/ 출 / 제 / 문 / 제 /

문제 1

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 x_0일 때, 시각 $t=b$에서 점 P의 위치 x는

$$x = x_0 + \int_a^b v(t)\,dt$$

[출처 : 수학 II 「정적분의 활용」]

원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A와 B는 다음 조건을 모두 만족한다.

(i) 점 A의 시각 t에서의 속도는 $6t-2$이다.
(ii) 점 B의 시각 t에서의 위치는 점 A의 시각 t^2에서의 위치와 같다.

다음 문항에 답하시오.

(1) 두 점 A와 B가 시각 $t=0$ 이후에 만나는 시각을 모두 구하시오.
(2) 두 점 A와 B가 시각 $t=0$ 이후에 마지막으로 만날 때까지 두 점 사이의 거리가 최대가 되는 시각과 그 때 두 점 사이의 거리를 구하시오.

문제 2

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

[출처 : 미적분 「여러 가지 적분법」]

$0 \le x \le 2$에서 정의된 증가함수 $f(x)$는 2보다 큰 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족한다.

(ⅰ) $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.
(ⅱ) $f(0) = 0$
(ⅲ) 닫힌구간 $[0, 1]$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(1+x) + af(1-x) = 3$ (단, $a > 2$)
(ⅳ) $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 정적분 $\int_0^{f(1)} g(x)\,dx$가 최대가 되는 실수 a의 값을 구하시오.

문제 3

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

(가) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

[출처 : 확률과 통계 「확률의 뜻과 활용」]

(나) 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0,\ \mathrm{P}(B) > 0)$$

[출처 : 확률과 통계 「조건부확률」]

흰 구슬 2개와 검은 구슬 3개가 들어 있는 주머니가 있다. A부터 시작하여 A와 B가 흰 구슬이 모두 나올 때까지 번갈아가며 구슬을 1개씩 임의로 꺼낸다. 두 번째 흰 구슬을 꺼낸 사람이 승리한다고 할 때, 다음 문항에 답하시오. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.)

(1) A가 승리할 확률을 구하시오.
(2) B가 승리했을 때, B가 꺼낸 구슬이 총 2개일 확률을 구하시오.
(3) 흰 구슬을 꺼낸 사람은 연이어 1개 더 구슬을 꺼내는 규칙을 추가했을 때, A가 승리할 확률을 구하시오.

문제 4

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

(가) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 넓이를 S라고 하면

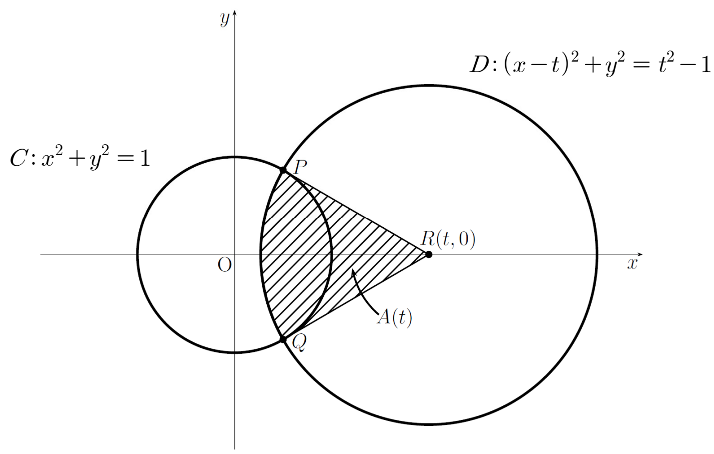
$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

[출처 : 수학Ⅰ 「삼각함수」]

(나) $\lim_{\theta \to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ (단, θ의 단위는 라디안)

[출처 : 미적분 「여러 가지 함수의 미분」]

좌표평면에 원 $C: x^2 + y^2 = 1$과 원 $D: (x-t)^2 + y^2 = t^2 - 1\ (t > 1)$이 있다. 〈그림 1〉과 같이 두 원의 교점을 P와 Q, 원 D의 중심을 R라고 할 때, 부채꼴 PRQ의 넓이를 $A(t)$라고 하자. 부채꼴 PRQ의 넓이의 변화율의 극한값 $\lim_{t \to \infty}\frac{dA}{dt}$를 구하시오.



〈그림 1〉

/ 문 / 제 / 해 / 설 /

문제 1

출제 의도

함수의 미분과 적분을 활용하여 속도와 거리의 관계, 함수의 증가와 감소와 관련된 정보를 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (1) 문자와 식 - ③ 인수분해 수학 II - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 수학 II - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용	
관련 성취기준	과목명: 수학	
	성취기준 1	[10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
	과목명: 수학II	
	성취기준 1	[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준 2	[12수학II03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	29-
	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	34-
	수학 II	권오남 외 14명	교학사	2018	103- 149-
	수학 II	홍성복 외 10명	지학사	2018	74- 140-

문항 해설

제시된 점 A와 B의 속도로부터 위치를 계산하고, 두 점 사이의 거리의 도함수를 명확하게 계산하여 극점을 구하고 이로부터 거리가 최대가 되는 시각을 올바르게 찾는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	주어진 조건으로부터 A와 B의 위치를 올바른 함수로 표현하고 이로부터 위치가 같은 시각을 정확하게 계산할 수 있다.	12
(2)	주어진 조건으로부터 A와 B 사이의 거리를 올바른 함수로 표현하고 이 함수의 최대 · 최소를 정확하게 계산할 수 있다.	18

예시 답안

(1) 점 A의 시각 t에서의 위치를 $A(t)$, 점 B의 시각 t에서의 위치를 $B(t)$라고 하면

$$A(t)=\int_0^t (6x-2)dx = 3t^2-2t,\ \ B(t)=A(t^2)=3t^4-2t^2$$

이다. 이 때 $d(t)=B(t)-A(t)$로 놓으면

$$d(t)=B(t)-A(t)=3t^4-2t^2-(3t^2-2t)=3t^4-5t^2+2t=t(t-1)(3t^2+3t-2)$$

이고, 점 A와 점 B가 $t=0$ 이후 다시 만나는 시각은 방정식 $d(t)=0$의 양수 해이다.

이 양수 해는 $t=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}$, $t=1$이다.

(2) $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}<1$이므로 두 점은 $t=1$에서 마지막으로 만난다.

$0<t<1$의 범위에서 두 점 사이의 거리 $|d(t)|$가 최대가 되기 위해서는 $d(t)$가 최대 또는 최소여야 한다.

함수 $d(t)$의 도함수는

$$d'(t)=12t^3-10t+2=2(t+1)(6t^2-6t+1)$$

이므로 $d(t)$는 $t_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$과 $t_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$에서 극값을 갖고 $0<t_1<t_2<1$이다.

t_1과 t_2가 $6t^2-6t+1=0$의 해이므로 $t_i^2=t_i-\dfrac{1}{6}$, $t_i^2-t_i=-\dfrac{1}{6}$ (단, $i=1,2$)을 이용하여 $d(t_1)$과 $d(t_2)$를 구하면 다음과 같다.

$$d(t_1)=(t_1^2-t_1)(3t_1^2+3t_1-2)=-\frac{1}{6}\left(6t_1-\frac{5}{2}\right)=-t_1+\frac{5}{12}=\frac{-1+2\sqrt{3}}{12}$$

$$d(t_2)=-\frac{1}{6}\left(6t_2-\frac{5}{2}\right)=-t_2+\frac{5}{12}=\frac{-1-2\sqrt{3}}{12}$$

$|d(t_2)|>|d(t_1)|$이므로 $0<t<1$에서 두 점 사이의 거리는 시각 $t_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$에서 최대가 되고

이 때의 거리는 $|d(t_2)|=\dfrac{1+2\sqrt{3}}{12}$이다.

문제 2

출제 의도

역함수의 성질 및 도함수와 정적분의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 함수의 최댓값을 구하는 능력을 평가하는 문제이다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (4) 함수 - 1 함수 수학Ⅱ - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 미적분 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
관련 성취기준	**과목명: 수학** 성취기준 1 [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. **과목명: 수학Ⅱ** 성취기준 1 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **과목명: 미적분** 성취기준 1 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	223-
	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	227-
	수학 Ⅱ	권오남 외 14명	교학사	2018	88-
	수학 Ⅱ	홍성복 외 10명	지학사	2018	83-
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	134-
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	143-

문항 해설

제시된 조건으로부터 주어진 함수의 정적분을 a에 대한 함수로 올바르게 표현하고 이 함수가 최대가 되는 a의 값을 도함수의 성질을 이용하여 정확하게 계산하는 문제이다.

채점 기준

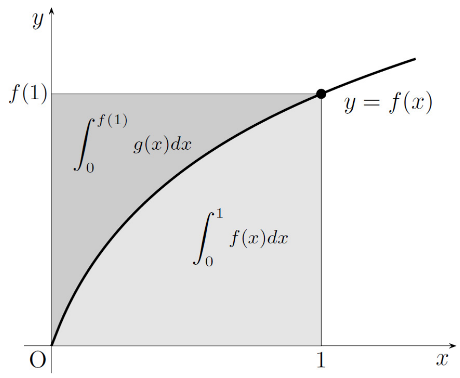
하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건으로부터 문제가 원하는 정적분을 올바른 함수로 표현하고 이로부터 최대 · 최소를 정확하게 계산할 수 있다.	20

예시 답안

조건 (ii)에 의해 $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$와 역함수 $g(x)$는 관계식

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^{f(1)} g(x)dx = 1 \times f(1)$$

을 만족한다.



조건 (iii)에 $x=0$을 대입하면 $f(1)+af(1)=(a+1)f(1)=3$이므로 $f(1)=\dfrac{3}{a+1}$이다.

조건 (iii), (iv)와 치환적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} 3 = INT_0^1 3dx &= INT_0^1(f(1+x)+af(1-x))dx \\ &= \int_1^2 f(x)dx + a\int_0^1 f(x)dx \\ &= 2 - \int_0^1 f(x)dx + a\int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

이므로 $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{a-1}$이다.

따라서 정적분 $\int_0^{f(1)} g(x)dx$는 실수 a에 대한 함수 $h(a)$로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h(a) = \int_0^{f(1)} g(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{a+1} - \frac{1}{a-1} = \frac{2a-4}{a^2-1} \quad (\text{단, } a>2)$$

도함수 $h'(a) = \dfrac{2(a^2-1)-2a(2a-4)}{(a^2-1)^2} = \dfrac{-2a^2+8a-2}{(a^2-1)^2}$는 $a=2\pm\sqrt{3}$에서 0이므로 $h(a)$의 증가와 감소를 다음과 같은 표로 나타낼 수 있다.

a	2	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$h'(a)$		+	0	-
$h(a)$		↗	$2-\sqrt{3}$	↘

그러므로 함수 $h(a)$는 구간 $(2,\infty)$에서 $a=2+\sqrt{3}$일 때 최댓값 $2-\sqrt{3}$을 갖는다.

문제 3

출제 의도

문제에서 주어진 상황을 이해하고, 조건부확률의 개념과 확률의 덧셈정리 및 곱셈정리를 활용하여 확률을 계산하는 능력을 평가한다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="2">확률과 통계 – (2) 확률 – [2] 조건부확률
확률과 통계 – (3) 통계 – [1] 확률분포</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

<table>
<tr><th>참고자료</th><th>도서명</th><th>저자</th><th>발행처</th><th>발행년도</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td rowspan="2">고등학교
교과서</td><td>확률과 통계</td><td>김원경 외 14명</td><td>비상교육</td><td>2019</td><td>53-
73-</td></tr>
<tr><td>확률과 통계</td><td>홍성복 외 10명</td><td>지학사</td><td>2019</td><td>62-
82-</td></tr>
</table>

문항 해설

주어진 조건을 이해하여 승리하는 모든 경우를 분류하고, 곱셈정리를 이용하여 각 경우의 확률을 계산한 후 덧셈정리로부터 각 경우의 확률을 더하여 승리할 확률을 계산하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	A가 승리하기 위한 경우를 명확하게 제시하고 각 경우에 대한 확률을 곱셈정리를 이용하여 올바르게 계산한다.	9
(2)	B가 승리하기 위한 경우를 명확하게 제시하고 각 경우에 대한 확률을 정확하게 계산하여 주어진 조건부확률을 올바르게 계산한다.	9
(3)	추가조건을 정확하게 이해하여 A가 승리하기 위한 경우를 명확하게 제시하고 각 경우에 대한 확률을 곱셈정리를 이용하여 올바르게 계산한다.	12

예시 답안

(1) A가 승리하기 위해서는 3번째 또는 5번째 뽑은 구슬이 두 번째 흰 구슬이어야 한다. 각각의 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

(i)

●○ ○●	○

(ii)

●●●○ ●●○● ●○●● ○●●●	○

(i)의 확률은 $2\times\dfrac{3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3}=\dfrac{1}{5}=0.2$이고, (ii)의 확률은 $4\times\dfrac{3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{2}{5}=0.4$이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{5}=0.6$이다.

(2) (1)에 의해 B가 승리할 확률은 $\dfrac{2}{5}$이다. 이때 B가 꺼낸 구슬의 총 개수는 1개 또는 2개이다. 1개만 꺼내고 승리할 확률이 $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$이므로 2개를 꺼내고 승리할 확률은 $\dfrac{4}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{10}$이다. 따라서 B가 승리했을 때, B가 꺼낸 구슬의 총 개수가 2개일 확률은 $\dfrac{3/10}{4/10}=\dfrac{3}{4}=0.75$이다.

(3) A가 승리하는 경우를 A가 첫 번째 꺼낸 구슬을 기준으로 나누어 보면 다음과 같다.

(i) 첫 번째 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 경우:

A	A		A	A	B	A
○	○		○	●	●	○

이 때 확률은 $\left(\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{5}=0.2$이다.

(ii) 첫 번째 꺼낸 구슬이 검은 구슬인 경우:

A	B	A	A		A	B	B	A
●	●	○	○		●	○	●	○

이 때 확률은 $\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{4}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{4}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{5}=0.2$이다.

따라서 A가 승리할 확률은 $\dfrac{2}{5}=0.4$이다.

문제 4

출제 의도

호도법을 올바르게 이해하고 도형의 넓이 및 합성함수의 도함수를 이용하여 극한을 올바르게 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학Ⅰ - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 수학Ⅱ - (2) 미분 - ② 도함수 미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법
관련 성취기준	**과목명: 수학Ⅰ** 성취기준 1 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. **과목명: 수학Ⅱ** 성취기준 1 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **과목명: 미적분** 성취기준 1 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. 성취기준 2 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. 성취기준 3 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10명	지학사	2018	69-
	수학 II	권오남 외 14명	교학사	2018	68-
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	51-
	미적분	김원경 외 14명	비상교육	2019	49-

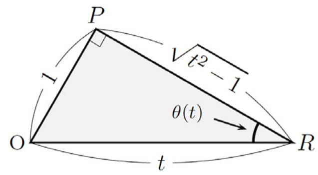
문항 해설

주어진 조건으로부터 부채꼴의 넓이를 호도법을 이용하여 올바르게 계산하고 넓이의 도함수를 합성함수의 미분 및 삼각함수의 성질을 이용하여 알맞게 도출한 뒤 그 극한을 정확하게 계산하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건으로부터 부채꼴의 넓이를 올바른 함수로 표현하고 합성함수의 미분법을 이용하여 그 도함수를 구한 뒤, 극한을 정확하게 계산할 수 있다.	20

예시 답안



$\angle PRO$의 크기를 $\theta(t)$라고 하자. 삼각형 PRO는 피타고라스의 정리에 의해 $\angle OPR = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로, 삼각형의 변의 길이와 삼각비의 정의에 의해 다음 관계가 성립한다.

$$\sin\theta(t) = \frac{1}{t}, \quad \cos\theta(t) = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \qquad \cdots\cdots\cdots① $$

부채꼴 PRQ의 넓이 $A(t)$는

$$A(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{t^2-1})^2 \cdot 2\theta(t) = (t^2-1)\cdot\theta(t)$$

이므로 넓이의 t에 대한 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{dA}{dt} = 2t\cdot\theta(t) + (t^2-1)\cdot\frac{d\theta}{dt} \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

또한 부등식 $\sin\theta < \theta < \tan\theta \ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$와 ①로부터

$$\frac{1}{t} < \theta(t) < \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

이고 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = 0$이므로 함수의 극한의 성질에 의해 $t\to\infty$이면 $\theta\to 0$이다.

먼저 ②의 우변 첫째 항의 극한값은 ①에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{t\to\infty} 2t\cdot\theta(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{\sin\theta(t)}\cdot\theta(t)\right) = 2\cdot\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right) = 2 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

$\frac{d\theta}{dt}$를 구하기 위해 ①의 첫 번째 식의 양변을 미분하고 두 번째 식을 대입하면 다음과 같다.

$$-\frac{1}{t^2} = \frac{d}{dt}\sin\theta(t) = \cos\theta(t)\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

이로부터

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$$

을 얻는다. 따라서 ②의 우변 둘째 항의 극한값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{t\to\infty}(t^2-1)\cdot\frac{d\theta}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left(-(t^2-1)\cdot\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right) = -1 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

위에서 계산한 ③과 ④로부터 넓이 $A(t)$의 변화율의 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dA}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left(2t\cdot\theta(t) + (t^2-1)\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) = 2 - 1 = 1$$