❖ 출제문제 ❖

문제 1-A **다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.**(25점)

> 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은
>
> $$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B\,|A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A\,|\,B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0,\ \mathrm{P}(B) > 0)$$
>
> [출처 : 확률과 통계「조건부확률」]

흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니와 비어 있는 상자가 있다. 주머니에서 2개의 공을 임의로 꺼내어 상자에 넣고 흰 공의 개수를 확인한다. 그리고 흰 공이 나온 개수만큼 다시 공을 주머니에서 임의로 꺼내어 상자에 넣는다. 주머니에서 상자로 옮겨진 흰 공의 전체 개수를 확률변수 X라 할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) $P(X=2)$를 구하시오.
(2) 평균 $E(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하시오.

문제 1-B **다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.**(25점)

> 중심이 C(a,b,c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은
>
> $$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$
>
> [출처 : 기하와 벡터「공간좌표」]

네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 사면체와 그 내부를 입체도형 T라 할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) 입체도형 T에 포함되는 가장 큰 구 S_1의 반지름의 길이 r_1을 구하시오.
(2) 입체도형 T의 한 면 위의 점 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right)$을 지나면서 입체도형 T에 포함되는 가장 큰 구 S_2의 반지름의 길이 r_2를 구하시오.

문제 2-A **다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.**(25점)

(가) 함수 $h(t)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x h(t)\,dt = h(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

[출처 : 미적분I 「정적분」]

(나) 미분가능한 두 함수 $h(x)$, $k(x)$에 대하여 $h'(x)$, $k'(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b h(x)\,k'(x)\,dx = \Big[h(x)\,k(x)\Big]_a^b - \int_a^b h'(x)\,k(x)\,dx$$

[출처 : 미적분II 「여러 가지 적분법」]

함수 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$에 대하여 다음 문항에 답하시오.

(1) 부분적분법을 이용하여 정적분 $A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$를 α와 $f(\alpha)$의 식으로 나타내시오.

(2) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 정적분 $B(\alpha)=\int_0^{f(\alpha)} g(x)\,dx$를 α의 식으로 나타내시오.

(3) 극한값 $\lim_{\alpha\to 0}\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$를 구하시오.

문제 2-B **다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.**(25점)

미분가능한 두 함수 $y=h(u)$, $u=k(x)$에 대하여 합성함수 $y=h(k(x))$는 미분가능하고, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{h(k(x))\}'=h'(k(x))\,k'(x)$$

[출처 : 미적분II 「여러 가지 미분법」]

함수 $f(x)$는 미분가능한 증가함수이고, $f(0)=0$, $f(1)=2$, $\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=3$이다.

미분가능한 함수 $g(x)$는 음이 아닌 실수 $\alpha\,(\alpha\ge 0)$에 대하여 조건 (i), (ii)를 만족한다.

(i) $x>0$일 때, $g'(x)=2\alpha f(x)\,f'(x)$

(ii) $x\le 0$일 때, $g(x)=-\{f(-x)\}^2+(5-\alpha^3)$

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 닫힌 구간 $[-1,1]$에서 부등식 $g(x)\ge 0$이 성립하도록 하는 음이 아닌 실수 α의 값의 범위를 구하시오.

(2) 문항 (1)에서 구한 α의 값의 범위에서, 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 최대로 하는 α의 값을 구하시오.

❖ 문제해설 ❖

문제 1-A

1. 출제의도

문제에서 주어진 확률변수를 이해하고, 조건부 확률의 개념과 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률변수의 확률분포, 평균 및 분산을 구하는 능력을 평가하는 데 그 목적이 있다.

2. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	3. 확률과 통계-(나) 확률 – ② 조건부확률 ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 3. 확률과 통계-(다) 통계 – ① 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
관련 성취기준	(아래 표)

	과목명 : 확률과 통계	관련
성취 기준1	확통1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고 이를 활용할 수 있다.	
성취 기준2	확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.	
성취 기준3	확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다. 확통1312-2. 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외 24명	동아출판	2019	123, 145, 153, 155
	확률과 통계	이준열 외 9명	천재교육	2019	112, 138, 141, 143
	확률과 통계	이강섭 외 14명	미래엔	2018	76, 94, 101
기타					

3. 문항 해설

이 문제에서는 주머니에서 두 번의 시행을 통해 임의로 공을 꺼내어 얻은 특정 색깔의 공의 개수와 관련된 확률분포, 평균 및 분산을 구한다. 두 번째 시행에서 꺼내는 공의 개수가 미리 정해져 있지 않고, 첫 번째 시행에서 꺼낸 흰 공의 개수에 따라 달라지기 때문에 조건부확률의 개념과 확률의 곱셈법칙을 이용해야 한다.

4. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-A (1)	확률의 곱셈정리와 조건부확률을 이용하여 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{5}$를 구할 수 있다.	10
1-A (2)	X의 확률분포표를 구하여, 평균 $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{5}$ 및 분산 $\mathrm{V}(X)=\frac{21}{25}$를 구할 수 있다.	15

5. 예시 답안

(1) 처음 꺼낸 흰 공의 개수를 a, 추가로 꺼낸 흰 공의 개수를 b라 할 때, 주머니에서 상자로 옮겨진 흰 공의 전체 개수 X는 $a+b$이다. 이때, 추가로 꺼낸 흰 공의 개수는 처음 꺼낸 흰 공의 개수보다 많을 수 없으므로 $b\le a$이다. 따라서 $a+b=2$이고 $b\le a$인 (a,b)는 $(1,1)$과 $(2,0)$ 두 가지 뿐이다.

$(a,b)=(1,1)$인 경우: $a=1$인 사건을 A, $b=1$인 사건을 B라 할 때

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\frac{3}{10}$$

이다.

$(a,b)=(2,0)$인 경우: $a=2$인 사건을 A, $b=0$인 사건을 B라 할 때

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{10}$$

이다. 따라서 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$이다.

(2) 가능한 (a,b)의 조합의 경우와 그 확률을 각각 구하면 다음과 같다.

a : 처음 꺼낸 흰 공의 개수	b : 추가로 꺼낸 흰 공의 개수	확률
0	0	$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$
1	0	$\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\frac{3}{10}$
	1	$\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\frac{3}{10}$
2	0	$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{10}$
	1	$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{10}$

$X=a+b$이므로 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 X의 평균은

$$E(X)=1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{7}{5}$$

이고, X^2의 평균은

$$E(X^2)=1\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}+9\cdot\frac{1}{10}=\frac{14}{5}$$

이므로, 구하는 X의 분산은 다음과 같다.

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{14}{5}-\frac{49}{25}=\frac{21}{25}$$

문제 1-B

1. 출제의도

구와 평면의 방정식을 이해하고 이들의 관계를 이용하여 사면체와 그 내부에 포함되는 가장 큰 구를 찾는 능력을 평가하는 문제이다.

2. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	6. 기하와 벡터- (다) 공간도형과 공간벡터 – ③ 공간벡터 ④ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. ⑤ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.
관련 성취기준	(아래 표)

	과목명 : 기하와 벡터	관련
성취 기준1	기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.	
성취 기준2	기벡1334. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외 11명	비상교육	2017	158
	기하와 벡터	이준열 외 9명	천재교육	2019	210
	기하와 벡터	황선욱 외 10명	좋은책신사고	2018	132
기타					

3. 문항 해설

사면체에 포함되는 가장 큰 구를 찾고, 사면체의 한 면 위의 특정한 점을 지나면서 사면체에 포함되는 가장 큰 구를 찾는 문제이다.

4. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-B (1)	입체도형 T에 포함되는 가장 큰 구 S_1의 반지름의 길이 $r_1=\frac{1}{3}$을 구할 수 있다.	10
1-B (2)	입체도형 T의 한 면 위의 점 A를 지나면서 입체도형 T에 포함되는 가장 큰 구 S_2의 반지름의 길이 $r_2=\frac{7}{30}$를 구할 수 있다.	15

5. 예시 답안

(1) 세 점 P, Q, R를 지나는 평면을 평면 α라 할 때, 입체도형 T의 네 면은 각각 xy평면, yx평면, zx평면 및 평면 α에 포함되어 있다. 그러므로 입체도형 T에 포함되는 가장 큰 구 S_1은 xy평면, yx평면, zx평면 및 평면 α에 모두 접하고, 중심이 입체도형 T 내부에 있는 구이다.

구 S_1의 반지름의 길이를 r_1, 중심을 (a,b,c)라 하자. S_1은 xy평면, yx평면, zx평면에 모두 접하고 중심이 입체도형 T 내부에 있으므로

$$r_1 = a = b = c$$

이다. 또한 S_1은 평면 α와 접한다. 평면 α의 방정식은

$$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1 \text{ 또는 } 6x+3y+2z=6$$

$$r_1=\frac{|6a+3b+2c-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{|11r_1-6|}{7} \text{ 이고}$$

$$7r_1=-(11r_1-6) \text{ 또는 } 7r_1=11r_1-6 \text{ 이다.}$$

그러므로 $r_1=\frac{1}{3}$ 또는 $r_1=\frac{3}{2}$이다.

평면 α와 직선 $x=y=z$의 교점은 $B\left(\frac{6}{11},\frac{6}{11},\frac{6}{11}\right)$이다. 구 S_1의 중심 (r_1,r_1,r_1)이 입체도형 T 내부에 있으려면, 선분 OB 위에 있어야 한다. $r_1=\frac{1}{3}$이면 중심 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$이 선분 OB 위에 있고, $r_1=\frac{3}{2}$인 경우에는 중심 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$이 선분 OB 위에 있지 않으므로 $r_1=\frac{1}{3}$이다.

(2) 점 $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$은 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수이고, 평면 α의 방정식 $6x+3y+2z=6$을 만족하므로 삼각형 PQR에 놓여 있다. 구 S_2는 점 A에서 평면 α에 접해야하므로, S_2의 중심 $C(a,b,c)$는 점 A를 지나고 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(6,3,2)$에 평행인 직선 위에 놓인다. 그러므로

$$C(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)-t(6,3,2)=\left(\frac{1}{2}-6t,\frac{1}{3}-3t,1-2t\right) \quad (\text{단, } t \geq 0\text{인 상수})$$

로 표현된다. 이때 구 S_2의 반지름의 길이는

$$r_2=\overline{AC}=\sqrt{(-6t)^2+(-3t)^2+(-2t)^2}=7t \text{ 이다.}$$

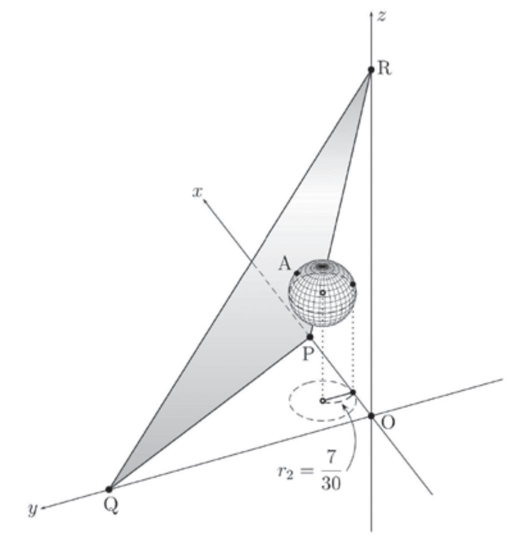
삼각형 PQR를 제외한 입체도형 T의 세 면은 각각 xy평면, yx평면, zx평면에 포함되어 있으므로, 입체도형 T에 포함되는 가장 큰 구 S_2는 xy평면, yx평면, zx평면중 적어도 하나의 평면과 접해야 한다. 중심 $C(a,b,c)$과 xy평면, yx평면, zx평면 사이의 거리를 각각 d_1, d_2, d_3라 하면, 반지름의 길이가 d_1, d_2, d_3 중 하나와 같아야 한다. 이를 t에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$r_2=d_2 : 7t=\frac{1}{2}-6t, \quad \text{즉 } t=\frac{1}{26}$$

$$r_2=d_3 : 7t=\frac{1}{3}-3t, \quad \text{즉 } t=\frac{1}{30}$$

$$r_2=d_1 : 7t=1-2t, \quad \text{즉 } t=\frac{1}{9}$$

위의 세 가지 경우 중에서 반지름이 가장 작은 경우에 구 S_2가 입체도형 T에 포함되므로, $t=\frac{1}{30}$이고 S_2의 반지름의 길이는 $r_2=7t=\frac{7}{30}$이다(〈그림 1〉 참고).



〈그림 1〉

문제 2-A

1. 출제의도

부분적분법과 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하는 능력, 주어진 함수와 그 역함수의 관계를 이해하는 능력, 그리고 두 함수의 비의 극한을 구하는 능력을 평가하는 문제이다.

2. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>4. 미적분 Ⅰ – (라) 다항함수의 적분법 – 2 정적분
② 정적분의 뜻을 안다.
③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
5. 미적분 Ⅱ – (가) 지수함수와 로그함수 – 1 지수함수와 로그함수의 미분
② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
5. 미적분 Ⅱ – (라) 적분법 – 1 여러 가지 적분법
② 부분적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td><table>
<tr><th colspan="2">과목명 : 미적분학 Ⅰ</th><th>관련</th></tr>
<tr><td>성취 기준1</td><td>미적1422. 정적분의 뜻을 안다.</td><td></td></tr>
<tr><td>성취 기준2</td><td>미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">과목명 : 미적분학 Ⅱ</th><th>관련</th></tr>
<tr><td>성취 기준1</td><td>미적2122. 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>성취 기준2</td><td>미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분Ⅰ	황선욱 외 10명	좋은책신사고	2018	160
	미적분Ⅰ	우정호 외 24명	동아출판	2018	201
	미적분Ⅱ	황선욱 외 10명	좋은책신사고	2018	152
	미적분Ⅱ	이강섭 외 14명	미래엔	2019	169
기타					

3. 문항 해설

정적분에 의해 정의되는 함수 f의 정적분을 미분과 적분의 관계, 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 구하고, f와 그 역함수 의 관계를 이용하여 f의 역함수의 정적분을 구한 뒤, 두 정적분의 비의 극한값을 구하는 문제이다.

4. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-A (1)	미분과 적분의 관계, 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 정적분 $A(\alpha)$를 α와 $f(\alpha)$의 식으로 나타낼 수 있다.	10
2-A (2)	함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$에 대한 정적분 $B(\alpha)$를 α의 식으로 나타낼 수 있다.	5
2-A (3)	극한값 $\lim_{\alpha\to 0}\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$ 를 구할 수 있다.	10

5. 예시 답안

(1) 제시문에 주어진 식을 이용하면

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_0^{\alpha}-\int_0^{\alpha} xf'(x)dx=\alpha f(\alpha)-\int_0^{\alpha} xe^{-x^2}dx$$

을 얻는다. $t=x^2$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$가 된다. $x=0$일 때 $t=0$, $x=\alpha$일 때 $t=\alpha^2$이므로

$$\int_0^{\alpha} xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{\alpha^2}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha^2}\right)$$

이다. 따라서 구하는 정적분은

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\alpha f(\alpha)-\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha^2}\right)$$

이다.

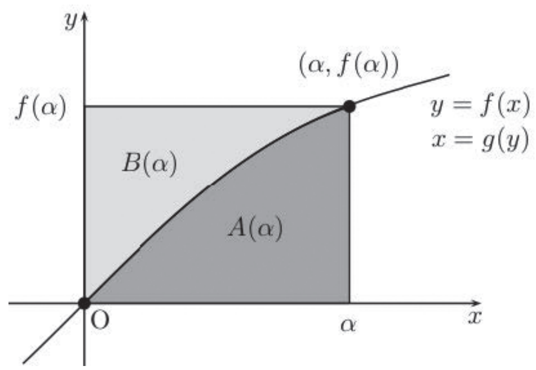
(2) 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 관계식

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{f(0)}^{f(\alpha)} g(x)\,dx=\alpha f(\alpha)$$

이 성립하고 이므로, $f(0)=0$이므로,

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \alpha f(\alpha)-\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \\ &= \alpha f(\alpha)-\left[\alpha f(\alpha)-\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha^2}\right) \end{aligned}$$

이다(〈그림 2〉 참고).



〈그림 2〉

(3) 문항 (1)과 문항 (2)의 결과를 이용하여 주어진 극한을 계산하면 다음과 같다.

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha f(\alpha)-\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha^2}\right)}=\lim_{\alpha\to0}\left(\frac{2\alpha f(\alpha)}{1-e^{-\alpha^2}}-1\right)$$

$$=2\lim_{\alpha\to0}\left(\frac{\frac{f(\alpha)}{\alpha}}{\frac{1-e^{-\alpha^2}}{\alpha^2}}\right)-1$$

위의 식에서 분자의 극한을 구하면

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to0}\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=f'(0)=e^{-0^2}=1$$

이다. 분모의 극한을 구하기 위해 $u(x)=e^{-x}$로 놓으면

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{1-e^{-\alpha^2}}{\alpha^2}=\lim_{\beta\to0}\frac{1-e^{-\beta}}{\beta}=-\lim_{\beta\to0}\frac{u(\beta)-u(0)}{\beta-0}=-u'(0)=1$$

이다. 따라서 $\lim_{\alpha\to0}\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}=1$이다.

문제 2-B

1. 출제의도

합성함수의 미분법, 미분가능성과 연속성의 관계를 이용하여 주어진 함수를 파악하는 능력과 여러 가지 적분법을 활용하여 정적분을 구하고, 도함수를 계산하여 주어진 함수의 증가와 감소 및 극대와 극소를 판정하는 능력을 평가한다.

2. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>4. 미적분 I – (라) 다항함수의 적분법 – ③ 정적분의 활용
① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
4. 미적분 I – (다) 다항함수의 미분법 – ③ 도함수의 활용
③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
5. 미적분 II – (다) 미분법 – ① 여러 가지 미분법
② 합성함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td><table>
<tr><td colspan="2">과목명 : 미적분학 I</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취
기준1</td><td>미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>성취
기준2</td><td>미적1333. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">과목명 : 미적분학 II</td><td>관련</td></tr>
<tr><td>성취
기준1</td><td>미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	이준열 외 9명	천재교육	2017	202
	미적분I	우정호 외 24명	동아출판	2018	142
	미적분II	황선욱 외 10명	좋은책신사고	2017	101
기타					

3. 문항 해설

두 구간에서 따로 주어진 조건을 만족하는 함수를 합성함수의 미분법과 함수의 연속성을 이용하여 찾은 후, 이 함수의 최솟값을 구하고, 정적분으로 표현된 도형의 넓이가 최대가 되는 경우를 결정하는 문제이다.

4. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2–B (1)	합성함수의 미분법과 함수의 연속성을 이용하여 $g(x)$를 찾고, 문제의 조건을 만족하는 음이 아닌 실수 α의 값의 범위를 구할 수 있다.	15
2–B (2)	미분법을 활용하여, 도형의 넓이를 최대로 하는 α의 값을 구할 수 있다.	10

5. 예시 답안

(1) 제시문의 내용을 이용하면, 조건 (i)에 의하여 $x>0$일 때

$$g'(x)=2\alpha f(x)f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\alpha\{f(x)\}^2\right]$$

이므로

$$g(x)=\alpha\{f(x)\}^2+C \qquad (x>0)$$

가 성립한다. 한편 미분가능한 함수는 연속이므로, 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 x=0에서의 연속성과 조건 (ii)를 이용하면

$$5-\alpha^3=g(0)=\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\alpha\{f(x)\}^2+C=\alpha\{f(0)\}^2+C=C$$

를 얻는다. 따라서

$$g(x)=\begin{cases}\alpha\left\{f(x)\right\}^2+(5-\alpha^3) & (x>0)\\ -\left\{f(-x)\right\}^2+(5-\alpha^3) & (x\le 0)\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

이다.

여기서 $\alpha\ge0$이고 $f(x)$가 증가함수이므로, 구간 [0,1]에서 $\alpha\{f(x)\}^2$와 $g(x)$는 모두 증가함수이거나 상수함수이다. 구간 [−1,0]에서는 $\{f(-x)\}^2$가 감소함수이므로 $-\{f(-x)\}^2$와 $g(x)$가 모두 증가함수이다. 그러므로 구간 [−1,1]에서 함수 $g(x)$는 x=−1일 때 최소가 되고

$$g(x)\ge g(-1)=-\left\{f(1)\right\}^2+5-\alpha^3=1-\alpha^3 \quad (-1\le x\le 1)$$

이다. 따라서 구간 [−1,1]에서 부등식 $g(x)\ge0$가 성립하는 α의 값의 범위는 $0\le\alpha\le1$이다.

(2) 식 ①과 치환적분법을 이용하면, 구하는 도형의 넓이 $S(\alpha)$는 다음과 같다.

$$S(\alpha)=\int_{-1}^{1}|g(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}\left(-\{f(-x)\}^2+(5-\alpha^3)\right)dx+\int_0^1\left(\alpha\{f(x)\}^2+(5-\alpha^3)\right)dx$$

$$=(\alpha-1)\int_0^1\left\{f(x)\right\}^2dx+10-2\alpha^3=-2\alpha^3+3\alpha+7$$

$S(\alpha)$의 도함수 $S'(\alpha)=-6\alpha^2+3$을 이용하여 함수 $S(\alpha)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

α	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$S'(\alpha)$	3	+	0	-	-3
$S(\alpha)$	7	↗	$7+\sqrt{2}$	↘	8

따라서 $0\le\alpha\le1$에 대하여 $S(\alpha)$는 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 최댓값을 갖는다.