세종대학교 2024학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제 1]

(1-1) (가) 조건에 의해 $a_5 = 4$이며, (나) 조건을 생각하면 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $a_4 \le 80$인 경우:

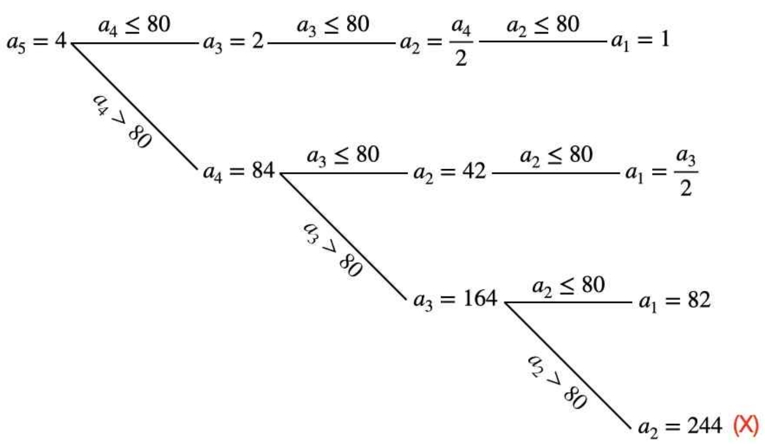
$a_5 = 2a_3$에서 $a_3 = 2 \le 80$이므로 $a_4 = 2a_2$이고, $a_2 = \dfrac{a_4}{2} \le \dfrac{80}{2} \le 40$이다.

(ii) $a_4 > 80$인 경우:

$a_5 = a_4 - 80$에서 $a_4 = 84$이다. 만일 $a_3 \le 80$이면 $a_4 = 2a_2$에서 $a_2 = 42$이다.
반대로 $a_3 > 80$이면 $a_4 = a_3 - 80$에서 $a_3 = a_4 + 80 = 164$이다. 만일 $a_2 > 80$이면 $a_3 = a_2 - 80$에서 $a_2 = a_3 + 80 = 244$인데 이는 (가) 조건 $a_2 < 200$을 만족시키지 않는다. 따라서 $a_2 \le 80$이다.

이 경우 a_2는 80 이하의 모든 자연수를 값으로 가질 수 있고, $a_1 = \dfrac{a_3}{2} = 82$이다. 실제로 $a_1 = 82$, $a_2 = 80$, $a_3 = 164$, $a_4 = 84$, $a_5 = 4$이면 문제의 주어진 조건을 모두 만족시키는 것을 확인할 수 있다. 따라서 a_2의 최댓값은 80이다.

참고: (1-1)의 상황을 그림으로 정리하면 다음과 같다.



(다른 풀이) $80 < a_2 \le 160$인 경우와 $a_2 > 160$인 경우를 각각 생각해보자.

(i) $80 < a_2 \le 160$인 경우:

이 경우 $a_3 = a_2 - 80 \le 80$이므로 $a_4 = 2a_2 > 160$이다. 따라서 $a_5 = a_4 - 80$인데, (가) 조건에서 $a_5 = 4$이므로 $a_4 = 84$이고, 이는 $a_4 > 160$임에 모순이다. 즉, 이 경우는 가능하지 않다.

(ii) $a_2 > 160$인 경우:

이 경우 $a_3 = a_2 - 80 > 80$이므로 $a_4 = a_3 - 80 = a_2 - 160$이다. $a_5 = 4$이기 위해서는 $a_4 \le 80$일 때 $a_3 = \dfrac{a_5}{2} = 2$이거나, $a_4 > 80$일 때 $a_5 = a_4 - 80 = a_2 - 240$이다. 전자의 경우 $a_2 = 82$이므로 $a_2 > 160$임에 모순이고, 후자의 경우 $a_2 = 244$로 (가) 조건에서 $a_2 < 200$임에 모순이다. 그러므로 이 경우도 가능하지 않다.

따라서 문제의 수열은 $a_2 \le 80$을 만족하여야 한다. 한편 예를 들어 $a_1 = 82$, $a_2 = 80$, $a_3 = 164$, $a_4 = 84$, $a_5 = 4$이면 주어진 조건을 모두 만족하므로, a_2의 최댓값은 80이다.

(1-2) (1-1)에서 $a_2 \le 80$이므로 $a_3 = 2a_1$이 성립한다. 따라서 $a_1 = \dfrac{a_3}{2}$이다. (1-1)의 풀이 과정에서

a_3이 가질 수 있는 값은 80 이하의 짝수 또는 164이다. 이를 종합하면 다음과 같은 표를 만들 수 있고, 이때 a_1, a_2, $\cdots$, a_5가 문제의 조건을 모두 만족시킴을 확인할 수 있다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$1, 2, \cdots, 40$</td><td>2</td><td>$2, 4, \cdots, 80$</td><td rowspan="3">4</td></tr>
<tr><td>$1, 2, \cdots, 40$</td><td>42</td><td>$2, 4, \cdots, 80$</td><td rowspan="2">84</td></tr>
<tr><td>82</td><td>$1, 2, \cdots, 80$</td><td>164</td></tr>
</table>

즉, a_1의 값은 40 이하의 자연수 또는 82가 될 수 있으므로, a_1이 가질 수 있는 서로 다른 모든 수의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{40} k + 82 = \frac{40 \cdot 41}{2} + 82 = 820 + 82 = 902$$

(1-3) $a_5 = 4$는 80보다 작으므로 $a_6 = 2a_4$를 만족시킨다.

(i) $a_4 \le 40$인 경우:

$a_6 \le 80$이므로 $a_7 = 2a_5 = 8$이다. 따라서 $a_8 = 2a_6 = 4a_4$인데, (1-2)의 풀이에서 a_4가 짝수이므로 a_8은 8의 배수이다. 만일 $a_4 \le 20$이면 $a_8 \le 80$이 되어 $a_9 = 2a_7 = 16$이다. 한편 $20 < a_4 \le 40$이면 $a_8 > 80$이고, (1-3)에서 주어진 조건 $a_8 \le 90$을 생각하면 $a_8 = 88$이다. 이때 $a_9 = a_8 - 80 = 8$이다.

(ii) $40 < a_4 \le 80$인 경우:

$a_6 = 2a_4$이므로 $80 < a_6 \le 160$이고, $a_7 = a_6 - 80$이므로 $0 < a_7 \le 80$이다. 따라서 $a_8 = 2a_6 > 160$이므로 주어진 조건 $a_8 \le 90$을 만족시키지 않는다. 따라서 이 경우는 가능하지 않다.

(iii) $a_4 > 80$인 경우:

(1-1)의 풀이에서 $a_4 = 84$이고, $a_6 = 2a_4 = 168 > 80$이므로 $a_7 = a_6 - 80 = 88 > 80$, $a_8 = a_7 - 80 = 8 \le 80$이다. 따라서 $a_9 = 2a_7 = 176$이다.

그러므로 (i), (iii)의 경우를 종합하면 다음과 같은 표를 만들 수 있고, 이때 a_1, a_2, $\cdots$, a_9가 문제의 조건을 모두 만족시킴을 확인할 수 있다.

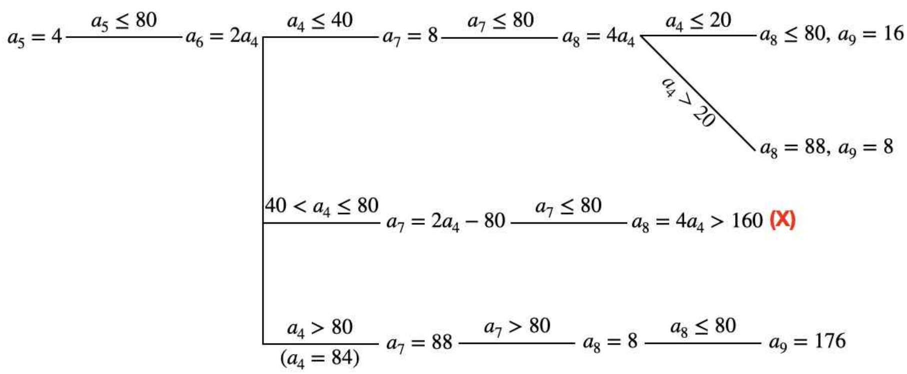
<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th><th>a_7</th><th>a_8</th><th>a_9</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$1, 2, \cdots, 10$</td><td>2</td><td>$2, 4, \cdots, 20$</td><td rowspan="4">4</td><td>$4, 8, \cdots, 40$</td><td>8</td><td>$8, 16, \cdots, 80$</td><td>16</td></tr>
<tr><td>1</td><td>11</td><td>2</td><td>22</td><td>44</td><td>8</td><td>88</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$1, 2, \cdots, 40$</td><td>42</td><td>$2, 4, \cdots, 80$</td><td rowspan="2">84</td><td rowspan="2">168</td><td rowspan="2">88</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">176</td></tr>
<tr><td>82</td><td>$1, 2, \cdots, 80$</td><td>164</td></tr>
</table>

따라서 a_9가 가질 수 있는 서로 다른 모든 수의 합은 다음과 같다.

$$16 + 8 + 176 = 200$$

참고: (1-3)의 상황을 그림으로 정리하면 다음과 같다.

세종대학교 2024학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안



[문제 2]

(2-1) 음함수의 미분법에 의하여 식 $e^{x+y} + y - x = 0$의 양변을 미분하면

$e^{x+y}(1+y') + y' - 1 = 0$이고, 이를 정리하면 $y' = \dfrac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}}$ 이다. 이 식에 $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$을

대입하면 접선의 기울기는 0이다.

(2-2) $y' = \dfrac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}}$ 이고 식 $e^{x+y} + y - x = 0$으로부터 $y' = \dfrac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}} = \dfrac{1-x+y}{1+x-y}$가 된다.

이로부터 $y'' = \dfrac{2(y'-1)}{(1+x-y)^2}$ 을 얻는다. 또한 $y' - 1 = \dfrac{-2e^{x+y}}{1+e^{x+y}} < 0$이므로

$y' < 1$이고 $y'' = \dfrac{2(y'-1)}{(1+x-y)^2} < 0$이다. 따라서 곡선 $y = f(x)$는 실수 전체의 집합에서 위로

볼록하다.

(다른 풀이 1) $y' = \dfrac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}}$이므로 $1 + y' = 1 + \dfrac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}} = \dfrac{2}{1+e^{x+y}}$이고

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{(-e^{x+y})(1+y')(1+e^{x+y}) - (1-e^{x+y})e^{x+y}(1+y')}{(1+e^{x+y})^2} \\
&= \frac{2(-e^{x+y})(1+e^{x+y}) - 2(1-e^{x+y})e^{x+y}}{(1+e^{x+y})^3} \\
&= -\frac{4e^{x+y}}{(1+e^{x+y})^3} \\
&< 0
\end{aligned}
$$

이다. 따라서 곡선 $y = f(x)$는 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하다.

(다른 풀이 2) (2-1)의 풀이에서 $e^{x+y}(1+y') + y' - 1 = 0$을 얻은 후 양변을 미분하면

$e^{x+y}(1+y')^2 + e^{x+y}y'' + y'' = 0$이다. 그러므로 $y'' = -\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}(1+\mathrm{y}')^2}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}+1}$ 인데

$1 + y' = 1 + \dfrac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}} = \dfrac{2}{1+e^{x+y}}$임을 이용하면 $y'' = -\dfrac{4e^{x+y}}{(e^{x+y}+1)^3} < 0$이 되어 곡선 $y = f(x)$는

실수 전체의 집합에서 위로 볼록하다.

세종대학교 2024학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

(2-3) 곡선 $y=f(x)$위의 점 Q(a,b)에서의 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선을 ℓ이라 할 때,

$y'=\frac{1-e^{a+b}}{1+e^{a+b}}=\frac{1}{2}$ 로부터 $a+b=-\ln 3$이 되고, $e^{a+b}+b-a=0$으로부터 $a-b=\frac{1}{3}$을 얻는다.

이 두 식을 연립하면, $a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\ln 3\right)$, $b=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\ln 3\right)$이다. 직선 ℓ의 y절편은

$$-\frac{a}{2}+b=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln 3<-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}<-\frac{1}{2}$$

이 된다. 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하여 접선 ℓ의 오른쪽에 위치하고, 또한 ℓ의 y절편은 $-\frac{1}{2}$보다 작으므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$과 만나지 않는다. 직선 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$과 접선 ℓ은 평행하고 곡선 $y=f(x)$는 직선 ℓ의 오른쪽에 위치하므로 직선 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ 위의 점 P와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q 사이의 거리가 최소가 되는 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\ln 3\right), -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\ln 3\right)\right)$이다.

(다른 풀이) $y=f(x)$ 위의 점 (x_0,y_0)과 직선 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ 위의 점 사이의 최소 거리는 점 (x_0,y_0)과 직선 $x-2y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|x_0-2y_0-1|}{\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

과 같다. 이제 $g(x)=\frac{x-2f(x)-1}{\sqrt{5}}$이라 정의하자. 그러면 $x-f(x)=e^{x+f(x)}$이므로

$$g(x)=\frac{e^{x+f(x)}-f(x)-1}{\sqrt{5}}$$

이다. 그런데 $f'(x)=\frac{1-e^{x+f(x)}}{1+e^{x+f(x)}}$임을 이용하면

$$g'(x)=\frac{(1+f'(x))e^{x+f(x)}-f'(x)}{\sqrt{5}}=\frac{3e^{x+f(x)}-1}{\sqrt{5}(1+e^{x+f(x)})}$$

이고

$$\begin{aligned} g''(x)&=\frac{(1+f'(x))3e^{x+f(x)}(1+e^{x+f(x)})-(1+f'(x))(3e^{x+f(x)}-1)e^{x+f(x)}}{\sqrt{5}(1+e^{x+f(x)})^2} \\ &=\frac{8e^{x+f(x)}}{\sqrt{5}(1+e^{x+f(x)})^3} \\ &>0 \end{aligned}$$

이므로, $g'(a)=0$을 만족시키는 a에 대하여 $g(x)\geq g(a)$이다. $b=f(a)$라고 정의하면 a, b는

$$\begin{cases} 3e^{a+b}=1 \\ a-b=e^{a+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-\ln 3 \\ \mathrm{a}-\mathrm{b}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

을 만족시킨다. 이 연립방정식을 풀면 $a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\ln 3\right)$, $b=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\ln 3\right)$이므로

$g(a)=\frac{\ln 3-1}{2\sqrt{5}}>0$이다. 따라서 모든 x에 대하여 $g(x)>0$이고, (*)는 $\frac{x_0-2y_0-1}{\sqrt{5}}$과 같아진다. 즉 직선 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ 위의 점 P와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q사이의 거리가 최소가 되는 Q의 x좌표는 $y=g(x)$를 최소로 만드는 x의 값인 a와 같고, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\ln 3\right), -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\ln 3\right)\right)$이다.

세종대학교 2024학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제 3]

(3-1) 함수 $g(x)$를 다시 쓰면

$$g(x)=x\int_{-1}^{x}f(y)dy-\int_{-1}^{x}yf(y)dy+t\left(\int_{x}^{1}yf(y)dy-x\int_{x}^{1}f(y)dy\right)$$

이다. 따라서 함수 $g(x)$는 $(-1,1)$에서 미분가능하며

$$\begin{aligned}g'(x)&=\int_{-1}^{x}f(y)dy+xf(x)-xf(x)+t\left(-xf(x)-\int_{x}^{1}f(y)dy+xf(x)\right)\\&=\int_{-1}^{x}f(y)dy-t\int_{x}^{1}f(y)dy\\&=\int_{-1}^{x}f(y)dy-t\left(\int_{-1}^{1}f(y)dy-\int_{-1}^{x}f(y)dy\right)\\&=(1+t)\left(\int_{-1}^{x}f(y)dy-\frac{t}{1+t}\int_{-1}^{1}f(y)dy\right)\end{aligned}$$

이다. $F(x)=\int_{-1}^{x}f(y)dy$ 라고 정의하면, $F(-1)=0$, $F(1)=\int_{-1}^{1}f(y)dy=f(0)$ 이고 $F(x)$는 증가함수이므로 $g'(x)=(1+t)\left(F(x)-\frac{t}{1+t}f(0)\right)$도 증가함수이다. 또한 $t>0$이므로 $0<\frac{t}{1+t}f(0)<f(0)$이다. 그러므로 $F(a)=\frac{t}{1+t}f(0)$을 만족시키는 $a\in(-1,1)$가 유일하게 존재하며 $x<a$ 이면 $g'(x)<0$이고 $x>a$ 이면 $g'(x)>0$ 이다. 따라서 $g(x)$는 $x=a$에서 최솟값을 가지며 $g'(a)=0$이다. 즉 $F(h(t))=\int_{-1}^{h(t)}f(x)dx=\frac{t}{1+t}f(0)$이 성립하므로,

$\frac{1}{f(0)}\int_{-1}^{h(t)}f(x)dx=\frac{t}{1+t}$이다.

(3-2) (3-1)에서 $\frac{1}{f(0)}\int_{-1}^{h(t)}f(x)dx=\frac{t}{1+t}$가 성립한다. 이 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{f(0)}h'(t)f(h(t))=\frac{1}{(1+t)^2}$$

이다. 이 식에 $t=1$을 대입하고 $h(1)=0$임을 이용하면 $h'(1)=\frac{1}{4}$이다.

(3-3) $x\in[-1,1]$에서 정의되는 함수 $p(x)$를 $p(x)=\frac{1}{f(0)}\int_{-1}^{x}f(y)dy$ 로 정의하면

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^2}{2} & (-1\le x\le 0)\\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2} & (0<x\le 1)\end{cases}$$

이다. 따라서 $p(x)$는 구간 $[0,1]$에서 역함수가 존재하며 그 역함수를 $p^{-1}(x)$라고 할 때

$$h(t)=p^{-1}\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

이다. 한편

$$p^{-1}(x)=\begin{cases}-1+\sqrt{2x} & \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)\\ 1-\sqrt{2(1-x)} & \left(\frac{1}{2}<x\le 1\right)\end{cases}$$

이다. 따라서

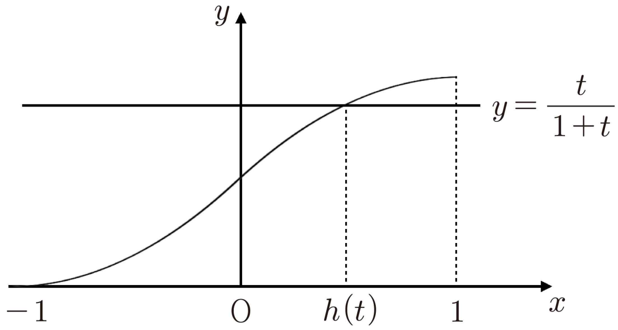
$$h(t)=\begin{cases}-1+\sqrt{\dfrac{2t}{1+t}} & (0<t\le 1)\\ 1-\sqrt{\dfrac{2}{1+t}} & (t>1)\end{cases}$$

이다.

(다른 풀이) $f(0)=1$이므로 (3-1)의 결과를 이용하면 $\displaystyle\int_{-1}^{h(t)} f(x)dx=\frac{t}{1+t}f(0)=\frac{t}{1+t}$ 이다. 한편

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx=\begin{cases}\left[x+\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{a}=a+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2} & (-1\le a\le 0)\\ \dfrac{1}{2}+\left[x-\dfrac{x^2}{2}\right]_{0}^{a}=a-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2} & (0<a\le 1)\end{cases}$$

이므로 $h(t)$는 함수 $y=\begin{cases}x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} & (-1<x\le 0)\\ x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} & (0<x<1)\end{cases}$ 과 직선 $y=\dfrac{t}{1+t}$의 교점의 x좌표이고, 이때의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



그러므로 t의 범위를 기준으로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\dfrac{t}{1+t}\le\dfrac{1}{2}$, 즉 $t\le 1$인 경우:

$h(t)$는 방정식 $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{t}{1+t}$의 해 중에서 구간 $(-1,1)$에 속하는 값이다. 방정식 $x^2+2x+\left(1-\dfrac{2t}{1+t}\right)=0$의 해를 구하면 $-1\pm\sqrt{\dfrac{2t}{1+t}}$ 이므로 $h(t)=-1+\sqrt{\dfrac{2t}{1+t}}$ 이다.

(ii) $\dfrac{t}{1+t}>\dfrac{1}{2}$, 즉 $t>1$인 경우:

$h(t)$는 방정식 $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{t}{1+t}$의 해 중에서 구간 $(-1,1)$에 속하는 값이다. 방정식 $x^2-2x-\left(1-\dfrac{2t}{1+t}\right)=0$의 해를 구하면 $1\pm\sqrt{\dfrac{2}{1+t}}$ 이므로 $h(t)=1-\sqrt{\dfrac{2}{1+t}}$ 이다.

따라서 (i), (ii)의 결과를 종합하면 다음을 얻는다.

$$h(t)=\begin{cases}-1+\sqrt{\dfrac{2t}{1+t}} & (0<t\le 1)\\ 1-\sqrt{\dfrac{2}{1+t}} & (t>1)\end{cases}$$