Ⅲ. 모의논술고사 문제 및 해설 [자연계열]

문제 1 다음 논제에 답하시오. (30점)

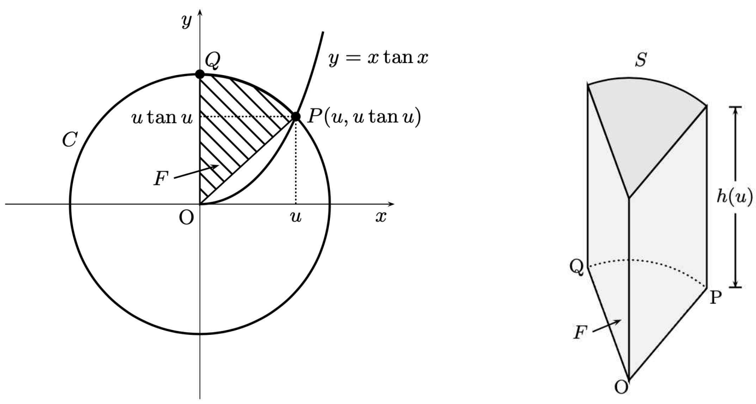
함수 $f(x)=\sqrt{x}\ln x\ (x\geq 1)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 함수 $h(x)=g(2x-1)$에 대하여 다음 문항에 답하시오.

(1) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(\dfrac{\sqrt{e}+1}{2},\ e\right)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 곡선 $y=h(x)$와 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\sqrt{e}+1}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하시오.

문제 2 다음 논제에 답하시오. (20점)

좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 곡선 $y=x\tan x\ \left(0\leq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 위의 점 $P(u,\,u\tan u)$를 지나는 원 C가 있다. <그림 1>과 같이 평면도형 F는 원 C와 선분 OP 및 y축으로 둘러싸인 부채꼴이고, 입체도형 S는 밑면이 F이고 높이가 $h(u)$인 부채꼴 기둥이다. S의 부피 $V(u)$의 순간변화율 $\dfrac{dV}{du}$가 항상 0이고 $V(1)=1$일 때, $\displaystyle\lim_{u\to\frac{\pi}{2}-}\frac{dh}{du}$를 구하시오.



<그림 1>

문제 3 **다음 논제에 답하시오. (30점)**

배구 경기는 5세트 중에서 3세트를 먼저 이긴 팀이 최종 승리한다. 매 세트마다 한 팀이 다른 팀을 이길 확률은 이전 세트까지의 전적(세트스코어)에 의해 결정되는데, 세트스코어가 s승 t패인 팀이 다음 세트에서 이길 확률은 $\dfrac{(s-t)+5}{10}$이다. (단, 매 세트에 무승부는 없다.) 예를 들어, 한 팀이 첫 세트(0승 0패일 때)를 이길 확률은 $\dfrac{(0-0)+5}{10}=\dfrac{1}{2}$이고, 세트스코어 2승 0패일 때 다음 세트를 이길 확률은 $\dfrac{(2-0)+5}{10}=\dfrac{7}{10}$이다. 최종 승리하는 팀이 결정될 때까지 치러지는 세트 수를 확률변수 X라 할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) 확률 $P(X \geq 4)$을 구하시오.

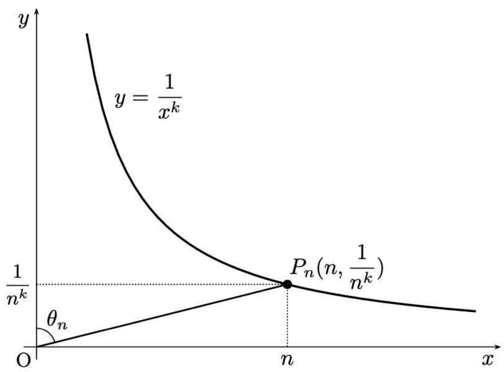
(2) 기댓값 $E(X)$를 구하시오.

문제 4 **다음 논제에 답하시오. (20점)**

<그림 2>와 같이, 유리함수 $y=\dfrac{1}{x^k}$의 그래프 위의 점 $P_n\left(n, \dfrac{1}{n^k}\right)$이 있다. (단, k, n은 자연수이다.) 원점 O와 점 P_n을 이은 선분이 y축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a n^b \tan\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\right\}=1$$

을 만족하는 a, b를 k에 대한 식으로 각각 나타내시오.



<그림 2>

[문제 1] 해설

1. 출제 의도

함수와 그 역함수의 관계를 이해하고, 이를 바탕으로 역함수의 미분법, 접선의 방정식, 여러 가지 적분법 및 정적분을 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

2. 출전 및 교과서 연관성

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (4) 함수 - 1 함수 미적분 - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 미적분 - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 미적분 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 미적분 - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용
관련 성취기준	**과목명: 수학** 성취기준 1: [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. **과목명: 미적분** 성취기준 1: [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. 성취기준 2: [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 성취기준 3: [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 성취기준 4: [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	211-
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	77- 101- 127- 151-
	미적분	김원경 외 14명	비상교육	2019	75- 96- 121- 143-

3. 예시 답안

(1) 합성함수의 미분법을 이용하면

$$h'(x) = g'(2x-1)\cdot(2x-1)' = 2g'(2x-1)$$

이므로, 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\sqrt{e}+1}{2}, e\right)$에서의 접선의 기울기는 $h'\left(\frac{\sqrt{e}+1}{2}\right) = 2g'(\sqrt{e})$이다. $e = h\left(\frac{\sqrt{e}+1}{2}\right) = g(\sqrt{e})$, 즉 $f(e) = \sqrt{e}$ 이므로 역함수의 미분법에 의하면 $g'(\sqrt{e}) = \frac{1}{f'(e)}$ 이고, 구하는 접선의 기울기는

$$h'\left(\frac{\sqrt{e}+1}{2}\right) = 2g'(\sqrt{e}) = \frac{2}{f'(e)}$$

이다. 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$$

이므로 $f'(e) = \frac{3}{2\sqrt{e}}$ 이고, $h'\left(\frac{\sqrt{e}+1}{2}\right) = \frac{2}{f'(e)} = \frac{4\sqrt{e}}{3}$ 이다. 따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\sqrt{e}+1}{2}, e\right)$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - e = \frac{4\sqrt{e}}{3}\left(x - \frac{\sqrt{e}+1}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{e}}{3}x - \frac{1}{3}(2\sqrt{e} - e)$$

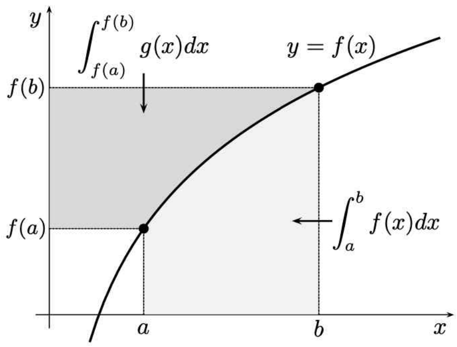
(2) 도형의 넓이 S를 구하기 위해서는 구간 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}+1}{2}\right]$에서 함수 $y=h(x)$의 부호를 확인해야 한다. 함수 $f(x) = \sqrt{x}\ln x$는 $x \geq 1$일 때만 정의된 증가함수이므로, 역함수 $g(x)$의 함숫값은 1보다 크거나 같다. 따라서 $h(x) = g(2x-1) \geq 1$이고, 넓이 S는

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{e}+1}{2}} |h(x)|\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{e}+1}{2}} h(x)\,dx$$

이다. 함수 $h(x)$의 정의와 치환적분법을 이용하면 위의 정적분은 다음과 같이 계산된다.

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{e}+1}{2}} h(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{e}+1}{2}} g(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{e}} g(x)\,dx$$

함수 $f(x)$와 역함수 $g(x)$는 $\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = bf(b) - af(a)$를 만족하므로 (아래 그림 참고)



다음 관계식이 성립한다.

$$\int_1^e f(x)dx + \int_0^{\sqrt{e}} g(x)\,dx = e\sqrt{e}$$

위 관계식과 부분적분법을 이용하여 $\int_0^{\sqrt{e}} g(x)\,dx$ 를 계산하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{e}} g(x)\,dx &= e\sqrt{e} - \int_1^e \sqrt{x}\ln x\,dx \\ &= e\sqrt{e} - \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx \\ &= e\sqrt{e} - \frac{2}{3}e\sqrt{e} + \left[\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^e \\ &= \frac{1}{9}(7e\sqrt{e}-4)\end{aligned}$$

이다. 따라서 도형의 넓이 $S = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e}} g(x)\,dx = \frac{1}{18}(7e\sqrt{e}-4)$이다.

[문제 2] 해설

1. 출제 의도

부채꼴의 넓이와 입체도형의 부피를 함수로 표현하고, 부피의 순간변화율과 삼각함수의 극한을 활용하여 도함수의 극한을 구하는 능력을 평가한다.

2. 출전 및 교과서 연관성

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>수학 I - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
수학 II - (2) 미분 - 2 도함수
미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td><table>
<tr><th colspan="2">과목명: 수학 I</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><th colspan="2">과목명: 수학 II</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><th colspan="2">과목명: 미적분</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10명	지학사	2018	69-
	수학 II	권오남 외 14명	교학사	2018	68-
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	51-
	미적분	김원경 외 14명	비상교육	2019	49-

3. 예시 답안

두 점 O, P를 잇는 직선의 기울기는

$$\frac{u\tan u - 0}{u - 0} = \tan u$$

이므로, 선분 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 u이다. 따라서 부채꼴 F의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - u$이고 반지름은

$$\overline{OP} = \sqrt{u^2 + (u\tan u)^2} = u\sqrt{1+\tan^2 u} = u\sec u$$

이다. 이로부터 부채꼴 F의 넓이 $A(u)$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A(u) = \frac{1}{2}(u\sec u)^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \frac{1}{2}u^2\frac{\frac{\pi}{2}-u}{\cos^2 u} = \frac{1}{2}u^2\frac{\frac{\pi}{2}-u}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}$$

입체도형 S의 부피 $V(u)$는 순간변화율이 0이므로 $V(1)=1$로 항상 일정하다. 따라서 입체도형 S의 높이 $h(u)$는

$$h(u) = \frac{V(u)}{A(u)} = \frac{V(1)}{A(u)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{u^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}$$

이다. 몫의 미분법에 의해 $h(u)$의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{dh}{du} &= \frac{-4\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cdot u^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cdot\left(\pi u - 3u^2\right)}{u^4\left(\frac{\pi}{2}-u\right)^2} \\ &= \frac{-4\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{u^2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-u\right)} - \frac{2(\pi-3u)}{u^3}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-u\right)^2}\end{aligned}$$

함수 곱의 극한에 대한 성질과 $\lim_{u\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-u\right)} = 1$ 을 이용하면, 구하고자 하는 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{u\to\frac{\pi}{2}-}\frac{dh}{du} = \frac{-4\cos 0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\cdot 1 - \frac{2\left(\pi - 3\,\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}\cdot 1 = -\frac{8}{\pi^2}$$

[문제 3] 해설

1. 출제 의도

문제에서 주어진 확률변수를 이해하고, 조건부확률의 개념과 확률의 곱셈정리를 활용하여 확률변수의 확률분포와 기댓값을 구하는 능력을 평가한다.

2. 출전 및 교과서 연관성

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="2">확률과 통계 - (2) 확률 - ② 조건부확률
확률과 통계 - (3) 통계 - ① 확률분포</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외 14명	비상교육	2019	53-, 73-
	확률과 통계	홍성복 외 10명	지학사	2019	62-, 82-

3. 예시 답안

(1) 확률변수 X는 3, 4, 5의 값만을 가지므로 $P(X \geq 4) = 1 - P(X=3)$이다. $P(X=3)$은 한 팀이 3세트를 연속해서 이길 확률이므로,

$$P(X=3) = 2\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{7}{10}\right) = \frac{21}{50} = 0.42$$

이다. 따라서 확률 $P(X \geq 4)$는 다음과 같다.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=3) = \frac{29}{50} = 0.58$$

(2) 기댓값 $E(X)$를 계산하기 위해서는 먼저 확률변수 X의 확률분포를 구해야 한다. $P(X=3)$은 문항 (1)에서 이미 얻었으므로 $P(X=4)$와 $P(X=5)$만 구하면 된다.

어느 한 팀이 최종 승리할 때까지 4세트를 치르는 경우는

$$(\text{패}, \text{승}, \text{승}, \text{승}), (\text{승}, \text{패}, \text{승}, \text{승}), (\text{승}, \text{승}, \text{패}, \text{승})$$

의 3가지이다. 따라서 $P(X=4)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} P(X=4) &= 2\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{10}\right) \\ &= \frac{87}{250} = 0.348 \end{aligned}$$

한편 $P(X=5)$는 여사건의 확률을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(X=5) = 1 - P(X=3) - P(X=4) = 1-\frac{21}{50}-\frac{87}{250} = \frac{29}{125} = 0.232$$

따라서 기댓값 $E(X)$는 다음과 같이 계산된다.

$$E(X) = 3\times\frac{21}{50} + 4\times\frac{87}{250} + 5\times\frac{29}{125} = \frac{953}{250} = 3.812$$

[문제 4] 해설

1. 출제 의도

함수의 그래프, 직선의 기울기와 사잇각의 관계를 이해하고, 삼각함수의 덧셈정리, 수열의 극한, 이항정리를 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

2. 출전 및 교과서 연관성

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 - (1) 수열의 극한 - [1] 수열의 극한 미적분 - (2) 미분법 - [1] 여러 가지 함수의 미분 확률과 통계 - (1) 경우의 수 - [2] 이항정리
관련 성취기준	**과목명: 미적분** 성취기준 1: [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. 성취기준 2: [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. **과목명: 확률과 통계** 성취기준 1: [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	11- 51-
	미적분	김원경 외 14명	비상교육	2019	11- 49-
	확률과 통계	홍성복 외 10명	지학사	2019	28-

3. 예시 답안

$\tan\theta_n = \dfrac{n}{\frac{1}{n^k}} = n^{k+1}$ 이므로 탄젠트함수의 덧셈정리와 이항정리에 의해 다음 식을 얻는다.

$$\tan(\theta_{n+1}-\theta_n) = \frac{\tan\theta_{n+1}-\tan\theta_n}{1+\tan\theta_{n+1}\tan\theta_n} = \frac{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}{1+\ (n+1)^{k+1}n^{k+1}}$$

$$= \frac{\left({}_{k+1}C_0 n^{k+1} + {}_{k+1}C_1 n^k + \cdots + {}_{k+1}C_{k+1}\right) - n^{k+1}}{1+(n+1)^{k+1}n^{k+1}}$$

$$= \frac{{}_{k+1}C_1 n^k + \cdots + {}_{k+1}C_{k+1}}{1+(n+1)^{k+1}n^{k+1}}$$

주어진 식에 이를 대입하면

$$an^b \tan(\theta_{n+1}-\theta_n) = \frac{a\left({}_{k+1}C_1 n^{k+b} + \cdots + {}_{k+1}C_{k+1}n^b\ \right)}{1+(n+1)^{k+1}n^{k+1}}$$

이다. 위 식의 우변에서 분자와 분모의 최고차항이 각각 $a(k+1)n^{k+b}$ 와 n^{2k+2} 이므로, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left\{an^b\tan(\theta_{n+1}-\theta_n)\right\}$ 이 0이 아닌 상수일 조건은 $a \neq 0$, $k+b = 2k+2$ 이고, 이때의 극한값은 $a(k+1) = 1$ 이다. 따라서 a, b 를 k에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$a = \frac{1}{k+1}, \quad b = k+2$$