1. 출제문제

【문제 1】 아래 논제에 답하시오. (25점)

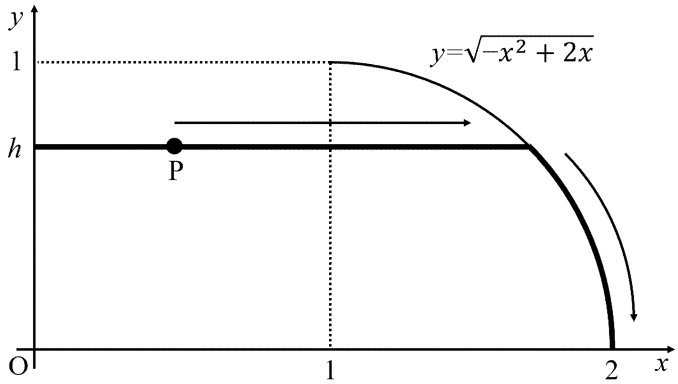
다음 네 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수를 구하고, 그 함수를 모두 찾으시오.

(i) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ **(단, a, b, c는 실수)** **(ii) 곡선** $y=f(x)$**와** x**축은 서로 다른 세 점** $\mathrm{A}(2-\sqrt{5},0)$, $\mathrm{B}(2+\sqrt{5},0)$, $\mathrm{C}(\gamma,0)$**에서 만난다.** **(iii) 곡선** $y=f(x)$**의 변곡점** P**의** x**좌표는 양의 정수이다.** **(iv) 원점** O**에 대하여 삼각형** OPB**와 삼각형** OPC**는 모두 예각삼각형이다. (단, 예각삼각형은 모든 각의 크기가** $\frac{\pi}{2}$**보다 작은 삼각형이다.)**

【문제 2】 아래 논제에 답하시오. (25점)

좌표평면 위의 점 P**가 다음 조건을 모두 만족시키며 움직인다고 하자.**

(i) 시각 $t=0$**에서의 점** P**의 위치는** $(0,h)$**이며** $0\le h\le 1$**이다.** **(ii) 점** P**는 시각** t**에서 속력** $v(t)=t$**로** x**축과 평행한 직선 위를 움직이다가 곡선** $y=\sqrt{-x^2+2x}$ $(1\le x\le 2)$**를 만나면 곡선을 따라 일정한 속력** $\sqrt{3}$**으로 움직인다.** **(iii) 시각** t**에서의 점** P**의** x**좌표** $x(t)$**는** $t_1<t_2$**일 때** $x(t_1)<x(t_2)$**이다.**



점 P**가 점** $(0,h)$**에서 점** $(2,0)$**까지 이동하는데 걸리는 시간이 최대가 되도록 하는** h**를 구하시오.**

【문제 3】 아래 논제에 답하시오. (25점)

혜성과 혜성을 관측하기 위한 우주선의 위치를 좌표평면 위에서 나타낼 수 있다고 하자.
시각 t에서의 혜성의 위치 (x, y)가 $x = 2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2}$, $y = t^2 - 2t + 3$으로 주어져 있다. 우주선은 직선 $\ell : y = \sqrt{2}x - 1$ 위를 움직이며, 시각 t에서의 우주선의 속도는 $(\sqrt{2}, 2)$로 주어진다고 하자. 직선 ℓ과 혜성이 움직이는 곡선은 서로 만나지 않는다.

이때 다음 문항에 답하시오. (단, 혜성과 우주선의 크기는 무시한다.)

(1) 시각 $t = 0$에서의 우주선의 위치가 $(-2\sqrt{2}, -5)$라고 하자. 이때 혜성과 우주선 사이의 거리가 최소가 되는 시각 t와, 그 때의 혜성과 우주선 사이의 거리를 구하시오.

(2) 이번에는 시각 $t = 0$에서의 우주선의 위치를 직선 ℓ 위에서 조정하여 혜성을 더 가까운 거리에서 관측하려고 한다. 혜성과 우주선이 가장 가까워질 수 있도록 하는 시각 $t = 0$에서의 우주선의 위치와, 이때 혜성과 우주선이 가장 가까워지는 시각 t를 구하시오.

【문제 4】 아래 논제에 답하시오. (25점)

함수 $g(x)$는 $x \le 0$에서 정의된 연속함수이며, 일반항이 $a_n = n(n-1)$인 수열 $\{a_n\}$과 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$에 대하여 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시키는 연속함수라고 하자.

(i) $x \le 0$일 때 $f(x) = g(x)$
(ii) 1보다 크거나 같은 정수 n에 대하여 $n-1 \le x < n$일 때 $f(x) = g(-S_n + (n-1-x)a_{n+1})$
(iii) 2보다 크거나 같은 정수 n에 대하여 $\int_0^{a_n} f(x - S_n)\,dx = 1$

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 2보다 크거나 같은 정수 n에 대하여 정적분 $\int_{-S_{n-1}}^{-S_n} g(x)\,dx$의 값을 구하시오.

(2) 정적분 $\int_0^{2023} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

2. 문제해설

가. 문제 1

출제 의도

주어진 조건과 변곡점의 정의와 예각삼각형의 조건을 이용하여 함수의 올바른 형태를 찾는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="2">교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정”
수학 – (1) 문자와 식 – ⑥ 삼차방정식과 사차방정식
미적분 – (2) 미분법 – ② 여러 가지 미분법</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 수학</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">과목명: 미적분</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	72
	수학	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	75
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2018	114
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	94

문항 해설

변곡점의 좌표와 함수의 그래프가 x축과 만나는 점을 찾은 후, 문제에서 주어진 삼각형의 변의 길이를 구하여 예각삼각형이 될 조건을 만족시키는지 판별하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	변곡점의 정의를 이용하여 변곡점의 좌표와 그래프가 x축과 만나는 점을 구하고 이로부터 삼각형의 변의 길이를 구하여 예각삼각형이 될 조건을 판별하고 이로부터 문제의 조건을 만족시키는 함수를 찾을 수 있다.	25

예시 답안

방정식 $f(x)=0$의 해를 $\alpha=2-\sqrt{5}, \beta=2+\sqrt{5}, \gamma$라 하면 $f(x)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

변곡점 P를 찾기 위하여 함수 $f(x)$의 이계도함수를 구하면 다음과 같다.

$$f'(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$
$$\Rightarrow f''(x)=6x-2(\alpha+\beta+\gamma)$$

그러므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표를 p라고 하면, $p=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\dfrac{4+\gamma}{3}$이다. 조건 (iii)에 의하여 $p=\dfrac{4+\gamma}{3}$가 양의 정수여야 한다.

1) $p=1$일 때 $\gamma=-1$이다. 이때 $f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x+1)$이므로 점 P의 좌표는 $(1,-8)$이고 점 C의 좌표는 $(-1,0)$이다. 점 P의 x좌표가 원점과 점 C의 x좌표보다 크므로 각 COP는 $\dfrac{\pi}{2}$보다 크게 되어 $\triangle\mathrm{OCP}$는 둔각삼각형이 된다.
따라서 $f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x+1)$는 조건 (iv)를 만족시키지 못한다.

2) $p=2$일 때 $\gamma=2$이다. 이때 $f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x-2)$이므로 점 P의 좌표는 $(2,0)$이고 점 C의 좌표는 $(2,0)$이다. 따라서 점 O, 점 P, 점 B, 점 C는 모두 x축 위에 있으므로 예각삼각형을 이루지 못한다.

3) $p=3$일 때 $\gamma=5$이다. 이때 $f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x-5)$이므로 점 P의 좌표는 $(3,8)$이고 점 C의 좌표는 $(5,0)$이다.
$\triangle\mathrm{POC}$의 변의 길이의 제곱은 각각 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{OP}}^2=3^2+8^2=73 \qquad \overline{\mathrm{PC}}^2=2^2+8^2=68 \qquad \overline{\mathrm{OC}}^2=5^2=25$$

이때 가장 긴 변의 길이는 $\overline{\mathrm{OP}}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}^2<\overline{\mathrm{PC}}^2+\overline{\mathrm{OC}}^2$이므로 $\triangle\mathrm{POC}$는 예각삼각형이다.

각 OPB는 각 OPC보다 작고, 점 P의 x좌표가 원점의 x좌표보다 크고 점 B의 x좌표 $2+\sqrt{5}$보다 작으므로 $\triangle\mathrm{OPB}$는 예각삼각형이다.

따라서 $f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x-5)$는 조건 (iv)를 만족시킨다.

4) $p=4$일 때 $\gamma=8$이다. 이때 $f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x-8)$이므로 점 P의 좌표는 $(4,4)$이고 점 C의 좌표는 $(8,0)$이다.
$\triangle\mathrm{OPC}$의 변의 길이의 제곱은 각각 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{OP}}^2=4^2+4^2=32 \qquad \overline{\mathrm{PC}}^2=4^2+4^2=32 \qquad \overline{\mathrm{OC}}^2=8^2=64$$

이때 가장 긴 변의 길이는 $\overline{\mathrm{OC}}$이고 $\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2+\overline{\mathrm{OP}}^2$이므로 $\triangle\mathrm{POC}$는 직각삼각형이다.
따라서 $f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x-8)$는 조건 (iv)를 만족시키지 못한다.

5) $p\geq 5$이면 점 P의 x좌표가 원점과 점 B의 x좌표보다 크다. 따라서 각 OBP는 $\dfrac{\pi}{2}$보다 크게 되어 $\triangle\mathrm{OBP}$는 둔각삼각형이 된다. 이 경우 함수 $f(x)$는 조건 (iv)를 만족시키지 못한다.

1)-5)로부터 문제의 조건을 모두 만족하는 삼차함수 $f(x)$는 1개이고 이때 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})(x-5)=(x^2-4x-1)(x-5)=x^3-9x^2+19x+5$$

나. 문제 2

출제 의도

속력과 시간의 관계 및 도함수를 활용하여 주어진 함수가 최대가 되도록 하는 조건을 찾는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 Ⅰ - (2) 삼각함수 - [1] 삼각함수 미적분 - (3) 적분법 - [2] 정적분의 활용 미적분 - (2) 미분법 - [2] 여러 가지 미분법
관련 성취기준	과목명: 수학 Ⅰ 성취기준 1: [12수학Ⅰ 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. 성취기준 2: [12수학Ⅰ 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. 과목명: 미적분 성취기준 1: [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. 성취기준 2: [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	70,77
	수학 Ⅰ	권오남 외 14명	교학사	2018	74,80
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	81,162
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	86,173

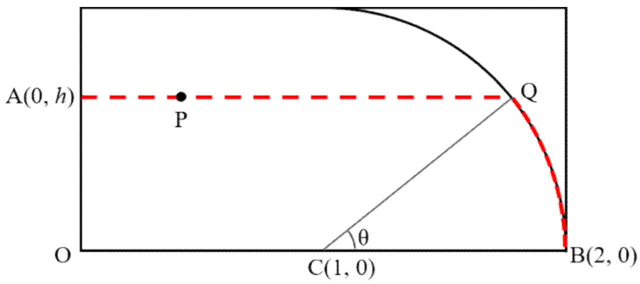
문항 해설

점 P가 움직이는 거리와 시간을 원호의 길이 θ에 대한 함수로 나타낸 후 도함수를 이용하여 시간이 최대가 되도록 하는 시각 $t=0$에서의 점 P에서의 위치를 구하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	점 P가 움직이는 거리와 시간을 원호의 길이 θ에 대한 함수로 나타내고 도함수 및 극값의 조건으로부터 시각 $t=0$에서의 점 P에서의 위치를 구할 수 있다.	25

예시 답안



위의 그림과 같이 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치를 A로 나타내고 곡선 $y=\sqrt{-x^2+2x}$를 만날 때의 점 P의 위치를 Q로 나타내자.

$1 \le x \le 2$일 때 곡선 $y=\sqrt{-x^2+2x}$은 중심이 $\mathrm{C}(1,0)$이고 반지름이 1인 원의 일부이므로, 위의 그림에서 $\angle \mathrm{QCB}=\theta$이면 $\mathrm{Q}=(1+\cos\theta, \sin\theta)$이다.

점 P가 곡선 $y=\sqrt{-x^2+2x}$를 만날때의 시각을 T라고 하면, 조건 (ii)에 의하여 $0 \le t \le T$일 때 시각 t에서의 점 P의 x좌표는 $x_0+\int_0^t u\,du$인데 $x_0=0$이므로 $\frac{t^2}{2}$이다. 따라서 점 P의 시각 t에서의 위치는 $\left(\frac{t^2}{2}, h\right)$이고 $h=\sin\theta$이다.

또한 $\frac{T^2}{2}=1+\cos\theta$로부터 $T=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$이다.

점 P는 점 Q로부터 $(2,0)$까지 곡선 $y=\sqrt{-x^2+2x}$ 위를 속력 $\sqrt{3}$으로 움직이는데 이때 점 P가 움직이는 거리는 $r\theta=\theta$이므로, 곡선 $y=\sqrt{-x^2+2x}$를 움직이는데 걸리는 시간은 $\frac{\theta}{\sqrt{3}}$이다.

따라서 점 P가 $(0,h)=(0,\sin\theta)$를 출발하여 $(2,0)$에 도착하는데 걸리는 시간 $t(\theta)$와 $t(\theta)$의 도함수 및 이계도함수는 각각 다음과 같다.

$$t(\theta)=\sqrt{2+2\cos\theta}+\frac{\theta}{\sqrt{3}}$$

$$t'(\theta)=\frac{-\sin\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t''(\theta)=-\frac{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{4}$$

$\theta=\theta_1$에서 함수 $t(\theta)$가 극값을 가질 때 $t'(\theta_1)=0$이므로

$$\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{2+2\cos\theta_1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sin^2\theta_1}{2+2\cos\theta_1}=\frac{1-\cos^2\theta_1}{2(1+\cos\theta_1)}$$

$0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$이므로 $1+\cos\theta_1 \ne 0$이고 $\frac{1-\cos\theta_1}{2}=\frac{1}{3}$

이로부터 $\cos\theta_1=\frac{1}{3}$이고 $\sin\theta_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. 이때 $t(\theta_1)$은 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 유일한 극값이고, $t''(\theta_1)<0$이므로 $t(\theta_1)$은 극댓값이다.

그러므로 $t(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 최댓값을 가지고 이때 $h=\sin\theta_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

다. 문제 3

출제 의도

매개화된 두 곡선 위를 움직이는 점의 위치를 계산하고 두 점 사이의 거리의 최솟값을 계산하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] "수학과 교육과정" 수학Ⅱ - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법
관련 성취기준	과목명: 수학Ⅱ 성취기준 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 과목명: 수학Ⅰ 성취기준 [12미적 02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	김원경 외 14명	비상교육	2018	78
	수학 Ⅱ	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	78
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	90
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	91

문항 해설

우주선의 시각 t에서의 위치를 계산하고 혜성과 우주선 사이의 거리의 최솟값을 구하며, 혜성이 지나는 곡선과 우주선이 지나는 직선이 최소가 될 때의 시각을 찾아서 우주선이 시각 $t=0$에서 어느 위치에 있을 때 혜성과 가능한 가장 가까운 거리를 지나는지를 파악하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	우주선의 시각 t에서의 위치를 계산하고 혜성과 우주선 사이의 거리를 함수로 나타내어 최솟값을 구할 수 있다.	10
(2)	혜성이 지나는 곡선과 우주선이 지나는 직선이 가장 가까울 때 혜성이 지나는 시각을 구하고 이로부터 우주선이 시각 $t=0$에서 어느 위치에 있어야 하는지 계산할 수 있다.	15

예시 답안

(1) 우주선의 시각 t에서의 위치는 $x=\sqrt{2}t-2\sqrt{2}$, $y=2t-5$이다.
시각 t에서 우주선과 혜성 사이의 거리를 $r(t)$라고 할 때

$$(r(t))^2=2(t-2)^2+(t^2-4t+8)^2$$

$s(t)=(r(t))^2$이라고 하고 함수 $s(t)$의 도함수를 구하자.

$$s'(t)=4(t-2)+2(t^2-4t+8)(2t-4)=4(t-2)(t^2-4t+9)$$

이로부터 함수 $s(t)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$s'(t)$	$-$	0	$+$
$s(t)$	$\searrow$	16	$\nearrow$

그러므로 함수 $s(t)$는 $t=2$에서 최솟값 16을 가지고, 이때 $r(2)=4$이다.
즉, 혜성과 우주선 사이의 거리가 최소가 되는 시각은 $t=2$이고 그 때의 혜성과 우주선 사이의 거리는 4이다.

(2) 혜성을 가능한 가장 가까운 거리에서 관측하기 위해서는 혜성이 움직이는 곡선 C 위의 점과 우주선이 움직이는 직선 ℓ 위의 점 중 가장 가까운 두 점을 혜성과 우주선이 각각 같은 시각에 지나야 한다.
우주선이 움직이는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$이므로 곡선 C 위의 점 중 직선 ℓ과 가장 가까운 점을 P라고 할 때, 곡선 C 위의 점 P에서 접하는 접선의 기울기는 $\sqrt{2}$이다. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법에 의하여 곡선 C 위의 시각 t에서의 점에서 접하는 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx}$는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-2}{2\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2}$일 때, 즉 $t=3$일 때 곡선 C 위의 점 P와 직선 ℓ 사이의 거리가 최솟값이 된다.

$t=3$일 때의 혜성의 위치는 $\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ 6)$이다. 점 P에서 직선 ℓ에 내린 수선을 직선 ℓ'이라고 할 때 직선 ℓ'은 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 점 $\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ 6)$를 지나는 직선이다.

$$\ell' : y=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2})+6=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+8,$$

직선 ℓ과 ℓ'의 교점 Q의 위치를 일차연립방정식으로 계산하면 $\mathrm{Q}(3\sqrt{2},\ 5)$이다.
시각 $t=0$일 때의 우주선의 위치를 $\left(x_0,\ \sqrt{2}x_0-1\right)$이라고 하면 시각 t에서의 우주선의 위치를

$$x = \sqrt{2}t + x_0,\ y = 2t + \sqrt{2}x_0 - 1$$

로 놓을 수 있다.

$t=3$**일 때 우주선이 점** $\mathrm{Q}(3\sqrt{2},\ 5)$**를 지나야 하므로,**

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + x_0,\ 5 = 6 + \sqrt{2}x_0 - 1$$

따라서 $t=0$**일 때** $x_0 = 0$**이고 우주선의 위치는** $(0, -1)$**이다.**

※(2)번의 다른 풀이

혜성을 가능한 가장 가까운 거리에서 관측하기 위해서는 혜성이 움직이는 곡선 C **위의 점과 우주선이 움직이는 직선** ℓ **위의 점 중 가장 가까운 두 점을 혜성과 우주선이 각각 같은 시각에 지나야 한다.**

우주선이 움직이는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$**이므로 곡선** C **위의 점 중 직선** ℓ**과 가장 가까운 점을** P**라고 할 때, 곡선** C **위의 점** P**에서 접하는 접선의 기울기는** $\sqrt{2}$**이다. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법에 의하여 곡선** C **위의 시각** t **에서의 점에서 접하는 접선의 기울기** $\dfrac{dy}{dx}$**는**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-2}{2\sqrt{2}}$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2}$**일 때, 즉** $t=3$**일 때 곡선** C **위의 점** P**와 직선** ℓ **사이의 거리가 최솟값이 된다.**

시각 $t=0$**에서의 우주선의 위치를** $(a,\ \sqrt{2}a-1)$**이라고 하면 시각** t**에서의 우주선의 위치는** $(\sqrt{2}t+a, 2t+\sqrt{2}a-1)$**이다. 시각** t**에서 혜성과 우주선 사이의 거리를** $r(t)$**라고 할 때**

$$\begin{aligned}(r(t))^2 &= (2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} - \sqrt{2}t - a)^2 + (t^2 - 2t + 3 - 2t - \sqrt{2}a + 1)^2 \\ &= (\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} - a)^2 + (t^2 - 4t + 4 - \sqrt{2}a)^2\end{aligned}$$

$s(t) = (r(t))^2$ **이라고 할 때 함수** $s(t)$**는** $t=3$**에서 최솟값을 가져야 하므로** $s'(3)=0$**이다.**

$$s'(t) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} - a) + 2(t^2 - 4t + 4 - \sqrt{2}a)(2t-4)$$

$s'(3)=0$**이기 위해서는**

$$-3\sqrt{2}a = 0$$

따라서 $a=0$**이고, 시각** $t=0$**에서의 우주선의 위치는**

$$x = 0,\ y = -1$$

라. 문제 4

출제 의도

구하는 정적분을 치환적분법을 이용하여 변형한 후 주어진 조건으로부터 정적분의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] "수학과 교육과정" 수학 Ⅰ - (3) 수열 - 2 수열의 합 미적분 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
관련 성취기준	과목명: 수학 Ⅰ 성취기준 [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째 항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. 과목명: 미적분 성취기준 [12미적 03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	140
	수학 Ⅰ	권오남 외 14명	교학사	2018	141
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	134
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	143

문항 해설

조건을 이용하여 구하는 정적분의 형태를 변형한 후 문제에서 주어진 다른 조건으로부터 정적분의 값을 찾으며, 정적분의 성질을 이용하여 주어진 정적분을 정적분의 합으로 나타낸 후 치환적분법, 문제의 조건 및 부분분수 표현으로부터 정적분의 값을 계산하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	치환적분법 및 문제의 조건을 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있다.	7.5
(2)	정적분의 성질을 이용하여 주어진 정적분의 형태를 변형한 후 치환적분법, 문제의 조건 및 부분분수 표현을 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있다.	17.5

예시 답안

(1) $t=x-S_n$으로 치환하면 $\int_0^{a_n} f(x-S_n)\,dx=\int_{-S_n}^{-S_n+a_n} f(t)\,dt$이고, $-S_n+a_n=-S_{n-1}$이므로

$$\int_{-S_n}^{-S_n+a_n} f(t)\,dt=\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} f(t)\,dt$$

a_n은 모두 0보다 크거나 같으므로 $-S_n\le 0$이다. 조건 (i)에 의하여

$$\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} f(t)\,dt=\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} g(t)\,dt$$

따라서

$$\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} g(x)\,dx=\int_0^{a_n} f(x-S_n)\,dx=1,$$

$$\int_{-S_{n-1}}^{-S_n} g(x)\,dx=-1$$

(2) 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{2023} f(x)dx=\sum_{n=1}^{2023}\int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

n이 1보다 크거나 같은 정수일 때

$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx=\int_{n-1}^{n} g(-S_n+(n-1-x)a_{n+1})dx$$

$t=-S_n+(n-1-x)a_{n+1}$라고 두면

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^{n} f(x)dx&=\int_{n-1}^{n} g(-S_n+(n-1-x)a_{n+1})\,dx\\&=\int_{-S_n}^{-S_n-a_{n+1}}\left(-\frac{g(t)}{a_{n+1}}\right)dt\\&=\int_{-S_n-a_{n+1}}^{-S_n}\frac{g(t)}{a_{n+1}}dt\end{aligned}$$

그런데 $-S_n-a_{n+1}=-S_{n+1}$ 이고 $n\ge 2$일 때 문항 (1)의 결과에 의하여 $\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} g(t)\,dt=1$이므로, $n\ge 1$일 때 $\int_{-S_{n+1}}^{-S_n} g(t)dt=1$이다.

그러므로

$$\int_{-S_n - a_{n+1}}^{-S_n} \frac{g(t)}{a_{n+1}} dt = \frac{1}{a_{n+1}} \int_{-S_{n+1}}^{-S_n} g(t) dt = \frac{1}{a_{n+1}}$$

따라서 $\int_{n-1}^{n} f(x)dx = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 이고,

$$\int_0^{2023} f(x)dx = \sum_{n=1}^{2023} \int_{n-1}^{n} f(x)dx = \sum_{n=1}^{2023} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$$