제 3

(1) 좌표평면에서 공의 속도가 $\vec{v}=(v_0\cos\theta,\ -10t+v_0\sin\theta)$로 주어지고, 높이가 36일 때 관측된 속도가 $\vec{v}=(15,24)$라는 것을 이용하여 공의 y좌표의 최댓값을 구한다.

(2) 원점에서 공의 초기속도와 공이 최고높이에 도달한 시간을 이용하여 공이 다시 지면에 닿는 지점의 x 좌표를 구한다.

(3) 이번에는 공을 원점 O에서 속력 v_0로 x축의 양의 방향과 예각 $\frac{\theta}{2}$를 이루는 방향으로 발사 공이 다시 지면에 닿는 지점의 x 좌표를 구한다.

문제 4

(1) $p\times q\times r=5^n$을 만족시키는 1 보다 큰 자연수 p,q,r의 순서쌍 (p,q,r)는 $n<3$인 경우에는 나타나지 않음을 이해하여 n의 최솟값을 구한다.

(2) 중복조합의 수를 구하는 방법으로 a_n을 구하고, $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값을 계산한다.

03 평가기준

가. 배점기준표

문항	배점	세 부 내 용
문제1(1)	5	* 문제의 내용을 정확하게 분석하였는가? * 수리적 풀이가 정확한가? * 풀이과정을 논리적으로 서술하였는가?
문제1(2)	15	
문제1(3)	10	
문제2(1)	10	
문제2(2)	5	
문제2(3)	10	
문제3(1)	10	
문제3(2)	10	
문제3(3)	10	
문제4(1)	5	
문제4(2)	10	

나. 채점기준

* 각 문제에 대하여 아래에 제시된 답안과 같이 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다.
  이후 등급을 해당 문제의 점수로 환산하여 총점을 계산한다.
* 도출 과정이 옳으나 계산 결과가 정확히 일치하지 않으면 1등급을 감점한다.
* 답안을 서술하면서 식만 나열하고, 논리적인 설명이 없으면 1등급을 감점한다.

문제 1 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$이므로

② $\{f'(x)\}^2-8f'(x)$의 차수는 $2(n-1)$이다.

③ 그런데 $F(x)$의 차수는 $n+1$이므로

④ $\{f'(x)\}^2-8f'(x)=kF(x)$가 성립하는 0이 아닌 실수 k가 존재하려면

$2(n-1)=n+1$에서

⑤ $n=3$이다. 즉 $f(x)$의 차수는 3이다.

문제 1 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 15점]

① $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 이차항의 계수는 0이며, $f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3+ax$로 두자.

② 이때 $f'(x)=3x^2+a$이므로

③ $kF(x)=\{f'(x)\}^2-8f'(x)=(3x^2+a)^2-8(3x^2+a)$

$=9x^4+6(a-4)x^2+a^2-8a$ 이다.

④ 따라서 $kf(x)=(kF(x))'=36x^3+12(a-4)x$ 이므로 $k=36$이고, $36a=12(a-4)$에서 $a=-2$ 이다.

⑤ 그러므로 $f(x)=x^3-2x$ 이다.

문제 1 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① $f(x)=x^3-2x=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ 이므로

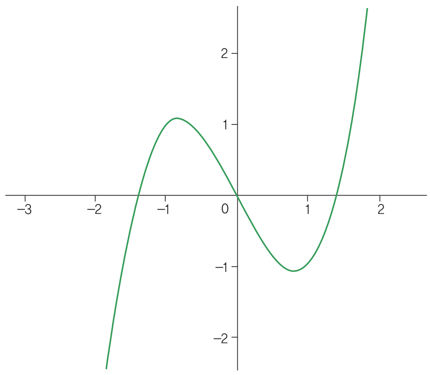
② 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}|x^3-2x|\,dx$$

④ $$=2\int_0^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\,dx$$

⑤ $$=2\left[x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{2}}=2$$



문제 2 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 원의 접선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로 $\triangle\mathrm{OPR}$은 직각삼각형이다.

② 따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OR}}}$

③ 즉 $\overline{\mathrm{OR}}=\sec\theta$ 이다.

④ 그리고 $\angle\mathrm{ROA}=2\theta$ 이므로

⑤ 점 R의 x좌표는 $\sec\theta\cos2\theta$이다.

문제 2 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① 직각삼각형 $\triangle\mathrm{OPR}$에서 변 OP의 길이는 1이고,

② 변 PR의 길이는 $\tan\theta$ 이므로

③ $f(\theta)=2\left(\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{PR}}\right)=\overline{\mathrm{PR}}=\tan\theta$ 이다.

문제 2 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 부채꼴 POA의 넓이는 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$ 이므로

② $g(\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta=\frac{\theta}{2}$ 이다.

③ $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta}{\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2}{\cos\theta}\right)$ 이다.

④ 그리고 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 이므로

⑤ $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\left(\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\left(\lim_{\theta\to 0+}\frac{2}{\cos\theta}\right)=2$ 이다.

문제 3 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 초기위치 $(x_0, y_0)=(0,0)$ 에서 발사된 공의 시각 t일 때의 위치가

$\mathrm{P}(x,y)$ 이고 속도가 $\vec{v}=(v_x(t), v_y(t))=(v_0\cos\theta, -10t+v_0\sin\theta)$ 이므로,

$x(t)=x_0+\int_0^t v_y(t)dt=(v_0\cos\theta)t$, $y(t)=y_0+\int_0^t v_y(t)dt=-5t^2+(v_0\sin\theta)t$ 이다.

② 높이 36 인 위치를 지날 때 $t=a$라고 하면 $-5a^2+(v_0\sin\theta)a=36$ 이고,

이때 공의 y 방향 속도로부터 $-10a+v_0\sin\theta=24$ 이다.

③ 이 두 식으로부터 $5a^2+24a-36=(5a-6)(a+6)=0$

즉 $a=\frac{6}{5}\ (>0)$ 이고, $v_0\sin\theta=36$ 임을 얻는다.

④ 한편, 공이 최대 높이에 도달했을 때 $t=b$라고 하면, 이때 공의 y 방향 속도가 0 이므로

$0=-10b+v_0\sin\theta=-10b+36$, 즉 $b=\frac{18}{5}$ 이다.

⑤ 따라서 공이 도달하는 최대 높이는 $-5b^2+(v_0\sin\theta)b=\frac{324}{5}=64.8$ 이다.

문제 3 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 공의 x 방향 속도는 일정하므로 $v_x(t)=v_0\cos\theta=15$ 이다.

② 공이 다시 지면에 닿을 때 시각을 $t=c\ \ (c>0)$ 라고 하면 $-5c^2+(v_0\sin\theta)c=c(-5c+36)=0$ 이므로

$c=\frac{36}{5}$ 이다.

③ 따라서 공이 다시 지면에 닿는 지점의 x 좌표는 $(v_0\cos\theta)c=15\times\frac{36}{5}=108$ 이다.

문제 3 (3) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① x 축의 양의 방향과 예각 $\frac{\theta}{2}$ 를 이루는 방향으로 발사된 공의

시각 t일 때의 속도는 $\left(v_0\cos\frac{\theta}{2}, -10t+v_0\sin\frac{\theta}{2}\right)$ 가 되며,

위치는 $\left(\left(v_0\cos\frac{\theta}{2}\right)t, -5t^2+\left(v_0\sin\frac{\theta}{2}\right)t\right)$ 가 된다.

② 발사된 공이 지면에 다시 닿을 때 시각 $t=d$ 라고 하면

$0 = -5d^2 + \left(v_0 \sin\frac{\theta}{2}\right)d$ 로부터 $d = \frac{v_0}{5}\sin\frac{\theta}{2}$ 이다.

③ 공의 x 방향 속도는 $v_0\cos\frac{\theta}{2}$ 으로 일정하므로

공이 다시 지면에 닿는 지점의 x 좌표는

$\left(v_0\cos\frac{\theta}{2}\right)d = \left(v_0\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{v_0}{5}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{(v_0)^2}{5}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{v_0}{10}(v_0\sin\theta)$ 이다.

④ 앞에서 $v_0\sin\theta = 36$과 $v_0\cos\theta = 15$ 이었고,

$v_0 = \sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta)^2} = \sqrt{15^2+36^2} = 39$ 이므로

지면에 닿는 지점의 x 좌표는 $\frac{39}{10}\times 36 = \frac{702}{5} = 140.4$ 이다.

문제 4 (1) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 5점]

① $p\times q\times r = 5^n$ 이고 p, q, r은 2 이상의 정수이므로 $p = 5^x, q = 5^y, r = 5^z$인 자연수 x, y, z가 존재한다.

② 따라서 $5^{x+y+z} = 5^n$ 이고 $x+y+z = n$ 이므로 $n \geq 3$ 이다.

③ 그런데 $n = 3$ 이면 $5^1\times 5^1\times 5^1 = 5^3$과 같이 조건을 만족하는 (p,q,r) 이 있으므로 $a_3 \neq 0$ 이다.

④ 즉 $a_n \neq 0$ 인 자연수 n의 최솟값은 3이므로 $k = 3$ 이다.

문제 4 (2) 아래에 제시된 단계에 따라 1등급~6등급으로 채점한다. [배점: 10점]

① 조건을 만족하는 (p, q, r) 의 개수는 방정식 $x+y+z=n$을 만족하는 자연수 해 (x, y, z) 의 개수와 같다.

② 이것은 x,y,z를 적어도 각각 하나씩 택하고 나머지 $n-3$개는 x,y,z에서

중복 허용하여 택하는 조합의 수와 같으므로

③ $a_n = {}_3\mathrm{H}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 이다.

④ $k = 3$ 이므로 $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{(n-1)(n-2)}$

⑤ $= 2\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$

$= 2\lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\right\} = 2$

04 예시답안

문제 1

(1) $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 $f'(x)$ 의 차수는 $n-1$ 이므로 $\{f'(x)\}^2 - 8f'(x)$ 의 차수는 $2(n-1)$ 이다. 그런데 $F(x)$ 의 차수는 $n+1$ 이므로 $\{f'(x)\}^2 - 8f'(x) = kF(x)$ 가 성립하는 0 이 아닌 실수 k가 존재하려면 $2(n-1) = n+1$ 에서 $n = 3$ 이다. 즉 $f(x)$ 의 차수는 3 이다.

(2) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이고 이차항의 계수는 0이며, $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = x^3 + ax$ 로 두자.

이때 $f'(x) = 3x^2 + a$ 이므로

$kF(x) = \{f'(x)\}^2 - 8f'(x) = (3x^2+a)^2 - 8(3x^2+a) = 9x^4 + 6(a-4)x^2 + a^2 - 8a$ 이다.

따라서 $kf(x) = (kF(x))' = 36x^3 + 12(a-4)x$ 이므로 $k = 36$ 이고, $36a = 12(a-4)$ 에서 $a = -2$ 이다.

그러므로 $f(x) = x^3 - 2x$ 이다.

(3) $f(x)=x^3-2x=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ 이므로 그래프는 x축과 세 점 $(-\sqrt{2},0),(0,0),(\sqrt{2},0)$ 에서 만난다. $-\sqrt{2}\le x\le 0$일 때 $f(x)\ge 0$이고 $0\le x\le\sqrt{2}$일 때 $f(x)\le 0$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}|x^3-2x|\,dx=2\int_0^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\,dx=2\left[x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{2}}=2$ 이다.

문제 2

(1) 원의 접선의 성질에 의하여 $\overline{OP}\perp\overline{PR}$ 이므로 $\triangle OPR$은 직각삼각형이다.

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{\overline{OR}}$, 즉 $\overline{OR}=\sec\theta$ 이다.

그리고 $\angle ROA=2\theta$ 이므로 점 R의 x좌표는 $\sec\theta\cos 2\theta$이다.

(2) 직각삼각형 $\triangle OPR$에서 변 OP의 길이는 1이고, 변 PR의 길이는 $\tan\theta$ 이므로

$f(\theta)=2\left(\frac{1}{2}\overline{OP}\times\overline{PR}\right)=\overline{PR}=\tan\theta$ 이다.

(3) 부채꼴 POA의 넓이는 호도법으로 나타낸 중심각 θ에 대하여 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$ 이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta=\frac{\theta}{2}$이다. 그리고 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta}{\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2}{\cos\theta}\right)=\left(\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\left(\lim_{\theta\to 0+}\frac{2}{\cos\theta}\right)=2 \text{ 이다.}$$

문제 3

(1) 초기위치 $(x_0,y_0)=(0,0)$에서 발사된 공의 시각 t일 때의 위치가 $P(x,y)$이고 속도가

$\vec{v}=(v_x(t),v_y(t))=(v_0\cos\theta,\ -10t+v_0\sin\theta)$ 이므로, $x=x_0+\int_0^t v_y(t)dt=(v_0\cos\theta)t$,

$y=y_0+\int_0^t v_y(t)dt=-5t^2+(v_0\sin\theta)t$ 이다. 따라서 높이 36 인 위치를 지날 때 $t=a$라고 하면 먼저 $-5a^2+(v_0\sin\theta)a=36$이고, 또 이때 공의 y방향 속도로부터 $-10a+v_0\sin\theta=24$이다. 이 두 식으로부터 $5a^2+24a-36=(5a-6)(a+6)=0$, 즉 $a=\frac{6}{5}(>0)$이고, $v_0\sin\theta=36$ 임을 얻는다. 한편, 공이 최대 높이에 도달했을 때 $t=b$라고 하면, 이때 공의 y방향 속도가 0이므로

$0=-10b+v_0\sin\theta=-10b+36$, 즉 $b=\frac{18}{5}$ 이다. 따라서 공이 도달하는 최대 높이는

$-5b^2+(v_0\sin\theta)b=\frac{324}{5}=64.8$이다.

(2) 공의 x 방향 속도는 일정하므로 $v_x(t)=v_0\cos\theta=15$ 이다. 공이 다시 지면에 닿을 때 시각을 $t=c$ $(c>0)$라고 하면 $-5c^2+(v_0\sin\theta)c=c(-5c+36)=0$ 이므로 $c=\frac{36}{5}$ 이다. 따라서 공이 다시 지면에 닿는 지점의 x좌표는 $(v_0\cos\theta)c=15\times\frac{36}{5}=108$ 이다.

(3) 지면과 예각 $\dfrac{\theta}{2}$를 이루는 방향으로 발사된 공의 시각 t일 때의 속도는

$\left(v_0 \cos\dfrac{\theta}{2},\ -10t + v_0 \sin\dfrac{\theta}{2}\right)$가 되며, 위치는 $\left(\left(v_0 \cos\dfrac{\theta}{2}\right)t,\ -5t^2 + \left(v_0 \sin\dfrac{\theta}{2}\right)t\right)$가 된다. 발사된 공이 지면에 다시 닿을 때 $t = d$라고 하면 $0 = -5d^2 + \left(v_0 \sin\dfrac{\theta}{2}\right)d$로부터 $d = \dfrac{v_0}{5}\sin\dfrac{\theta}{2}$이다. 공의 x 방향 속도는 $v_0 \cos\dfrac{\theta}{2}$으로 일정하므로 공이 다시 지면에 닿는 지점의 x좌표는

$\left(v_0 \sin\dfrac{\theta}{2}\right)d = \left(v_0 \sin\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\dfrac{v_0}{5}\cos\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{v_0}{10}(v_0 \sin\theta)$ 이다. 앞에서 $v_0 \sin\theta = 36$과 $v_0 \cos\theta = 15$ 이었고,

$v_0 = \sqrt{(v_0 \cos\theta)^2 + (v_0 \sin\theta)^2} = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$이므로 지면에 닿는 지점의 x좌표는

$\dfrac{39}{10} \times 36 = \dfrac{702}{5} = 140.4$ 이다.

문제 4

(1) $p \times q \times r = 5^n$이고 p, q, r은 2 이상의 정수이므로 $p = 5^x, q = 5^y, r = 5^z$인 자연수 x, y, z가 존재한다. 따라서 $5^{x+y+z} = 5^n$이고 $x + y + z = n$이므로 $n \geq 3$일 때 $a_n \neq 0$이다. 즉 $a_n \neq 0$인 자연수 n의 최솟값은 3이므로 $k = 3$이다.

(2) 조건을 만족하는 (p, q, r)의 개수는 $x + y + z = n$을 만족하는 자연수의 개수와 같으므로

$a_n = {}_3\mathrm{H}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$이다. 따라서

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n-2)} = 2\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} 2\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)\right\} = 2$$ 이다.