1. 출제문제

【문제 1】 아래 논제에 답하시오. (20점)

다음 조건을 모두 만족시키는 삼각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(i) 실수 m에 대하여 두 직선 $x+2my=0$과 $2mx-y-2m=0$의 교점을 P_m이라고 할 때, 서로 다른 세 실수 m_1, m_2, m_3에 대하여 P_{m_1}, P_{m_2}, P_{m_3}을 꼭짓점으로 갖는다. (ii) 한 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

【문제 2】 아래 논제에 답하시오. (30점)

실수 k에 대하여 방정식 $\frac{|2x|}{x^2+1}=k$의 서로 다른 실수해의 개수를 $f(k)$라고 하자.
이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 함수 $f(k)$의 그래프를 그리시오.

(2) 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$에 대하여 항상 $g(0)>c$가 되도록 하는 실수 c 중 가장 큰 값을 구하시오.

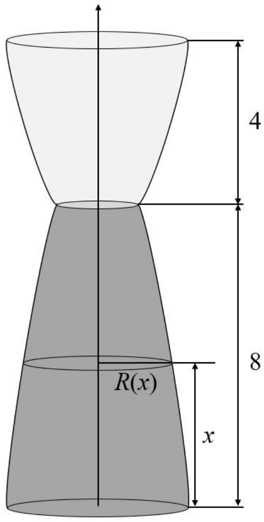
(i) 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다. (ii) 모든 정수 n에 대하여 $g(n) \geq 0$이다. (iii) 합성함수 $g \circ f$는 실수 전체에서 연속이다. (iv) 함수 $h(x)=[x]$에 대하여 합성함수 $f \circ g \circ h$는 실수 전체에서 연속이다. (단, 실수 x에 대하여 $[x]$는 x보다 크지 않은 정수 중 가장 큰 정수이다.)

【문제 3】 아래 논제에 답하시오. (25점)

오른쪽 그림과 같이 높이가 12인 용기가 있다. 이 용기를 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면은 원이며, 밑면으로부터 높이가 x인 지점에서 단면의 반지름 $R(x)$는 다음과 같이 주어져 있다.

$$R(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{8-x}{2}+1} & (0\le x\le 8)\\[2ex] \sqrt{x-7} & (8\le x\le 12)\end{cases}$$

용기의 높이가 $0\le x\le 8$인 부분과 $8\le x\le 12$인 부분에는 각각 물과 기름이 가득 차 있다.

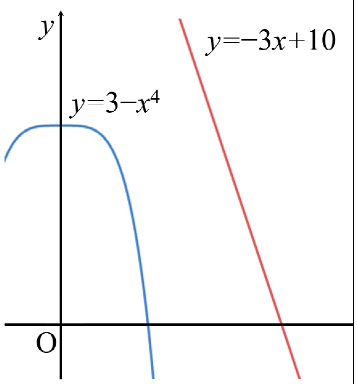


이제 용기의 바닥, 즉 높이 $x=0$인 부분에 구멍을 뚫어 천천히 물을 용기 밖으로 내보낸다고 하자. 물을 내보냄에 따라 기름층도 아래로 이동하면서 기름층의 두께가 변하게 된다.
(단, 기름층의 두께는 기름층의 윗면의 높이와 아랫면의 높이의 차이를 의미한다. 기름과 물은 항상 위와 아래로 분리되어 층을 이루며 기름층의 윗면과 아랫면은 항상 밑면과 평행하다고 가정하자.)
이때 기름층의 두께의 최댓값을 구하시오.

【문제 4】 아래 논제에 답하시오. (25점)

좌표평면에서 점 P가 다음 조건을 만족시키며 움직인다고 하자.

점 P는 원점 O를 출발하여 함수 $y=3-x^4$의 그래프의 한 점 Q까지 선분 OQ를 따라 일정한 속력 a로 움직인 후, 직선 $\ell: y=-3x+10$의 한 점 R까지 선분 QR를 따라 속력 1로 움직인다. (단, a는 양수)



점 P가 직선 ℓ 위의 한 점 R까지 가장 빨리 도착할 때 점 Q의 좌표는 $(1,2)$라고 하자. 이때 다음 문항에 답하시오.
(1) $\theta=\angle\mathrm{OQR}$일 때 $\tan\theta$의 값을 구하시오. (단, $0\le\theta\le\pi$)
(2) a를 구하시오.

2. 문제해설

가. 문제 1

출제 의도

사인법칙을 이용하여 원에 내접하는 삼각형의 변의 길이와 넓이를 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 – (2) 기하 – ③ 원의 방정식 수학Ⅰ – (2) 삼각함수 – ① 삼각함수
관련 성취기준	과목명: 수학 성취기준 1 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. 과목명: 수학Ⅰ 성취기준 1 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	136
	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	131
	수학 Ⅰ	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	97
	수학 Ⅰ	권오남 외 14명	교학사	2018	97

문항 해설

주어진 조건을 만족시키는 세 점으로 이루어진 삼각형의 외접원을 구하고, 한 각의 대변의 길이를 사인법칙을 이용하여 구한 후 넓이가 최대가 되기 위한 조건을 찾아 넓이를 계산하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건을 만족시키는 삼각형의 외접원과 한 변의 길이를 구한 후 삼각형의 넓이가 최대가 되려면 이등변삼각형이 됨을 이용하여 넓이를 계산할 수 있다.	20

예시 답안

직선 $\ell : x+2my=0$과 $\ell' : 2mx-y-2m=0$은 m과 관계없이 각각 점 $(0,0)$과 점 $(1,0)$을 지나는 직선이다. $m\neq 0$인 경우 직선 ℓ과 ℓ'의 기울기는 각각 $-\dfrac{1}{2m}$과 $2m$이므로 두 직선은 항상 수직으로 만난다. $m=0$인 경우 직선 ℓ과 ℓ'은 각각 y축, x축이므로 역시 수직으로 만난다. 따라서 실수 m에 대하여 두 직선 ℓ과 ℓ'의 교점 P_m은 점 $(0,0)$과 점 $(1,0)$을 이은 선분을 지름으로 하는 원 위에 있게 된다.

서로 다른 세 실수 m_1, m_2, m_3으로부터 얻어진 세 점 P_{m_1}, P_{m_2}, P_{m_3}을 각각 A, B, C로 나타내자. 삼각형 ABC의 외접원은 점 $(0,0)$과 점 $(1,0)$을 이은 선분을 지름으로 하는 원이므로 사인법칙을 이용하면

$$\frac{a}{\sin A}=2R=1$$

$A=\dfrac{\pi}{6}$이면 $a=\sin A=\dfrac{1}{2}$이다. 그러므로 조건을 만족시키는 삼각형은 반지름 $\dfrac{1}{2}$인 원에 내접하고 변 BC의 길이 a가 $\dfrac{1}{2}$인 삼각형이다.

이러한 삼각형의 넓이가 최대가 되기 위해서는 변 BC로부터 거리가 최대가 되는 원 위의 점이 삼각형의 나머지 한 점 A가 되어야 하고, 이때 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

밑변 BC의 길이가 $\dfrac{1}{2}$이고 각 A가 $\dfrac{\pi}{6}$인 이등변삼각형의 높이는 $\dfrac{\tan\frac{5\pi}{12}}{4}$이다.

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

따라서 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{16}$이다.

나. 문제 2

출제 의도

함수의 그래프를 그리는 능력 및 연속성의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 형태를 파악하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] "수학과 교육과정" 수학 II - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 수학 II - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
관련 성취기준	과목명: 수학 II 성취기준 1 [12수학II 01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. 성취기준 2 [12수학II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 성취기준 3 [12수학II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14인	비상	2018	31,86
	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	29.86

문항 해설

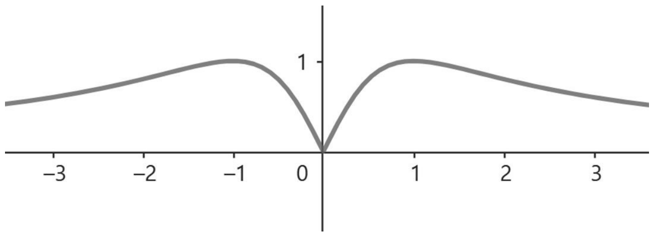
두 함수의 그래프의 개형을 미분계수 등을 이용하여 그린 후 교점의 개수를 파악하여 서로 다른 실수해의 개수를 구하며, 주어진 합성함수의 연속성으로부터 함수 $g(x)$의 정수에서의 함숫값이 만족시키는 조건을 찾고 실수 c의 값을 구하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	함수의 그래프를 올바르게 그리고 각 k에 따른 교점의 개수를 올바르게 구할 수 있다.	9
(2)	합성함수의 연속성으로부터 함수 $g(x)$의 형태를 기술하고 상수항이 만족시켜야 할 조건을 찾을 수 있다.	21

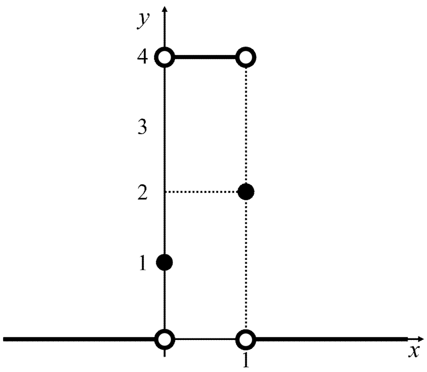
예시 답안

(1) $y=\dfrac{|2x|}{x^2+1}$의 그래프는 다음과 같다.



$p(x)=\dfrac{|2x|}{x^2+1}$은 $x=1$과 $x=-1$에서 최댓값 1을 가지고, $x\to\infty$ 혹은 $x\to-\infty$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 함수 $f(k)$와 그래프는 각각 다음과 같다.

$$f(k)=\begin{cases} 0 & k<0 \\ 1 & k=0 \\ 4 & 0<k<1 \\ 2 & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases}$$



(2) 함수 $g(x)$가 조건 (iii)을 만족시키면, 즉 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이다. 따라서

$$\lim_{x\to0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0-}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0),$$
$$\lim_{x\to0+}(g\circ f)(x)=g(4),\ \lim_{x\to0-}(g\circ f)(x)=g(0),\ (g\circ f)(0)=g(1)$$

이므로

$$g(0)=g(1)=g(4)$$

마찬가지로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1),$$
$$\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=g(0),\ \lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=g(4),\ (g\circ f)(1)=g(2)$$

이로부터 $g(0)=g(2)=g(4)$를 얻을 수 있고, $g(0)=g(1)=g(2)=g(4)$이다.
조건 (i)과 (iii)을 만족시키는 함수 $g(x)$는 실수 a에 대하여

$$g(x)=x(x-1)(x-2)(x-4)+a$$

함수 $g(x)$가 조건 (iv)를 만족시킨다면, 즉 함수 $(f\circ g\circ h)(x)$가 모든 실수에서 연속이면 n이 정수일 때 $x=n$에서도 연속이다.

$$\lim_{x\to n-}(f\circ g\circ h)(x)=f(g(n-1)),\ \lim_{x\to n+}(f\circ g\circ h)(x)=f(g(n))$$

그러므로 $f(g(n-1))=f(g(n))$, 즉 $f(g(n))$의 값이 모든 정수 n에 대하여 같다.

함수 $g(x)$가 조건 (i)을 만족시키는 함수라면 $g(m)>1$인 정수 m이 항상 존재하고 이때 $f(g(m))=0$이다. 함수 $g(x)$가 조건 (ii)를 만족시키고 $g(m')\le 1$인 정수 m'이 존재하는 함수이면 $0\le g(m')\le 1$이기 때문에 $f(g(m'))=1, 2$ 혹은 4가 되고, $f(g(m))\neq f(g(m'))$이 된다. 이때 $(f\circ g\circ h)(x)=0$이다.
그러므로 조건 (i), (ii), (iii), (iv)를 만족시키는 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=x(x-1)(x-2)(x-4)+a,\quad n\text{이 정수일 때 } g(n)>1$$

함수 $g(x)=x(x-1)(x-2)(x-4)+a$의 그래프의 개형으로부터 함수 $g(x)$의 정수에서의 함숫값 중 가장 작은 값은 $g(3)$임을 알 수 있다. 따라서 모든 정수 n에 대하여 $g(n)>1$인 것은 $g(3)>1$과 동치이다.

$$g(3)=3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)+a=a-6>1,\ a=g(0)>7$$

그러므로 실수 c가 문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(0)>c$를 만족시키기 위해서는 $c\le 7$이어야 하고, 구하는 실수 c의 값은 7이다.

다. 문제 3

출제 의도

정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구하고, 문제의 조건으로부터 함수를 정의한 후 그 함수의 최댓값을 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] "수학과 교육과정" 수학II - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 미적분 - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용
관련 성취기준	과목명: 수학 II 성취기준 1 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 과목명: 미적분 성취기준 1 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2018	78
	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	78
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	168
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	167

문항 해설

기름의 부피 조건으로부터 기름층의 두께를 기름이 용기의 윗부분에서 차지하는 높이에 대한 함수로 나타낸 후 그 함수의 최댓값을 구하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 기름의 부피로부터 기름층의 두께를 기름이 용기의 윗부분에서 차지하는 높이에 대한 함수로 나타낸 후 도함수 및 최댓값을 계산할 수 있다.	25

예시 답안

기름의 부피를 V라고 하면

$$V=\int_{8}^{12}\pi(\sqrt{x-7})^2dx=\int_{8}^{12}\pi(x-7)dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-7x\right]_8^{12}=12\pi$$

1) 기름층의 윗면의 높이가 8보다 크거나 같다고 하자.
$0\le a\le 4$일 때 기름층의 윗면의 높이를 $8+a$, 아랫면의 높이를 $8-b$ $(b\ge 0)$ 라고 하면

$$12\pi=\int_{8}^{8+a}\pi(\sqrt{x-7})^2dx+\int_{8-b}^{8}\pi\left(\sqrt{\frac{8-x}{2}}+1\right)^2dx$$

$x-8=t$로 치환하여 계산하면

$$12\pi=\int_{0}^{a}\pi(\sqrt{t+1})^2dt+\int_{-b}^{0}\pi\left(\sqrt{-\frac{t}{2}}+1\right)^2dt$$

$$=\pi\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^a+\pi\left[-\frac{t^2}{4}+t\right]_{-b}^0$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{2}+a+\frac{b^2}{4}+b\right)$$

$b^2+4b+2a^2+4a-48=0$이고, $b=-2\pm\sqrt{-2a^2-4a+52}$인데 $0\le a\le 4$일 때 $-2a^2-4a+52\ge 4$이므로 $b=-2+\sqrt{-2a^2-4a+52}$일 때 $b\ge 0$이 된다. 따라서

$$b=-2+\sqrt{-2a^2-4a+52}$$

그러므로 기름층의 윗면의 높이가 $8+a$ $(a\ge 0)$일 때 기름층의 두께는

$$a+b=a-2+\sqrt{-2a^2-4a+52}$$

이때 기름층의 두께를 a에 대한 함수 $h(a)=a-2+\sqrt{-2a^2-4a+52}$ $(0\le a\le 4)$ 로 나타내면

$$h'(a)=1-\frac{2a+2}{\sqrt{-2a^2-4a+52}}$$

$h'(a)=0$이면

$$2a+2=\sqrt{-2a^2-4a+52},\ 4(a+1)^2=-2a^2-4a+52$$

이때 $a^2+2a-8=(a+4)(a-2)=0$이고, $0\le a\le 4$이므로 $h(a)$는 $a=2$에서 극값을 갖는다.
$0\le a\le 4$일 때 $\sqrt{-2a^2-4a+52}\ge 0$이므로 함수 $h(a)$의 증감을 다음과 같이 표로 나타낼 수 있다.

a	0	$0<a<2$	2	$2<a\le 4$	4
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$	$-2+2\sqrt{13}$	↗	6	↘	4

기름층의 윗면의 높이가 8일 때 기름층의 두께는 $-2+\sqrt{52}=-2+2\sqrt{13}$이고 6보다 작다.

2) 기름층의 윗면의 높이가 8보다 작으면 기름층이 아래로 이동할수록 용기의 단면적이 점점 커지게 되므로 기름층의 두께가 감소한다.

1), 2)로부터 기름층의 두께의 최댓값은 6 이다.

라. 문제 4

출제 의도

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 두 직선의 기울기로부터 두 직선 사이의 각의 삼각함수를 계산하며, 시간을 속력과 거리에 대한 함수로 나타낸 후 극값의 조건으로부터 속력을 계산하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정”
수학 II – (2) 미분 – ③ 도함수의 활용
미적분 – (2) 미분법 – ① 여러 가지 함수의 미분
미적분 – (3) 적분법 – ② 정적분의 활용</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td>과목명: 수학 II
성취기준 1 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

과목명: 미적분
성취기준 1 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
성취기준 2 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2018	78
	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	78
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	63,172
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	61,162

문항 해설

점 P가 직선으로 가장 빨리 도착한다는 조건으로부터 점 Q와 R을 지나는 직선이 문제의 직선과 직교하므로 이로부터 두 직선이 이루는 사잇각의 탄젠트를 삼각함수의 덧셈정리로부터 계산하며, 시간을 점 Q의 x좌표에 대한 함수로 나타낸 후 $x=1$이 극값이 될 조건을 이용하여 속력 a를 계산하는 문제이다.

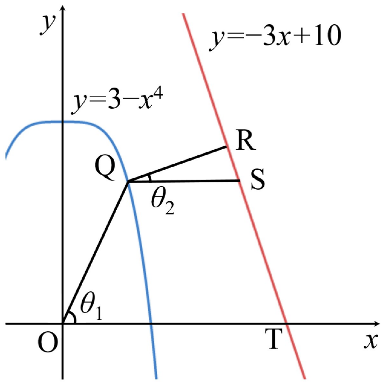
채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 사잇각의 탄젠트를 올바르게 계산한다.	10
(2)	점 P가 움직이는 시간을 함수로 나타내고 도함수를 계산한 후 $x=1$에서 함숫값이 극값이 되는 조건으로부터 속력을 계산한다.	15

예시 답안

(1) 점 P가 문제의 조건을 만족시키면서 직선 $\ell : y = -3x + 10$ 위의 점까지 가장 빨리 도착하기 위해서는 점 Q와 R을 잇는 직선이 직선 ℓ과 수직이어야 한다. 이때 점 Q와 R을 잇는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이고 점 O와 Q를 잇는 직선의 기울기는 2이다.
직선 ℓ과 x축의 교점을 T라고 하고 $\theta_1 = \angle \mathrm{QOT}$라고 하자. 또한 점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 ℓ과 만나는 점을 S라고 하고 $\theta_2 = \angle \mathrm{RQS}$라고 하자. 그러면

$$\tan\theta_1 = 2,\ \tan\theta_2 = \frac{1}{3},\ \tan\theta = \tan(\pi - \theta_1 + \theta_2) = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$



삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} = \frac{\frac{1}{3} - 2}{1 + \frac{2}{3}} = -1$$

그러므로 $\tan\theta = -1$이다.

(2) 원점과 함수 $y = 3 - x^4$의 그래프 위의 점 $(x, 3 - x^4)$을 잇는 선분의 길이는 $\sqrt{x^2 + x^8 - 6x^4 + 9}$이고, 점 $(x, 3 - x^4)$과 직선 $\ell : y = -3x + 10$ 사이의 거리는 $\frac{|3x + (3 - x^4) - 10|}{\sqrt{10}}$이다.
그러므로 점 P가 원점을 출발하여 점 $\mathrm{Q}(x, 3 - x^4)$까지 움직인 후 Q에서 직선 ℓ 위의 점 R에 내린 수선을 따라 움직일 때 점 R에 도착하기까지 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^8 - 6x^4 + 9}}{a} + \frac{|3x + (3 - x^4) - 10|}{\sqrt{10}}$$

문제의 그림으로부터 $3x + (3 - x^4) - 10 < 0$이므로

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^8 - 6x^4 + 9}}{a} - \frac{3x + (3 - x^4) - 10}{\sqrt{10}}$$

이고 함수 $t(x)$는 미분가능하다.
$t(x)$**는** $x=1$**일 때 최솟값을 가지므로** $t'(1)=0$**이다. 함수** $t(x)$**의 도함수를 계산하면**

$$t'(x)=\frac{8x^7-24x^3+2x}{2a\sqrt{x^8-6x^4+x^2+9}}+\frac{4x^3-3}{\sqrt{10}},$$

$$t'(1)=\frac{-14}{2a\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}=0$$

따라서 $a=7\sqrt{2}$ **이다.**