1. 문제(1) 및 제시문

문제 1 아래 제시문을 읽고 다음 논제에 답하시오. (25점)

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\, y_1)$에서의 접선의 방정식은
>
> $$x_1x+y_1y=r^2$$
>
> [출처 : 수학 「원과 접선의 방정식」]

원 $x^2+y^2=1$의 접선 중에서, 기울기가 $\sqrt{3}$이고 y절편이 양수인 접선을 ℓ이라고 하고 기울기와 y절편이 모두 음수인 접선을 m이라고 하자. 직선 ℓ, 직선 m, 직선 $y=-1$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 사각형의 면적이 최소가 되도록 하는 직선 m의 방정식을 구하시오.

2. 문제(1) 해설

출제 의도

원 위의 접선의 방정식과 주어진 직선과의 교점을 이용하여 사각형의 면적을 올바르게 표현하고 도출된 사각형 면적의 최솟값을 도함수를 이용하여 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="3">수학 – (2) 기하 – ③ 원의 방정식
미적분 – (2) 미분법 – ① 여러 가지 함수의 미분</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 수학</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취 기준 1</td><td>[10수학02-07]
좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">과목명: 미적분</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취 기준 1</td><td>[12미적02-05]
사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외 19명	동아출판	2018	136
	미적분	황선욱 외 5명	미래엔	2019	75

문항 해설

주어진 사각형의 면적이 최소가 되는 조건과 직선 ℓ, 직선 m, 직선 $y=-1$로 둘러싸인 삼각형의 면적이 최대가 되는 조건이 같다는 것을 이용하여 삼각형의 면적을 직선 m이 원과 만나는 접점의 각도 θ의 함수로 올바르게 표현한다. 삼각함수의 미분법을 적용하여 삼각형의 면적이 최소가 되는 각도를 구하고 이를 이용하여 직선 m의 방정식을 올바르게 구한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	원의 접선의 방정식과 삼각형의 넓이 및 삼각함수의 미분법을 적용하여 원하는 함수의 최대/최솟값을 구한다.	25

예시 답안

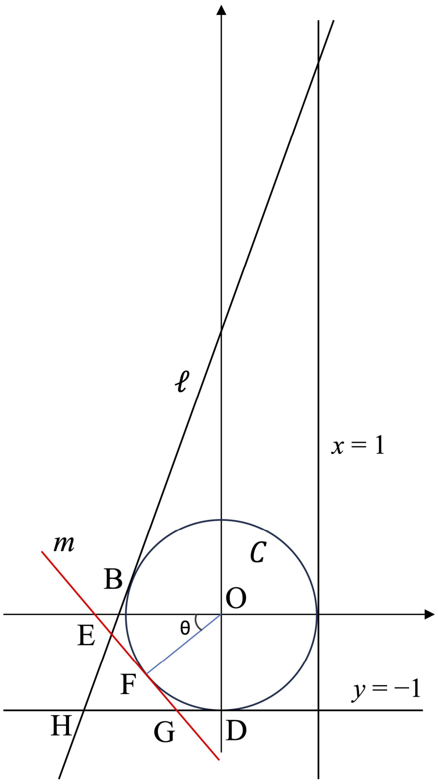
직선 ℓ이 원에 접하는 점은 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$이므로 직선 ℓ의 방정식은 다음과 같다.

$$\ell: \ y = \sqrt{3}x + 2$$

또한 직선 m과 원이 접하는 점을 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$라고 하면, 직선 m의 방정식은 다음과 같다.

$$m: \ y = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x - \frac{1}{\sin\theta}$$

직선 ℓ과 $y=-1$의 교점을 $\mathrm{H}(-\sqrt{3}, -1)$이라고 할 때, 문제에서 요구하는 사각형의 넓이는 직선 ℓ, 직선 $x=1, y=-1$로 이루어지는 삼각형 A의 넓이에서 삼각형 HEG의 넓이를 뺀 것이다. A의 넓이는 고정되어 있으므로, 삼각형 HEG의 넓이를 최대로 하는 직선 m을 구하면 된다.



직선 m과 $y=-1$ 과의 교점은 $\mathrm{G}\left(\frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}, -1\right)$이다.

직선 m과 직선 $\ell: \ y = \sqrt{3}x + 2$ 과의 교점은 $\mathrm{E}\left(\frac{-2\sin\theta - 1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}, \frac{2\cos\theta - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}\right)$이므로,

삼각형 HEG의 밑변과 높이, 그리고 넓이는 다음과 같다.

밑변 = $\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta}+\sqrt{3}$, 높이 = $\dfrac{2\cos\theta-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}+1$

넓이 $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta}+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{2\cos\theta-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}+1\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)^2}{\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

삼각형 HEG의 넓이 S를 θ에 대하여 미분하면, 다음과 같다.

$$S'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$\times\left[2(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)\right.$$

$$\left.-(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)^2(\cos\theta(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)-\sin\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta))\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)}{2\cos^2\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$\times\left[2(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)\right.$$

$$\left.-(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)}{2\cos^2\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)^2}(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)$$

$$\times\left[2\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)-(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)^2}{2\cos^2\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)^2}(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=\frac{3(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1)^2}{2\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\tan\theta\right)$$

그런데 주어진 구간 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $S>0$이므로 $\cos\theta>0$이고 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1\neq 0$이다. 따라서, 도함숫값의 부호는 오직 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\tan\theta$에 의해서만 결정된다. 아래의 표와 같이

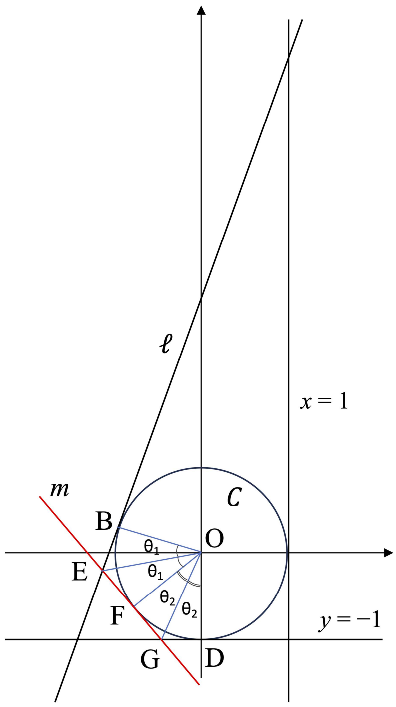
	$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$	$\theta=\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$	+	0	−

이므로, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 S가 최대(즉, 직선 m, 직선 ℓ, 직선 $y=-1$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 사각형의 넓이가 최소)가 되고, 그 때의 직선 m은

$$y=-\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}x-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}x-2$$

이다.

[별해]
아래 그림에서 오각형 OBEGD의 넓이(S)가 최소일 때 구하는 사각형의 넓이가 가장 작아진다.
직각삼각형 OEB, OEF와 직각삼각형 OGD, OGF는 항상 합동이므로 $\angle BOE = \angle FOE$, $\angle FOG = \angle DOG$이다.
S는 두 삼각형 OEB와 OGD 넓이의 합의 두 배와 같고 $\angle BOE$를 θ_1, $\angle FOG$를 θ_2라고 하면 $S = 2\tan\theta_1 + 2\tan\theta_2$으로 나타낼 수 있다.



$\angle BOD = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} = 2\theta_2 + 2\theta_2$이므로, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3}$이고

$$S = 2(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) = 2(\tan(\frac{\pi}{3} - \theta_2) + \tan\theta_2) = 2\left(\tan\theta_2 + \frac{\sqrt{3} - \tan\theta_2}{1 + \sqrt{3}\tan\theta_2}\right)$$ 이다.

S를 θ_2에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dS}{d\theta_2} = 2\left(\frac{1}{\cos^2\theta_2} + \frac{-(\sqrt{3}\tan\theta_2 + 1) - (\sqrt{3} - \tan\theta_2)\sqrt{3}}{\cos^2\theta_2(\sqrt{3}\tan\theta_2 + 1)^2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{3\tan^2\theta_2 + 2\sqrt{3}\tan\theta_2 + 1 - \sqrt{3}\tan\theta_2 - 1 - 3 + \sqrt{3}\tan\theta_2}{\cos^2\theta_2(\sqrt{3}\tan\theta_2 + 1)^2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{3\tan^2\theta_2 + 2\sqrt{3}\tan\theta_2 - 3}{\cos^2\theta_2(\sqrt{3}\tan\theta_2 + 1)^2}\right)$$

여기서 $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{3}$일 때 분자가 0이 되는 경우는 $\tan\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때이다.

$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{3}$구간에서 $\frac{dS}{d\theta_2}$의 증감표는 다음과 같다.

	$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{6}$	$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < \theta_2 < \frac{\pi}{3}$
$\frac{dS}{d\theta_2}$	-	0	+

$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$일 때 S가 최소가 되고 $2\theta_2 = \frac{\pi}{3}$이므로 직선 m의 기울기는 $-\sqrt{3}$이 된다.
기울기가 $-\sqrt{3}$이고 원 $x^2 + y^2 = 1$에 접하는 접선의 방정식 중 y 절편이 음수인 방정식은 다음과 같다.

$$y = -\sqrt{3}x - 2$$

3. 문제(2) 및 제시문

문제 2 아래 제시문을 읽고 다음 논제에 답하시오. (25점)

> 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는
>
> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> [출처 : 수학II 「미분가능성과 연속성」]

함수 $f(x)=\begin{cases}\cos bx & (0\le x\le 1)\\ cx+d & (x>1)\end{cases}$ 는 $x>0$에서 미분가능하다. (단, $b>0$)

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 양의 실수해의 개수가 11개일 때, 다음 문항에 답하시오.

(2-1) b의 범위를 구하시오.
(2-2) d의 최댓값을 구하시오.

4. 문제(2) 해설

출제 의도

삼각함수와 직선으로 이루어진 함수의 미분가능성을 이용하여 주어진 함수의 실수해의 개수를 올바르게 도출하고 주어진 조건을 만족하는 일차함수의 절편의 크기의 최댓값을 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="3">수학 II - (2) 미분 - 1 미분계수</td></tr>
<tr><td rowspan="3">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 수학 II</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취 기준 1</td><td>[12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>성취 기준 2</td><td>[12수학 II 02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.</td><td></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14명	비상교육	2018	51,57

문항 해설

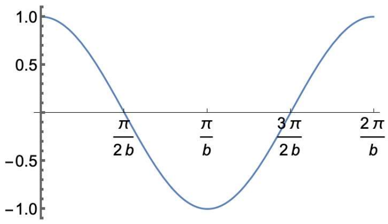
주어진 함수의 주기성과 미분가능성을 이용하여 주어진 일차함수가 x축과 만나는 경우와 만나지 않는 각각의 경우를 나누어 11개의 실수해를 가지는 b값의 범위를 올바르게 구한다. 구한 b값의 범위에서 주어진 일차함수의 y절편의 최댓값을 증감표를 이용하여 바르게 구한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	방정식의 실수해의 개수가 함수의 그래프와 x축과의 교점의 개수로 주어진다는 것을 이용하여 삼각함수의 주기성으로부터 교점의 개수를 구할 수 있다.	15
(2-2)	주어진 조건으로부터 함수의 그래프의 모양을 올바로 파악하여 일차함수의 y절편의 최댓값을 구할 수 있다.	10

예시 답안

(2-1) 함수 $g(x)=\cos bx$는 주기가 $2\pi/b$이다. 그러므로 방정식 $g(x)=0$은 $[0,2\pi/b]$에서 두 개의 해 $2\pi/b \cdot \frac{1}{4}$, $2\pi/b \cdot \frac{3}{4}$를 갖고 $[0,2n\pi/b]$에서 $2n$개의 해를 갖는다. 이 방정식의 $2n-1$, $2n$번째 해는 각각 $2\pi/b \cdot \left(n-1+\frac{1}{4}\right)$, $2\pi/b \cdot \left(n-1+\frac{3}{4}\right)$이다.



$x>1$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 직선이므로, c와 d가 모두 0이 아닐 때 x축과 만나는 경우, 하나의 교점만 존재한다. 따라서 $f(x)=0$의 양의 실수해가 11개가 되기 위해서는 $x>1$에서 1개의 해를 갖고, $x\le 1$ 에서 10개의 해를 갖거나 $x>1$에서는 해가 없고 $x\le 1$ 에서 11개의 해를 가져야 한다.

(a) $x>1$에서 1개의 해를 갖는 경우:
하나의 해가 $(1,\infty)$에 있다면, $\cos bx=0$의 10번째 해 $2\pi/b(4+3/4)=19\pi/2b$는 $[0,1]$에 있고, 11번째 해 $2\pi/b(5+1/4)=21\pi/2b$가 $(1,\infty)$에 있어야 한다. 따라서, $\frac{19\pi}{2}\le b<\frac{21\pi}{2}$가 성립한다.

이때, $f(x)=0$는 $x=1$에서 미분가능하므로, $c=-b\sin b$가 성립한다. 따라서 $f(x)$는 $[1,\infty)$에서 $(1,\cos b)$를 지나고, 기울기가 $-b\sin b$인 직선이다. 아래의 표를 확인하면,

	$b=\frac{19\pi}{2}$	$19\pi<2b<20\pi$	$b=10\pi$	$20\pi<2b<21\pi$
$\cos b$	0	+	1	+
$-b\sin b$	b	+	0	-

i) $b=\frac{19\pi}{2}$이면 $y=cx+d$는 (1,0)을 지나고 기울기가 0이 아닌 직선이므로, $\cos bx=0$의 10번째 해 $(1,0)$ 에서 x축과 만난 후 더 이상 x축과 만나지 않는다.

ii) $\frac{19\pi}{2}<b\le 10\pi$이면 $y=cx+d$는 1사분면의 점을 지나고 기울기가 음수가 아닌 직선이므로, x축과 $[1,\infty)$에서 만나지 않는다.

iii) $10\pi<b<\frac{21\pi}{2}$이면 $y=cx+d$는 1사분면의 점을 지나고 기울기가 음수인 직선이므로, x축과 $[1,\infty)$에서 만난다.

따라서 하나의 해가 $(1,\infty)$에 있다면 $10\pi<b<\frac{21\pi}{2}$이다.

(b) 11개의 해가 모두 $[0,1]$에 있다면, $\cos bx=0$의 11번째 해 $2\pi/b(5+1/4)=21\pi/2b$가 $[0,1]$에 있어야 하고, 12번째 해 $2\pi/b(5+3/4)=23\pi/2b$는 $(1,\infty)$에 있어야 한다.
따라서, $21\pi \le 2b < 23\pi$가 성립한다.

이때, $f(x)=0$는 $x=1$에서 미분가능하므로, $c=-b\sin b$가 성립한다. 따라서 $f(x)$는 $[1,\infty)$에서 $(1,\cos b)$를 지나고, 기울기가 $-b\sin b$인 직선이다. 아래의 표를 확인하면,

	$b=\frac{21\pi}{2}$	$21\pi<2b<22\pi$	$b=11\pi$	$22\pi<2b<23\pi$
$\cos b$	0	-	-	-
$-b\sin b$	$-b$	-	0	+

i) $b=\frac{21\pi}{2}$이면 $y=cx+d$는 (1,0)을 지나고 기울기가 0이 아닌 직선이므로, $\cos bx=0$의 11번째 해 $(1,0)$에서 x축과 만난 후 더 이상 x축과 만나지 않는다.
ii) $\frac{21\pi}{2}<b\le 11\pi$이면 $y=cx+d$는 4사분면의 점을 지나고 기울기가 양수가 아닌 직선이므로, x축과 $[1,\infty)$에서 만나지 않는다.
iii) $11\pi<b<\frac{23\pi}{2}$이면 $y=cx+d$는 4사분면의 점을 지나고 기울기가 양수인 직선이므로, x축과 $[1,\infty)$에서 만난다.

따라서, $\frac{21\pi}{2}\le b\le 11\pi$여야 한다.

위의 두 결과를 종합하면, $10\pi<b\le 11\pi$이다.

(2-2) $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로, $c+d=\cos b$이다.

$c=-b\sin b$이므로, $d=-c+\cos b=b\sin b+\cos b$이다.

$10\pi<t\le 11\pi$일 때 $g(t)=t\sin t+\cos t$의 도함수는

$g'(t)=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$ 이다.

	$10\pi<t<\frac{21\pi}{2}$	$t=\frac{21\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{2}<b\le 11\pi$
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	증가		감소

따라서, $t=\frac{21\pi}{2}$일 때 d의 값이 최대이고, 그 최댓값은 $\frac{21\pi}{2}$이다.

5. 문제(3) 및 제시문

문제 3 아래 제시문을 읽고 다음 논제에 답하시오. (25점)

> 함수 $f : X \to Y$가 일대일대응일 때 역함수 $f^{-1} : Y \to X$가 존재한다.
>
> [출처 : 수학 「역함수」]

실수 b에 대하여 $x > 0$에서 정의된 함수 $f(x) = -2x^2 + bx + 2\ln 2 - \ln x$의 역함수가 존재할 때 $\int_1^2 f(x)dx$의 최댓값을 구하시오.

6. 문제(3) 해설

출제 의도

주어진 함수의 역함수가 존재하기 위한 조건을 이용하여 함수의 기울기에 대한 관계식을 도출하고 이를 만족시키면서 주어진 함수의 정적분의 최대값을 구할 수 있는 능력을 평가한다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (4) 함수 - 1 함수 미적분 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법		
관련 성취기준		**과목명: 수학**	**관련**
	성취기준 1	[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.	
		과목명: 미적분	**관련**
	성취기준 1	[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2018	137
	수학	박교식 외 19명	동아출판	2019	221

문항 해설

주어진 함수의 역함수가 존재한다는 조건과 극한값을 이용하여, 주어진 함수의 기울기가 항상 0 보다 작거나 같다는 조건식을 도출하고 이를 이용하여 b값의 범위를 올바르게 구한다. 정적분 $\int_1^2 f(x)dx$ 값을 구하고 도출한 b값의 범위 내에서 주어진 함수의 정적분의 최댓값을 구한다
.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	역함수가 존재할 조건으로부터 함수 $f(x)$의 정적분값을 계수 b에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.	25

예시 답안

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는 $f(x)$가 증가함수이거나 감소함수여야 하는데, $\lim_{x \to +0} f(x) = \infty$이고 $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$이므로 $f(x)$는 감소함수이어야 한다.

$x > 0$에서 $f(x)$가 감소함수이기 위해서는 $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + bx - 1}{x} \le 0$ 이어야 하고, $x > 0$이므로 $-4x^2 + bx - 1 = -4(x - \dfrac{b}{8})^2 + \dfrac{b^2}{16} - 1 \le 0$이어야 한다.

ㄱ) $b \le 0$인 경우: $-4x^2 + bx - 1$이 $x > 0$에서 감소하고 $\lim_{x \to +0}(-4x^2 + bx - 1) = -1$ 이므로 이 영역에서 $-4x^2 + bx - 1 \le 0$이고 $f(x)$는 감소함수이다.

ㄴ) $b > 0$인 경우: $-4x^2 + bx - 1$이 $x = \dfrac{b}{8}$에서 최대값 $\dfrac{b^2}{16} - 1$을 가지므로, 모든 양수 x에 대하여 $-4x^2 + bx - 1 \le 0$이려면 $\dfrac{b^2}{16} - 1 \le 0$, 즉 $0 < b \le 4$ 이어야 한다.

ㄱ)과 ㄴ)에 의하여 함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 조건은 $b \le 4$이다.

그런데

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (-2x^2 + bx + 2\ln 2 - \ln x)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + (2\ln 2)x - x\ln x + x \right]_1^2$$

$= -\dfrac{16}{3} + \dfrac{2}{3} + b(2 - \dfrac{1}{2}) + 2\ln 2 - 2\ln 2 + 1 = \dfrac{3b}{2} - \dfrac{11}{3}$이므로, 이 적분값은 $b = 4$일 때 최대값 $\dfrac{7}{3}$을 갖는다.

7. 문제(4) 및 제시문

문제 4 아래 논제에 답하시오. (25점)

숭실대학교 축구부 감독은 30명의 스포츠학부 학생 중에서 11명의 선수를 선발하고, 이 중에서 역할이 동등한 두 명의 리더를 지명하기로 하였다. 이렇게 팀을 구성하는 경우의 수를 감독은 다음과 같이 생각하였다.

> 감독: 30명의 학생 중에서 11명의 선수를 먼저 선발하고 이 중에서 리더 2명을 지명한다.
> 이때 경우의 수는 $A = {}_{30}\mathrm{C}_{11} \times {}_{11}\mathrm{C}_2$이다.

반면 학생들은 팀을 구성하는 다른 방법을 제시하고, 그 때의 경우의 수를 올바르게 계산하였다.

(1) 방법1: 감독이 리더 2명을 먼저 지명하고, 두 리더가 상의하여 나머지 9명의 선수를 선발한다. 이때 경우의 수는 $P = {}_{30}\mathrm{C}_2 \times {}_{28}\mathrm{C}_9$이다. (2) 방법2: 감독이 리더 1명을 먼저 지명하고, 이 리더가 나머지 10명의 선수를 선발한 뒤 이 중에서 리더 1명을 마저 지명한다. 이때 경우의 수는 $Q = {}_{30}\mathrm{C}_1 \times {}_{29}\mathrm{C}_{10} \times {}_{10}\mathrm{C}_1$이다. (3) 방법3: 감독이 선수 5명을 먼저 선발하고 선발된 선수 중에서 리더 2명을 지명한 뒤, 두 리더가 상의하여 나머지 6명의 선수를 선발한다. 이때 경우의 수는 $R = {}_{30}\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_{25}\mathrm{C}_6$이다.

이때 아래 식에서 괄호에 들어가는 값이 1이 아니라면 (즉, 감독의 경우의 수와 각 방법의 경우의 수가 다르다면) 그 이유를 논하고, 괄호에 들어가야 할 값을 ${}_n\mathrm{C}_r$ 혹은 ${}_n\mathrm{P}_r$의 형태로 나타내시오.

$$A \times (\qquad) = P$$
$$A \times (\qquad) = Q$$
$$A \times (\qquad) = R$$

8. 문제(4) 해설

출제 의도

순열과 조합을 이용하여 선수를 선발하는 다양한 방법에 대한 경우의 수를 계산할 수 있고 선발 방법의 차이에 따른 경우의 수의 차이를 설명할 수 있는 능력을 평가한다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="3">수학 - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합</td></tr>
<tr><td rowspan="2">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 수학 II</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취
기준
1</td><td>[10수학05-03]
조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외 19명	동아출판	2019	264

문항 해설

감독이 계산한 방법과 주어진 방법 1-3에 대해 조합의 곱으로 나타내진 경우의 수의 팩토리얼의 곱으로 바르게 나타낸다. 이를 이용하여 감독과 경우의 수와 방법 1의 경우의 수가 같다는 것을 보인다. 감독의 선발 방법보다 더 많은 경우의 수를 가진 방법 2,3에 각각의 경우에 수를 감독의 경우 수로 나눈 값을 조합으로 표현하고 이것을 선발 방법의 차이를 이용하여 올바르게 설명한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	각 경우의 수를 조합으로 나타내고 각 계산의 차이가 어떠한 이유로 발생하는지 구체적으로 구할 수 있다.	25

예시 답안

감독이 생각한 경우의 수는 $A={}_{30}\mathrm{C}_{11}\times{}_{11}\mathrm{C}_2=\frac{30!}{11!19!}\times\frac{11!}{2!9!}=\frac{30!}{2!9!19!}$이다.

방법1의 경우의 수는 $P={}_{30}\mathrm{C}_2\times{}_{28}\mathrm{C}_9=\frac{30!}{2!28!}\times\frac{28!}{9!19!}=\frac{30!}{2!9!19!}$ 이므로 방법1과 감독의 경우의 수와 같다.

방법2의 경우의 수는 $Q={}_{30}\mathrm{C}_1\times{}_{29}\mathrm{C}_{10}\times{}_{10}\mathrm{C}_1=\frac{30!}{1!29!}\times\frac{29!}{10!19!}\times\frac{10!}{1!9!}=\frac{30!}{9!19!}$

이므로 방법 2와 감독의 경우의 수는 다르고, $A\times\frac{2!}{1!1!}=A\times{}_2\mathrm{C}_1=Q$ 이다. 이는 방법 2로 선수를 선발하는 경우, 처음 지명된 리더와 마지막에 지명된 리더의 순서를 구분하므로 같은 구성을 두 번씩 세기 때문이며, ${}_2\mathrm{C}_1$은 두 리더 중 하나가 첫 번째로 뽑히는 경우의 수이다.

방법3의 경우의 수는 $R={}_{30}\mathrm{C}_5\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_{25}\mathrm{C}_6=\frac{30!}{5!25!}\times\frac{5!}{2!3!}\times\frac{25!}{6!19!}=\frac{30!}{2!3!6!19!}$이므로 방법 3과 감독의 경우의 수는 다르고, $A\times\frac{9!}{3!6!}=A\times{}_9\mathrm{C}_3=R$이다. 이는 리더가 아닌 선수 9명이 처음에 뽑힌 집단과 나중에 뽑힌 집단으로 구분되어 같은 구성을 ${}_9\mathrm{C}_3=84$번 중복해서 세기 때문이며, ${}_9\mathrm{C}_3$은 리더가 아닌 9명의 선수들 중 3명이 첫 번째로 뽑히는 경우의 수이다.