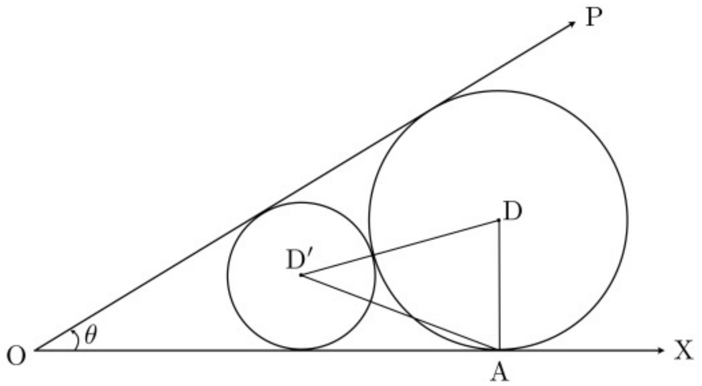
1. 출제문제

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

원 C와 원 C'이 다음 조건을 만족시킨다. (그림 1 참조)

(i) 원 C 는 반직선 OX 및 반직선 OP와 접하고 있으며, 반직선 OX 위에서 접하는 점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이다.
(ii) 원 C'은 반직선 OX 및 반직선 OP와 접하고 있으며, 원 C와 한 점에서 만난다.
(iii) 원 C'의 반지름은 원 C의 반지름보다 작다.



<그림 1>

두 반직선 OX와 OP가 이루는 $\angle \mathrm{XOP}$의 크기를 θ라고 하자. (단, $0<\theta<\pi$)

원 C와 원 C'의 중심을 각각 D, D'이라고 하고 삼각형 $\mathrm{D}'\mathrm{AD}$의 넓이를 $S(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값을 구하시오.

【문제 2】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.
[출처 : 수학II 「미분계수와 도함수」]

구간 $(0,\infty)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음과 같이 정의되어 있다. (단, a, b, c, d는 실수이고 $a \neq 0$)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (0<x<2) \\ ax^3+bx^2+cx+d & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극솟값을 가진다.
이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 실수 a, b, c, d의 값을 구하시오.

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선과 수직이면서 점 $(x, f(x))$를 지나는 직선의 x절편의 최솟값을 구하시오.

(단, $0<x<\frac{8}{3}$)

【문제 3】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$의 두 근을 α, β라고 하면, 다음의 식이 성립한다.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

[출처 : 수학 「이차방정식의 근과 계수의 관계」]

좌표평면에서 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, $\beta(\alpha>\beta)$라고 할 때, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 $\theta(=\alpha-\beta)$라고 하면 다음 식이 성립한다.

$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[출처 : 미적분 「두 직선이 이루는 예각의 크기」]

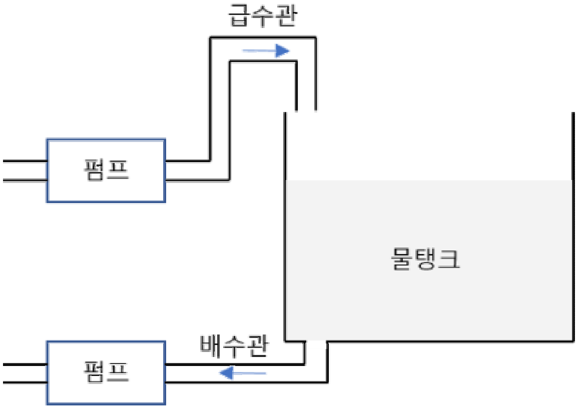
점 $\mathrm{P}(a,b)$를 지나고 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선이 두 개가 존재한다고 하자. 두 접선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 각각 A와 B라고 할 때, 두 접선의 사잇각 APB가 $\frac{\pi}{3}$라고 하자.

(1) a와 b의 관계식을 구하시오.

(2) 두 접선과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 b에 관한 식으로 나타내시오. (단, $b<-\frac{1}{2}$)

【문제 4】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

물탱크는 물을 저장하는 용기이다. 급수관을 통하여 물탱크에 물을 채워 넣고, 배수관을 통하여 저장된 물탱크의 물을 밖으로 빼낼 수 있다. 물탱크의 급수/배수량을 조절하기 위하여 펌프를 급수/배수관에 설치한다. 급수 및 배수 속도는 급수관과 배수관에 설치하는 펌프에 따라 달라질 수 있다.



용량이 5 리터(liter)인 물탱크가 있다. 물탱크에는 급수관과 배수관이 각각 한 개씩 존재한다. 아래에 주어진 세 개의 펌프 중 두 개를 골라서 그 중 한 개를 급수관에, 나머지 한 개를 배수관에 설치한다.

펌프의 시간 t에서의 급수 또는 배수량의 순간변화율은 다음과 같다.

1번 펌프: $8t+1$ liter/hour
2번 펌프: $4t+2$ liter/hour
3번 펌프: $6t+4$ liter/hour

$t=0$에서 물탱크에 저장된 물은 0.1 리터이다. $t=0$에서 $t=1$까지 1시간(hour) 동안 펌프를 작동시킨다고 하자. 펌프가 작동하는 동안 물탱크의 물이 넘치거나 바닥나지 않도록 펌프를 설치하는 경우의 수를 구하시오.

2. 문제해설

가. 문제1

출제 의도

도형의 닮음을 이용하여 선분의 길이 및 도형의 넓이를 삼각함수의 형태로 올바르게 도출하고, 도출된 삼각함수의 극한을 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>수학 Ⅰ - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수
미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학Ⅰ</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취기준1</td><td>[12수학 Ⅰ 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td colspan="2">과목명: 미적분</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취기준1</td><td>[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	황선욱 외 8명	미래엔	2019	75
	미적분	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2018	67

문항 해설

삼각함수의 공식과 도형의 닮음을 이용하여 삼각형 $\mathrm{D'AD}$의 넓이를 두 원의 공통접선이 이루는 각 θ의 크기에 대한 함수로 올바르게 나타내고, 이를 이용하여 삼각형 $\mathrm{D'AD}$의 넓이를 θ^2로 나눈 값의 $\theta=0$ 에서의 우극한 값을 구하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	도형의 닮음 성질을 이용하여 주어진 조건으로부터 삼각함수의 극한값을 계산할 수 있다.	25

예시 답안

삼각형 OAD가 직각삼각형이고 $\overline{OA}=1$, $\angle AOD=\frac{\theta}{2}$이므로 원 C의 반지름의 길이는 $\tan\frac{\theta}{2}$이다.

삼각형 $D'AD$의 넓이는 삼각형 OAD의 넓이에서 삼각형 OAD'의 넓이를 뺀 것이다. 원 C'의 반지름의 길이를 r이라고 할 때, 삼각형 $D'AD$의 넓이 $S(\theta)$는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{삼각형 OAD의 넓이 } = \frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}$$

$$\text{삼각형 OAD}'\text{의 넓이 } = \frac{1}{2}\times\overline{OA}\times r=\frac{1}{2}r$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}-r\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원 C'과 반직선 OX가 만나는 점을 A'이라고 하자. 삼각형 OAD와 삼각형 $OA'D'$는 닮은꼴이므로

$$\overline{AD}:\overline{A'D'}=\overline{OD}:\overline{OD'},\ \overline{OD'}=\overline{OD}-\text{두 원의 반지름 합}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}:r=\sec\frac{\theta}{2}:\sec\frac{\theta}{2}-tan\frac{\theta}{2}-r$$

이 성립한다. 따라서

$$r=\frac{\tan\frac{\theta}{2}sec\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}}{\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다.

식 ㉡을 식 ㉠에 대입하면,

$$\begin{aligned}S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}-r\right)&=\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{\sec\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2}}{\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}}\right)\\&=\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\right)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\cdot\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\cdot\frac{1}{\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

이고

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\theta} = \frac{1}{2},\ \lim_{\theta \to 0+} sec \frac{\theta}{2} = 1,\ \lim_{\theta \to 0+} tan \frac{\theta}{2} = 0$$

에 의하여

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{4}$$

이다.

나. 문제2

출제 의도

함수의 연속성과 미분가능성, 삼차함수의 극솟값의 성질을 이용하여 구하는 함수에 대한 정보를 올바르게 도출하고, 도출된 함수의 접선 및 접선에 수직인 직선에 대한 정보를 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	학 Ⅱ - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 수학 Ⅱ - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수 수학 Ⅱ - (3) 적분 - $\boxed{3}$ 정적분의 활용 미적분 - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분	
관련 성취기준	과목명: 수학 Ⅱ	
	성취기준1	[12수학 Ⅱ 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
	성취기준2	[12수학 Ⅱ 02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
	성취기준3	[12수학 Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2018	55
	수학 Ⅱ	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2018	59
	수학 Ⅱ	황선욱 외 8명	미래엔	2019	92

문항 해설

주어진 함수 $f(x)$가 x축과 만나는 점의 개수, 삼차함수의 특성, 미분계수의 정의와 함수의 연속성을 이용하여 $x \geq 2$ 구간에서의 함수를 바르게 구한다, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$을 지나고 $(x, f(x))$에서의 접선과 수직인 직선의 x절편이 최소가 되도록 하는 구간에서 x절편을 나타내는 함수를 유도하여 x절편의 최솟값을 구하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	미분 가능한 함수의 성질과 함수의 극값 성질을 이용하여 주어진 조건으로부터 삼차함수를 구할 수 있다.	10
(2)	주어진 조건으로부터 함수의 접선의 성질을 이용하여 x절편의 값을 구할 수 있다.	15

예시 답안

(1) $0 < x < 2$ 범위에서 함수 $f(x)$는 x축과 한 점 $(1, 0)$에서 만나므로 $x \geq 2$ 범위에서 함수 $f(x)$는 x축과 오직 한 점에서만 만나야 한다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x = 5$에서 x축과 접하면서 극솟값을 가져야 한다. 이를 고려하여 함수 $f(x)$를 다시 표현하면 아래와 같다.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (0 < x < 2) \\ \alpha(x - \beta)(x - 5)^2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

주어진 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$와 $(2, \infty)$에서 미분가능하다. 그러므로 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하기 위해서는 $x = 2$에서 미분가능하면 된다.

$$f'(2) = \alpha(2-5)(3 \times 2 - 2\beta - 5) = 4 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편 함수 $f(x)$가 $x = 2$에서 미분가능하면 $x = 2$에서 연속이어야 하므로,

$$f(2) = \alpha(2 - \beta)(2 - 5)^2 = 3 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이다.

식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 상수는 $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{3}{2}$이다.

따라서 $x \geq 2$ 에서 함수 $f(x)$는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{3}(x - \frac{3}{2})(x - 5)^2 \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{23}{3}x^2 + \frac{80}{3}x - 25 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{23}{3}, c = \frac{80}{3}, d = -25$이다.

(2) $x \geq 2$ 에서 $f'(x) = \frac{2}{3}(x-5)^2 + \frac{4}{3}(x-\frac{3}{2})(x-5) = \frac{2}{3}(x-5)(3x-8)$ 이므로 $x = \frac{8}{3}$에서 극댓값, $x=5$ 에서 극솟값을 갖는다. 주어진 구간 $(0, \frac{8}{3})$은 0에서부터 3차함수의 극댓값까지이다.

따라서 점 $(x, f(x))$에서의 접선과 수직이면서 점 $(x, f(x))$를 지나는 직선의 x절편의 최솟값은 이차함수 구간인 $0 < x < 2$ 사이에 존재한다.

$0 < x < 2$ 구간에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이고

$$f'(t) = 2t \ (0 < t < 2)$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 수직이면서 점 $(t, f(t))$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2 - 1 \ (0 < t < 2)$$

위 직선의 x절편을 $g(t)$라고 하면 $g(t)$는 각각 다음과 같다.

$$g(t) = 2t^3 - t \quad (0 < t < 2)$$

$g'(t) = 6t^2 - 1$의 부호를 조사하여 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{6}}$	$\nearrow$

따라서 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$이다.

다. 문제3

출제 의도

접선의 방정식, 삼각함수의 덧셈정리, 근과 계수와의 관계를 이용하여 접점 및 넓이에 관한 관계식을 도출해내며, 도출된 관계식으로부터 유도되는 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 해결하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><th>적용
교육과정</th><td>미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
수학 - (2) 방정식과 부등식 - 1 방정식과 부등식
수학 Ⅱ - (3) 다항함수의 적분법 - 1 부정적분과 정적분</td></tr>
<tr><th>관련
성취기준</th><td><table>
<tr><th colspan="2">과목명: 미적분</th></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12미적 02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 수학</th></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[10수학 01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 수학 Ⅱ</th></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학 Ⅱ 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	67
	수학	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2018	51
	수학 Ⅱ	황선욱 외 8명	미래엔	2019	140

문항 해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$를 지나고 곡선 $y=x^2$에 접하는 두 직선의 기울기를 접선의 특성을 이용하여 올바르게 구하고 사잇각이 $\frac{\pi}{3}$라는 조건과 탄젠트의 덧셈공식, 근과 계수의 관계를 적용하여 a와 b의 관계를 구한다. 두 직선이 곡선 $y=x^2$와 접하는 점을 근으로 하는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 접선과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a와 b로 올바르게 나타내고 앞에서 구한 a와 b의 관계와 주어진 b의 조건을 이용하여 넓이를 b에 관한 식으로 나타낸다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	두 직선이 이루는 예각의 크기 성질을 이용하여 주어진 조건으로부터 곡선에 접하는 두 직선의 교점을 구할 수 있다.	12
(2)	주어진 조건으로부터 두 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	18

예시 답안

(1) 점 $P(a,b)$를 지나고, 함수 $y=x^2$의 그래프에 접하는 직선이 그래프와 접하는 점을 $Q(x,x^2)$이라고 하자. 이때, 직선의 기울기는 두 가지 방법으로 구할 수 있다.

i) P, Q를 지나는 직선의 기울기 = $\dfrac{x^2-b}{x-a}$

ii) 점 Q에서의 접선의 기울기 = $2x$

위의 두 값은 같아야 하므로 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{x^2-b}{x-a}=2x \Rightarrow x^2-2ax+b=0$$

위의 이차방정식의 두 해를 α,β라고 하면, 두 접선의 기울기는 $2\alpha,2\beta$이다. 두 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 $\theta_{1,}\theta_2$라고 하면, $|\theta_1-\theta_2|=\dfrac{\pi}{3}$이다. 이를 삼각함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\tan|\theta_1-\theta_2|=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|=\left|\frac{2\alpha-2\beta}{1+4\alpha\beta}\right|$$

이다. 양변을 제곱하여 이차방정식의 근과 계수의 관계를 적용하면

$$4((\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta)=3(1+4\alpha\beta)^2,\ 4(4a^2-4b)=3(1+4b)^2$$

이고, a와 b의 관계는 다음 식으로 정리된다.

$$16a^2-48b^2-40b-3=0$$

(2) 점 $P(a,b)$를 지나고, 함수 $y=x^2$의 그래프에 접하는 직선이 그래프와 접하는 점을 구하는 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라고 하면 두 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=2\alpha(x-a)+b,\ y=2\beta(x-a)+b$$

따라서 두 접선과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{a} x^2-2\alpha x+2a\alpha-b \ \ dx+\int_{a}^{\beta} x^2-2\beta x+2a\beta-b \ \ dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+(2a\alpha-b)x\right]_{\alpha}^{a}+\left[\frac{1}{3}x^3-\beta x^2+(2a\beta-b)x\right]_{a}^{\beta} \\
&= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+(\alpha^3-\beta^3)+2a(\beta^2-\alpha^2)+b(\alpha-\beta)-a^2(\alpha-\beta)+2a^2(\alpha-\beta) \\
&= \frac{2}{3}(\alpha^3-\beta^3)-2a(\alpha^2-\beta^2)+(a^2+b)(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

이고

$\alpha+\beta=2a, \alpha\beta=b$로부터

$\alpha-\beta=-\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=-2\sqrt{a^2-b}$,

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-4a\sqrt{a^2-b}$,

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=-2\sqrt{a^2-b}(4a^2-b)$

이므로

$$
\begin{aligned}
S &= \sqrt{a^2-b}\left\{\frac{4}{3}(b-4a^2)+8a^2-2(a^2+b)\right\} \\
&= \frac{2}{3}(a^2-b)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

이다.

문항 (1)에서 구한 a와 b의 관계 $16a^2-48b^2-40b-3=0$로부터

$a^2=\dfrac{48b^2+40b+3}{16}$을 이용하면

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{2}{3}\left(\frac{48b^2+40b+3-16b}{16}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{3}(4b+1)^3}{32}
\end{aligned}
$$

이다.

라. 문제4

출제 의도

일상 생활에서 일어나는 현상을 수학적 문제로 변환하며 이를 정적분을 이용하여 해결하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>수학 Ⅱ - (3) 다항함수의 적분법 - ② 정적분의 활용</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td><table><tr><td colspan="2">과목명: 수학 Ⅰ</td><td>관련</td></tr><tr><td>성취기준1</td><td>[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	황선욱 외 8명	미래엔	2018	143

문항 해설

주어진 펌프의 급수 또는 배수량의 순간변화율을 이용하여 가능한 펌프의 조합에 대해 시간 t에서 물탱크에 저장된 물의 양을 계산하는 함수를 정적분을 이용하여 구하고 주어진 t의 구간에서 최대 최솟값을 올바르게 계산하여 물탱크의 물이 바닥나거나 넘치지 않는 경우의 수를 구한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	사인함수의 주기의 성질과 문제의 조건으로부터 수열의 제10항을 찾아낼 수 있다.	9
(2)	미분계수의 정의로부터 주어진 함수의 모양을 찾아내고 각 구간의 정적분의 합을 등비급수로 나타내어 구하는 정적분의 값을 계산할 수 있다.	21

예시 답안

펌프를 통해 1시간동안 급수 또는 배수되는 물의 양 (급수 또는 배수량)은 급수 또는 배수량의 순간변화율을 시간에 따라 정적분한 값과 같다.

1번 펌프의 1시간 동안의 급수량: $\int_0^1 (8t+1)dt = [4t^2+t]_0^1 = 5$ (liter)

2번 펌프의 1시간 동안의 급수량: $\int_0^1 (4t+2)dt = [2t^2+2t]_0^1 = 4$ (liter)

3번 펌프의 1시간 동안의 급수량: $\int_0^1 (6t+4)dt = [3t^2+4t]_0^1 = 7$ (liter)

세 개의 펌프 중 두 개를 골라서 급수관과 배수관에 하나씩 연결하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2$=6 가지이다. 펌프를 연결할 수 있는 모든 경우의 수에 대해 1시간 후 남아있는 물의 양을 계산하면 아래와 같다.

급수펌프	배수펌프	1시간 동안 급수량	1시간 동안 배수량	$t=0$에서 물탱크에 저장된 물의 양	$t=1$에서 물탱크에 저장된 물의 양
1번 펌프	2번 펌프	5 리터	4 리터	0.1 리터	1.1 리터
1번 펌프	3번 펌프	5 리터	7 리터	0.1 리터	-1.9 리터
2번 펌프	1번 펌프	4 리터	5 리터	0.1 리터	-0.9 리터
2번 펌프	3번 펌프	4 리터	7 리터	0.1 리터	-2.9 리터
3번 펌프	1번 펌프	7 리터	5 리터	0.1 리터	2.1 리터
3번 펌프	2번 펌프	7 리터	4 리터	0.1 리터	3.1 리터

$t=1$에서 물탱크에 저장된 물의 양이 5 리터가 넘거나 0 리터 이하가 되지 않는 조합은 급수 1번 펌프 - 배수 2번 펌프, 급수 3번 펌프 - 배수 1번 펌프, 급수 3번 펌프 - 배수 2번 펌프의 세 가지 경우이다.

$t=0$에서 $t=1$까지 1시간(hour) 동안 펌프를 작동시키는 중간에 급수량에 비해 배수량이 많아져 물탱크의 물이 바닥나는 경우도 고려해야 한다.

급수 1번 펌프 - 배수 2번 펌프의 시간 t에서의 저장된 물의 양은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\text{물의 양} &= \int_0^t (8t+1)dt - \int_0^t (4t+2)dt + \frac{1}{10} \\ &= \int_0^t (4t-1)dt + \frac{1}{10} \\ &= 2t^2 - t + \frac{1}{10} \\ &= 2(t-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{40}\end{aligned}$$

급수펌프로 1번 펌프를, 배수 펌프로 2번 펌프를 설치하면, 시간 t에서의 저장된 물의 양이 $t=\frac{1}{4}$에서 $-\frac{1}{40}$로 음수가 되어 물탱크의 물이 중간에 바닥나게 된다.

급수 3번 펌프 - 배수 1번 펌프의 시간 t에서의 저장된 물의 양은 다음과 같다

$$\begin{aligned}\text{물의 양} &= \int_0^t (6t+4)dt - \int_0^t (8t+1)dt + \frac{1}{10} \\ &= \int_0^t (-2t+3)dt + \frac{1}{10} \\ &= -t^2 + 3t + \frac{1}{10}\end{aligned}$$

$-t^2+3t+\frac{1}{10}$는 $0 \le t \le 1$에서 0과 5의 범위 내에 있으므로 급수 펌프로 3번 펌프를, 배수 펌프로 1번 펌프

를 설치하면 물탱크의 물이 넘치거나 바닥나지 않는다.

급수 3번 펌프 - 배수 2번 펌프의 시간 t에서의 저장된 물의 양은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \text{물의 양} &= \int_0^t (6t+4)dt - \int_0^t (4t+2)dt + \frac{1}{10} \\ &= \int_0^t (2t+2)dt + \frac{1}{10} \\ &= t^2 + 2t + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$t^2+2t+\frac{1}{10}$는 $0 \le t \le 1$에서 0과 5의 범위 내에 있으므로 급수 펌프로 3번 펌프를, 배수 펌프로 2번 펌프를 설치하면 물탱크의 물이 넘치거나 바닥나지 않는다.

따라서 물탱크의 물이 넘치거나 바닥나지 않도록 하는 경우는 다음의 두 가지이다.
(1) 3번 펌프를 급수관에 연결하고, 1번 펌프를 배수관에 연결
(2) 3번 펌프를 급수관에 연결하고, 2번 펌프를 배수관에 연결

- 끝 -