Ⅲ. 모의논술고사 문제 및 해설 [자연계열]

문제 1

아래 제시문을 읽고 다음 논제에 답하시오. (30점)

함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L \quad (L\text{은 실수})$$

[출처 : 수학II 「함수의 극한」]

구간 $[0, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{-x^{n+2} + ax^{n+1} + bx^n + c\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{x^n + 1} \quad (a,\ b,\ c\text{는 상수})$$

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 함수 $f(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 연속이 되도록 하는 a, b, c에 대하여 a를 b와 c의 식으로 나타내시오.

(2) 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하도록 하는 a, b, c에 대하여 b를 c의 식으로 나타내시오.

(3) 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능할 때, 구간 $[0, \infty)$에서 방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 두 개의 해를 갖도록 하는 양수 c의 값을 구하시오.

문제 2

아래 제시문을 읽고 다음 논제에 답하시오. (20점)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

[출처 : 미적분 「여러 가지 적분법」]

(1) 이차함수 $p(t)=t^2+bt+c$에 대하여 정적분 $\int_0^x \frac{p(t)+p'(t)}{3}e^t\,dt$를 구하시오. ($b$, c는 상수)

(2) $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$이고 도함수가 실수 전체에서 연속인 함수 $f(t)$에 대하여

$$f_1(x)=\int_0^x \frac{f(t)+f'(t)}{3}e^t\,dt$$

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x \frac{f_n(t)+f_n'(t)}{3}e^t\,dt \ (n\text{은 자연수})$$

로 정의하자. 이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{2}\right)$의 합을 구하시오.

문제 3

아래 제시문을 읽고 다음 논제에 답하시오. (30점)

> 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.
>
> [출처 : 수학II 「미분계수와 도함수」]

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x)=x^2 \ (x \ge 0)$$

$$g(x)=-ax^2+c \ (x<0) \quad (a,\ c\text{는 상수이고 } a>0,\ \frac{1}{4}<c<\frac{3}{2})$$

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P=(1,1)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 곡선 $y=g(x)$ 위의 한 점 Q를 찾을 수 있을 때 함수 $g(x)$의 계수 a와 c의 관계식을 구하시오.

조건 : 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P=(1,1)$에서의 접선과 y축의 교점을 R, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 y축의 교점을 S라고 할 때, 점 P, Q, R, S를 지나고 중심이 y축 위에 있는 원이 존재한다.

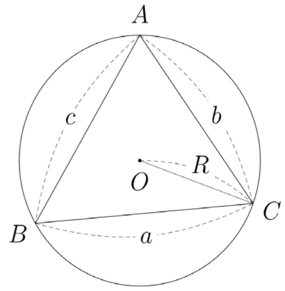
(2) 점 $P=(1,1)$에 대하여 문항 (1)로부터 주어지는 사각형 $PRQS$의 넓이가 최대가 되도록 하는 함수 $g(x)$의 계수 a와 c를 구하시오.

문제 4

아래 제시문을 읽고 다음 논제에 답하시오. (20점)

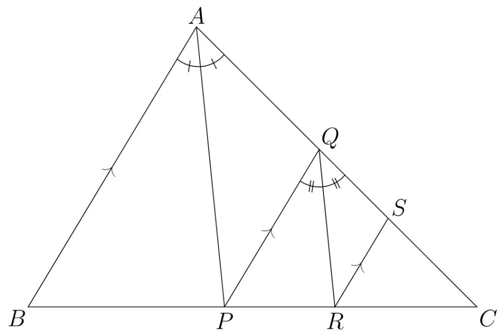
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



[출처 : 수학Ⅰ 「사인법칙과 코사인법칙」]

〈그림 1〉과 같이 삼각형 ABC에서 $\angle BAC$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 P라고 하고, 점 P를 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 변 AC와 만나는 점을 Q라고 하자. 또한, $\angle PQC$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 R라고 하고, 점 R를 지나고 직선 PQ에 평행한 직선이 변 AC와 만나는 점을 S라고 하자.



〈그림 1〉

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 사인법칙을 이용하여 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{PC}$가 성립함을 보이시오.

(2) $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$이고 삼각형 ABP와 삼각형 QRS의 넓이의 비가 $27 : 1$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

문제 1 예시 답안 및 해설

(1) $0 \le x < 1$일 때: $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-x^{n+2}+ax^{n+1}+bx^n+c\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{x^n+1} = c\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)$$

$x=1$일 때: $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-x^{n+2}+ax^{n+1}+bx^n+c\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{x^n+1} = \frac{-1+a+b-\frac{c}{2}}{2}$$

$x>1$일 때: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $-\frac{1}{x^n} \le \frac{\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{x^n} \le \frac{1}{x^n}$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{x^n} = 0$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{-x^{n+2}+ax^{n+1}+bx^n+c\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{x^n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-x^2+ax+b+\frac{c\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}} \\ &= -x^2+ax+b\end{aligned}$$

위의 세 경우를 종합하면 다음을 얻는다.

$$f(x) = \begin{cases} c\cos\frac{4\pi x}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{-2+2a+2b-c}{4}, & x = 1 \\ -x^2+ax+b, & x > 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

함수 $f(x)$는 구간 $[0,1)$과 $(1,\infty)$에서 연속이므로 $f(x)$가 구간 $[0,\infty)$에서 연속이기 위해서는 $x=1$에서 연속, 즉 $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x)$ 이면 된다. 각 극한을 구하면

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = c\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{c}{2}, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = -1+a+b \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이므로

$$a=1-b-\frac{c}{2} \quad \cdots\cdots \text{ ㉢}$$

이다.

(2) 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$과 $(1,\ \infty)$에서 미분가능하다. 그러므로 $f(x)$가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하기 위해서는 $x=1$에서 미분가능하면 된다. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 식 ㉡으로부터

$$f(1)=c\cos\frac{4\pi}{3}=-1+a+b$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{c\cos\frac{4\pi x}{3}-c\cos\frac{4\pi}{3}}{x-1}=-\frac{4\pi c}{3}\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{2\pi c}{\sqrt{3}},$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(-x^2+ax+b)-(-1+a+b)}{x-1}=-2+a=-1-b-\frac{c}{2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이어야 하므로

$$b=-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)c \quad \cdots\cdots \text{ ㉣}$$

(3) $c>0$일 때 구간 $[0,1]$에서 방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=\frac{3}{8}$ 하나뿐이다. $x>1$일 때, 식 ㉠, ㉢, ㉣로부터

$$f(x)=-x^2+\left(2+\frac{2\pi c}{\sqrt{3}}\right)x-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)c=-\left(x-1-\frac{\pi c}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{\pi^2c^2}{3}-\frac{c}{2}$$

이므로, $f(x)$는 $x=1+\frac{\pi c}{\sqrt{3}}$에서 최댓값 $\frac{\pi^2c^2}{3}-\frac{c}{2}$를 갖는다. 구간 $(1,\infty)$에서 $f(x)=0$이 꼭 하나의 해를 갖는 것은 $f(x)$의 최댓값이 0일 때이므로 $c=\frac{3}{2\pi^2}$이다.

(참고: $c=\frac{3}{2\pi^2}$일 때 $f(x)=0$은 구간 $[0,\infty)$에서 두 점 $x=\frac{3}{8}$, $x=1+\frac{\pi c}{\sqrt{3}}$만을 해로 갖는다.)

문제 2 예시 답안 및 해설

(1) 제시문에 $f(t)=p(t)$, $g(t)=\frac{1}{3}e^t$ 를 대입하고 $g'(t)=g(t)$를 이용하면

$$\frac{1}{3}\int p(t)e^t dt = \frac{1}{3}p(t)e^t - \frac{1}{3}\int p'(t)e^t dt$$

를 얻을 수 있다. 또 위의 식으로부터

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{p(t)+p'(t)}{3}e^t dt &= \frac{1}{3}p(t)e^t\Big|_0^x = \frac{1}{3}\left(p(x)e^x - p(0)\right) \quad \cdots\cdots \text{㉠} \\ &= \frac{1}{3}\left((x^2+bx+c)e^x - c\right)\end{aligned}$$

(2) 식 ㉠은 도함수가 실수 전체에서 연속인 함수 $f(t)$에 대해 성립하므로 구간 $[0, \frac{1}{2}]$에서

$$f_1(\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)+f'(t)}{3}e^t dt = \frac{1}{3}f(t)e^t\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(f(\frac{1}{2})\sqrt{e} - f(0)\right) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$f(0)=0$이므로 $f_1(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{3}f(\frac{1}{2})$이다.

$f_n(x)$의 정의에 따라 모든 자연수 n에 대해 $f_n(0)=0$이므로 식 ㉡을 $f_1(t)$에 적용하여 $f_2(\frac{1}{2})$을 구하면

$$f_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}f_1(\frac{1}{2})\sqrt{e} = \left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)^2 f(\frac{1}{2})$$

따라서 자연수 n에 대하여

$$f_{n+1}(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{3}f_n(\frac{1}{2}) = \left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)^{n+1} f(\frac{1}{2})$$

이 성립하므로 $f_n(\frac{1}{2})$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{e}}{3}f(\frac{1}{2})$이고 공비 $\frac{\sqrt{e}}{3}$를 가지는 등비수열이다. 공비 $\frac{\sqrt{e}}{3}$는 1보다 작으므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\frac{1}{2})$은 수렴하고 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)^{n} = \frac{\sqrt{e}}{3} f\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{\sqrt{e}}{3}} = \frac{3\sqrt{e}}{3-\sqrt{e}}$$

이다.

문제 3 예시 답안 및 해설

(1) 점 P, Q, R, S가 모두 한 원 위의 점이고 원의 중심과 R, S가 y축 위에 있으므로 $\angle RPS$, $\angle SQR$은 직각이다. 주어진 조건을 만족하는 점 Q의 좌표를 $(r, -ar^2+c)$라고 하면 위의 점을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

직선 PR = 점 P에서의 접선 : $y=2x-1$

직선 PS = 점 P에서의 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선 : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

직선 QS = 점 Q에서의 접선 : $y=-2arx+ar^2+c$

직선 QR = 점 Q에서의 접선에 수직이고 점 Q를 지나는 직선 : $y=\frac{1}{2ar}x-ar^2-\frac{1}{2a}+c$

따라서 다음이 성립한다.

[점 R의 y좌표] = [직선 PR의 y절편] = [직선 QR의 y절편]

[점 S의 y좌표] = [직선 QS의 y절편] = [직선 PS의 y절편]

위로부터

$$-1=-ar^2-\frac{1}{2a}+c \Rightarrow ar^2=-\frac{1}{2a}+c+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{3}{2}=ar^2+c \Rightarrow ar^2=\frac{3}{2}-c \quad \cdots\cdots ㉡$$

를 얻을 수 있다. 식 ㉠, ㉡으로부터 a와 c의 관계식은 다음과 같다.

$$-\frac{1}{2a}+c=\frac{1}{2}-c \Rightarrow a(4c-1)=1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

(참고: 이때 식 ㉢에서 $a>0$이므로 $c>\frac{1}{4}$이어야 하고, 식 ㉡에서 $ar^2>0$이므로 $c<\frac{3}{2}$일 때 식 ㉡을 만족하는 r이 존재한다. 또 식 ㉠에서

$$-\frac{1}{2a}+c+1=-\frac{4c-1}{2}+c+1=-c+\frac{3}{2}>0$$

이므로 $c<\frac{3}{2}$일 때 식 ㉠을 만족하는 r이 존재한다.)

(2) $P=(1,1)$, $Q=(r,-ar^2+c)$일 때 $R=(0,-1)$, $S=(0,\frac{3}{2})$이다. 따라서 사각형 $PRQS$의 넓이를 r로 나타내면 $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot(1-r)$이므로, 점 Q의 x좌표가 가장 작을 때 사각형 $PRQS$의 넓이가 최대임을 알 수 있다. 식 ㉡, ㉢으로부터

$$r^2=\frac{3-2c}{2a}=\frac{(3-2c)(4c-1)}{2} \Rightarrow r=-\sqrt{\frac{(3-2c)(4c-1)}{2}} \quad (\frac{1}{4}<c<\frac{3}{2})$$

따라서 $(3-2c)(4c-1)$이 최댓값을 가질 때 r은 최솟값을 갖는다.
$(3-2c)(4c-1)=-8(c-\frac{7}{8})^2+\frac{25}{8}$은 $c=\frac{7}{8}$일 때 최댓값을 갖고 식 ㉢으로부터 $a=\frac{2}{5}$이다. 그러므로 사각형 $PRQS$의 넓이가 최대가 되도록 하는 함수 $g(x)$의 계수는

$$a=\frac{2}{5}, \quad c=\frac{7}{8}$$

이다.

문제 4 예시 답안 및 해설

(1) 〈그림 1〉에서

$$\theta_1=\angle BAP=\angle PAC,\ \theta_2=\angle BPA$$

라 하자. 두 삼각형 ABP와 APC에 사인법칙을 적용하면 다음 두 식

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta_2}=\frac{\overline{BP}}{\sin\theta_1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta_2)}=\frac{\overline{PC}}{\sin\theta_1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

을 얻는다. 식 ㉡에서 $\sin(\pi-\theta_2)=\sin\theta_2$이므로

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta_2}=\frac{\overline{PC}}{\sin\theta_1} \quad \cdots\cdots ㉢$$

식 ㉠과 ㉢으로부터 다음 관계

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} \quad \cdots\cdots ㉣$$

를 얻을 수 있고 식 ㉣로부터 비례식

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{PC} \quad \cdots\cdots ㉤$$

이 성립함을 알 수 있다.

(2) $\overline{AC}=b$로 두면 $\overline{AB}=4$이므로 식 ㉤으로부터 다음 식이 성립한다.

$$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:b \quad \cdots\cdots ㉥$$

두 삼각형 ABC와 QPC는 닮은꼴이고 닮음비는 $\overline{BC}$와 $\overline{PC}$의 비와 같으며 식 ㉥으로부터

$$\overline{BC}:\overline{PC}=4+b:b$$

이다. 따라서 두 삼각형 ABC와 QPC의 닮음비는 $\frac{4+b}{b}:1$이다.

$\overline{AB}$와 $\overline{QP}$가 평행하므로 두 삼각형 ABP, APQ의 넓이의 비는 $\overline{AB}$와 $\overline{QP}$의 비와 같고 이것은 위에서 구한 두 삼각형 ABC와 QPC의 닮음비와 같다. 즉, 두 삼각형 ABP와 APQ의 넓이의 비는 $\frac{4+b}{b}:1$이다.

또 $\overline{AB}$와 $\overline{QP}$가 평행하고, $\overline{AP}$와 $\overline{QR}$는 각각 $\angle BAC$와 $\angle PQC$의 이등분선이므로 $\overline{AP}$와 $\overline{QR}$는 평

행하다. $\overline{AP}$와 $\overline{QR}$가 평행하면 앞에서와 마찬가지로 두 삼각형 APQ와 QPR의 넓이의 비는 $\overline{AP}$와 $\overline{QR}$의 비와 같다. 두 삼각형 APC와 QRC는 닮은꼴이고 닮음비는 앞에서와 마찬가지로 $\frac{4+b}{b}$: 1이므로 두 삼각형 APQ와 QPR의 넓이의 비는 $\frac{4+b}{b}$: 1이다. 앞에서와 같은 방법으로 두 삼각형 QPR와 QRS의 넓이의 비는 $\overline{QP}$와 $\overline{SR}$의 비와 같고 $\frac{4+b}{b}$: 1이다.

따라서 두 삼각형 ABP와 QRS의 넓이의 비는 $\left(\frac{4+b}{b}\right)^3$: 1이다. 그런데 두 삼각형 넓이의 비가 27:1이므로,

$$\left(\frac{4+b}{b}\right)^3 = 27, \quad b = 2$$

$\angle B = \theta$로 두고 삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\theta = \frac{4^2+5^2-2^2}{2\times 4\times 5} = \frac{37}{40}$$

$0 < \theta < \pi$로부터 $\sin\theta > 0$이므로

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{231}}{40}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\theta = \frac{4\times 5}{2}\frac{\sqrt{231}}{40} = \frac{\sqrt{231}}{4}$$

이다.