Ⅳ. 2022학년도 논술고사 문제 및 해설(자연1)

숭실대학교
Soongsil University

1. 출제문제

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

> 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분 가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는
>
> $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$
>
> [출처 : 미적분 「합성함수의 미분법」]

구간 $[0,\infty)$에서 연속이고 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (i) $g(1)=1$이고 모든 $x\geq 0$에 대하여 $g(2x)=3g(x)$이다.
>
> (ii) 모든 $x\geq 0$에 대하여 $f(g(x))=x$이다.

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) $f'(3)\times g'(1)$의 값을 구하시오.

(2) $\int_1^2 g(x)\,dx=A$일 때 $\int_0^1 g(x)\,dx$의 값을 A에 대한 식으로 나타내시오.

【문제 2】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

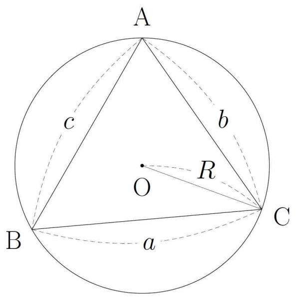
> 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.
>
> ① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
>
> ② 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.
>
> ③ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$
>
> [출처 : 수학II 「함수의 연속」]

삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (i) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
>
> (ii) 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$의 교점은 두 개이며, 두 교점의 x좌표 중 더 큰 값은 2이다.
>
> (iii) 함수 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}\left(\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}-1\right) & (x\neq 2)\\ 16 & (x=2)\end{cases}$ 는 연속함수이다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

【문제 3】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

> 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면
>
> $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$
>
> 
>
>
> [출처 : 수학Ⅰ「사인법칙과 코사인법칙」]

반지름의 길이가 $\frac{7\sqrt{2}}{4}$인 원에 삼각형 ABC가 내접한다. 삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{6}$이고 $\cos A=\frac{5}{7}$이다.

이때 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 모두 구하시오.

【문제 4】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

> 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
>
> ① $r\neq 1$일 때 $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$
>
> ② $r=1$일 때 $S_n=na$
>
> [출처 : 수학Ⅰ 「등비수열」]

모든 자연수 n에 대하여 $x_n=3\pi\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$이다. 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (i) 닫힌구간 $[x_n,\ x_{n+1}]$에서 실수 a_n, 양수 b_n에 대하여 $f(x)=a_n\sin(b_n x)$이다.
>
> (ii) $f(x_n)=f(x_{n+1})=0$이고, 열린구간 $(x_n,\ x_{n+1})$에서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 2개의 해를 갖는다.
>
> (iii) $f'(x_1)=\frac{1}{2}$

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) b_{10}을 구하시오.

(2) 정적분 $\int_{x_1}^{x_{10}} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

2. 문제해설

가. 문제1

출제 의도

합성함수의 미분법 및 치환적분법을 활용하여 주어진 함수의 미분계수와 정적분의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="2">미적분 - (2) 미분법 – ② 여러 가지 미분법
미적분 - (3) 적분법 – ① 여러 가지 적분법</td></tr>
<tr><td rowspan="3">관련
성취기준</td><td colspan="2">과목명: 미적분</td></tr>
<tr><td>성취기준1</td><td>[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준2</td><td>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

2. 자료 출처

<table>
<tr><th>참고자료</th><th>도서명</th><th>저자</th><th>발행처</th><th>발행년도</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td rowspan="2">고등학교
교과서</td><td>미적분</td><td>박교식 외 19명</td><td>동아출판</td><td>2018</td><td>81</td></tr>
<tr><td>미적분</td><td>황선욱 외 8명</td><td>미래엔</td><td>2018</td><td>143</td></tr>
</table>

문항 해설

합성함수의 미분법을 활용하여 제시된 조건을 만족하는 두 함수의 미분계수 사이의 관계를 올바르게 유도하며, 치환적분법을 활용하여 함수 서로 다른 구간에서 함수 $g(x)$의 정적분 값 사이의 관계를 올바르게 유도하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건으로부터 두 미분계수의 곱을 계산할 수 있다.	10
(2)	치환적분법을 이용하여 주어진 정적분의 값과 다른 정적분의 값의 관계를 찾을 수 있다.	15

예시 답안

(1) 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(2x) = 3g(x)$이므로 $x = 1$일 때

$$g(2) = 3g(1) = 3$$

합성함수의 미분법의 결과 $f'(g(x))g'(x) = 1$로부터 $f'(3)$의 값을 구하면

$$f'(g(2))g'(2) = f'(3)g'(2) = 1, \quad f'(3) = \frac{1}{g'(2)}$$

$g(x) = \frac{1}{3}g(2x)$의 양변을 x에 대하여 미분하여, $g'(1)$의 값을 구하면

$$g'(x) = \frac{2}{3}g'(2x), \quad g'(1) = \frac{2}{3}g'(2)$$

따라서

$$f'(3) \times g'(1) = \frac{1}{g'(2)} \times \frac{2}{3}g'(2) = \frac{2}{3}$$

이다.

(2) $B = \int_0^1 g(x)\,dx$라고 하자. $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}g(2x)\,dx$에서 $2x = t$로 놓으면 $x = 0$일 때 $t = 0$, $x = 1$일 때 $t = 2$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned} B &= \int_0^2 \frac{1}{3}g(t)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{6}\int_0^2 g(t)\,dt \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 g(t)\,dt + \frac{1}{6}\int_1^2 g(t)\,dt \\ &= \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}A \end{aligned}$$

따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_0^1 g(x)\,dx = B = \frac{1}{5}A$$

이다.

나. 문제2

출제 의도

삼차함수의 특징, 함수의 연속성과 극한, 미분계수의 정의를 이용하여 구하는 함수에 대한 정보를 바르게 도출하고, 도출된 함수로 정의되는 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 해결하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	학 Ⅱ - (1) 함수의 극한과 연속 - [2] 함수의 연속 수학 Ⅱ - (2) 미분 - [1] 미분계수 수학 Ⅱ - (3) 적분 - [3] 정적분의 활용 미적분 - (2) 미분법 - [1] 여러 가지 함수의 미분	
관련 성취기준	과목명: 수학 Ⅱ	
	성취기준1	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
	성취기준2	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
	성취기준3	[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	과목명: 미적분	
	성취기준1	[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	이준열 외 9명	천재교육	2018	29
	수학 Ⅱ	김원경 외 14명	비상교육	2018	125
	미적분	권오남 외 14명	교학사	2019	60
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	60

문항 해설

교점의 정보와, 주어진 함수와 관련된 다른 함수의 연속성, 미분계수의 정의를 이용하여 두 곡선의 차이를 정의하는 함수를 바르게 도출하고, 이로부터 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 계산하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건으로부터 두 함수의 차를 나타내는 삼차함수의 모양을 찾고 정적분의 값을 계산할 수 있다.	25

예시 답안

$p(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 함수 $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. 방정식 $p(x)=0$의 두 해 중 작은 값을 a라고 하면

$p(x)=(x-a)(x-2)^2$ 또는 $p(x)=(x-a)^2(x-2)$

$p(2)=0$임을 이용하면

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}-1\right)=\lim_{x\to 2}\frac{e^{f(x)-g(x)}-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{e^{p(x)}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{e^{p(x)}-e^{p(2)}}{x-2}$$

위의 극한값은 $e^{p(x)}$의 $x=2$에서의 미분계수이므로 $\lim_{x\to 2}h(x)=p'(2)e^{p(2)}=p'(2)$이다. 함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2}h(x)=p'(2)=16$이다.

만약, $p(x)=(x-a)(x-2)^2$이면 $p'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2)$, $p'(2)=0\neq 16$ 이므로 $p(x)=(x-a)^2(x-2)$가 되어야 한다.

이때 $p'(x)=2(x-a)(x-2)+(x-a)^2$, $p'(2)=(2-a)^2=16$이므로 $a=-2$ 또는 $a=6$이어야 한다. 그런데 $a<2$이므로 $p(x)=(x+2)^2(x-2)$ 이다.

구간 $[-2,2]$에서 $p(x)\leq 0$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^{2}[-p(x)]dx=-\int_{-2}^{2}(x+2)^2(x-2)dx$$

$$=-\int_{-2}^{2}(x^3+2x^2-4x-8)dx$$

$$=-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-2x^2-8x\right]_{-2}^{2}$$

$$=-\left(4+\frac{16}{3}-8-16\right)+\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)$$

$$=\frac{64}{3}$$

이다.

다. 문제3

출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형에 대한 정보를 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	학 Ⅱ - (1) 함수의 극한과 연속 - [2] 함수의 연속 수학 Ⅱ - (2) 미분 - [1] 미분계수 수학 Ⅱ - (3) 적분 - [3] 정적분의 활용 미적분 - (2) 미분법 - [1] 여러 가지 함수의 미분
관련 성취기준	**과목명: 수학** 성취기준: [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. **과목명: 수학 Ⅰ** 성취기준: [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	60
	수학	고성은 외 6명	좋은책 신사고	2018	51
	수학 Ⅰ	배종숙 외 6명	금성출판사	2018	97
	수학 Ⅰ	박교식 외 19명	동아출판	2018	86

문항 해설

사인법칙을 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 삼각형의 넓이의 조건과 코사인법칙을 이용하여 나머지 두 변의 합과 곱을 유도한 뒤, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이를 계산하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	사인법칙과 코사인법칙, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 세 변의 길이의 값을 구할 수 있다.	20

예시 답안

$\cos A = \frac{5}{7}$, $0 < A < \pi$이므로

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \text{ 즉 } a = 2R\sin A = 2\times\frac{7\sqrt{2}}{4}\times\frac{2\sqrt{6}}{7} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{6}$이므로

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{6}}{7}bc, \text{ 즉 } bc = 7$$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} 12 = a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A) \end{aligned}$$

이므로

$$(b+c)^2 = 12 + 2bc(1+\cos A) = 12 + 14\left(1+\frac{5}{7}\right) = 36, \quad b+c = 6$$

위로부터 $bc = 7$, $b+c = 6$이다. 두 수 b, c를 근으로 갖는 이차방정식

$$x^2 - (b+c)x + bc = x^2 - 6x + 7 = 0$$

의 해는 $x = 3 \pm \sqrt{2}$이다.

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 $2\sqrt{3}$, $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$이다.

라. 문제4

출제 의도

삼각함수의 주기성과 미분계수의 정의로부터 주어진 함수의 정보를 도출하여 주어진 정적분을 구하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>수학 Ⅰ - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수
수학 Ⅱ - (2) 미분 - ① 미분계수
미적분 - (1) 수열의 극한 - ② 급수
미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분
미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학 Ⅰ</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학 Ⅱ</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td colspan="2">과목명: 미적분</td></tr>
<tr><td>성취기준1</td><td>[12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준2</td><td>[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준3</td><td>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	박교식 외 19명	동아출판	2018	72
	수학 Ⅰ	배종숙 외 6명	금성출판사	2018	97
	수학 Ⅱ	김원경 외 14명	비상교육	2018	125
	수학 Ⅱ	권오남 외 14명	교학사	2018	68
	미적분	권오남 외 14명	교학사	2019	37
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	75, 137

문항 해설

x절편의 개수와 삼각함수의 주기성, 미분계수의 정의를 이용하여 각각의 구간에서 함수를 올바르게 정의하고 정적분을 정확히 계산하여 전체 구간에서의 정적분을 등비급수의 합을 이용하여 올바르게 구하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	사인함수의 주기의 성질과 문제의 조건으로부터 수열의 제10항을 찾아낼 수 있다.	9
(2)	미분계수의 정의로부터 주어진 함수의 모양을 찾아내고 각 구간의 정적분의 합을 등비급수로 나타내어 구하는 정적분의 값을 계산할 수 있다.	21

예시 답안

(1) 구간 $[x_n, x_{n+1}]$에서 $f(x) = a_n \sin(b_n x)$이므로 조건 (ii)에 의하여

$$f(x_n) = f(x_n + \frac{\pi}{b_n}) = f(x_n + \frac{2\pi}{b_n}) = f(x_n + \frac{3\pi}{b_n}) = 0$$

따라서 $x_{n+1} = x_n + \dfrac{3\pi}{b_n}$이고

$$x_{n+1} - x_n = 3\pi(1 - \frac{1}{2^n}) - 3\pi(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{3\pi}{2^n},\ b_n = 2^n$$

그러므로 $b_{10} = 2^{10} = 1024$이다.

(2) $b_n x_n = 2^n \times 3\pi(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}) = 3\pi(2^n - 2)$, $\quad b_n x_{n+1} = b_n x_n + 3\pi = 3\pi(2^n - 1)$이므로,

모든 $n \geq 1$에 대하여 $\quad \cos(b_n x_n) = 1,\ \cos(b_n x_{n+1}) = -1$

함수 $f(x)$는 미분가능하고, $n \geq 2$일 때 구간 $[x_{n-1}, x_n]$에서 $f(x) = a_{n-1}\sin(2^{n-1}x)$, 구간 $[x_n, x_{n+1}]$에서 $f(x) = a_n \sin(2^n x)$이다. 실수 전체에서 미분가능한 두 함수 $g(x) = a_{n-1}\sin(2^{n-1}x), h(x) = a_n \sin(2^n x)$에 대하여

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n -} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = \lim_{x \to x_n -} \frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n}$$

$$= g'(x_n) = 2^{n-1} a_{n-1} \cos(2^{n-1} x_n)$$

$$= -2^{n-1} a_{n-1}$$

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n +} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = \lim_{x \to x_n +} \frac{h(x) - h(x_n)}{x - x_n}$$

$$= h'(x_n) = 2^n a_n \cos(2^n x_n)$$

$$= 2^n a_n$$

이로부터 $n \geq 2$일 때

$$-2^{n-1}a_{n-1} = f'(x_n) = 2^n a_n,\ a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}$$

또한, $f'(x_1) = 2a_1\cos(0) = 2a_1 = \frac{1}{2}$이므로 $a_1 = \frac{1}{4}$이다. 그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이고, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$이다.

구간 $[x_n, x_{n+1}]$에서

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} a_n \sin(2^n x)\,dx \\
&= \frac{a_n}{2^n}\left[-\cos(2^n x)\right]_{x_n}^{x_{n+1}} \\
&= \frac{a_n}{2^n}\left(-\cos(2^n x_{n+1}) + \cos(2^n x_n)\right) \\
&= \frac{a_n}{2^{n-1}} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_{10}} f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{9}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^9\right)}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^9\right)
\end{aligned}$$

이다.