[문항카드5] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항1

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	역함수의 미분법, 평행이동, 대칭이동
예상 소요 시간	36분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 2$일 때 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$이다.
(나) 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다.
(다) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+4)$이다.

열린구간 $(2, 4)$에서 정의된 함수 $h(x)$는 열린구간 $(2, 4)$에 속하는 모든 x에 대하여 $h(x) = f(x)$이다. $h(x)$의 역함수를 $h^{-1}(x)$라 하자.

(1-1) $h^{-1}(2)$를 구하시오. (70점)

(1-2) $(h^{-1})'(2)$를 구하시오. (80점)

(1-3) 실수 $t > 0$에 대하여 두 점 $(0, f(0))$과 $(t, f(t))$를 지나는 직선의 기울기를 $g(t)$라 하자. $(h^{-1})'(x) = |g(t)|$를 만족시키는 실수 x가 존재하도록 하는 t의 최댓값을 t_0이라 할 때, $n < t_0 < n+1$을 만족시키는 자연수 n을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 미분계수를 계산하고, 이를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 B-문제1	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. 수학 (2) 기하 ④ 도형의 이동 [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2022	98~103
	수학	김원경 외	비상교육	2022	141~151
기타					

5. 문항 해설

역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 미분계수를 구하고, 이를 평행이동과 대칭이동을 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪올바른 풀이가 있고 답 $h^{-1}(2)=3$임을 구하면 (70점) ▪ 방정식 $x^3-3x^2+4=2$의 해 $x=1,$ 또는 $-x^3-3x^2+4=2$의 해 $x=-1$ 또는 $-(x-4)^3-3(x-4)^2+4=2$의 해 $x=3$을 구하면 (+40점)	70
(1-2)	▪$(h^{-1})'(2)=\dfrac{1}{h'(h^{-1}(2))}$을 얻으면 (+30점) ▪답 $\dfrac{1}{3}$을 구하면 (+50점)	80
(1-3)	▪$(h^{-1})'(x)\geq\dfrac{1}{3}$을 구하면 (+20점) ▪$t_1>10$임을 설명하면 (+20점) ▪$t\geq 11$일 때 $g(t)>-\dfrac{1}{3}$이라고 설명하면 (+20점) ▪답 $n=10$을 구하면 (+20점)	80

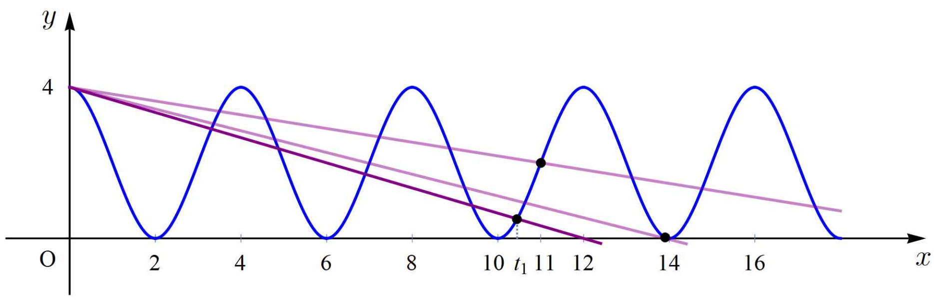
※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(1-1) $0 \le x \le 2$ 일 때 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ 이므로 $x^3 - 3x^2 + 4 = 2$ 를 풀면
$(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}$ 인데 이 중에서 $0 \le x \le 2$ 인 것은
$x = 1$ 뿐이다. 따라서
$h^{-1}(2) = h^{-1}(f(1)) = h^{-1}(f(-1)) = h^{-1}(f(-1+4)) = h^{-1}(f(3)) = h^{-1}(h(3)) = 3$ 이다.

(1-2) $0 < x < 2$ 일 때 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 임을 이용하면 그래프의 개형으로부터
$(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(2))} = \dfrac{1}{f'(3)} = \dfrac{-1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$ 을 얻는다.
(별해) $2 < x < 4$ 인 x 에 대하여, $0 < 4 - x < 2$ 이고,
$h(x) = f(x) = f(x-4) = f(-(x-4)) = f(4-x)$ 가 된다. 따라서
$(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(2))} = \dfrac{1}{h'(3)} = \dfrac{-1}{f'(4-3)} = \dfrac{-1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$ 이다.

(1-3) $0 < x < 2$ 일 때 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로 $-3 \le f'(x) < 0$ 이다. 따라서 그래프의 개형을 생각하면 $(h^{-1})'(x) \ge \dfrac{1}{3}$ 이다. (단, $0 < x < 4$) 그리고 $t > 0$ 에 대하여 $g(t) \le 0$ 이다. 따라서 $t > 0$ 이면서 $|g(t)| \ge \dfrac{1}{3}$, 즉 $g(t) \le -\dfrac{1}{3}$ 인 경우를 생각해야 한다. 그러므로 다음 그림과 같이 $(0,\ f(0))$ 을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$ 인 직선과 곡선 $y = f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표의 최댓값이 t_1 라 하면 $t_1 > 10$ 이다. $g(11) = -\dfrac{2}{11} > -\dfrac{1}{3}$ 이므로 $t_1 < 11$ 이다. $t \ge 11$ 일 때 그림으로부터 $g(t) > -\dfrac{1}{3}$ 이다. 따라서 $t_0 = t_1$ 이고, 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n 은 10 이다.



다.

[문항카드6] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항2

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	부분적분법, 치환적분법
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] $e^{-\frac{\pi}{2}} < x < e^{\frac{\pi}{2}}$ 에 대하여 $f(x) = \int_{e}^{x} \tan(\ln t)\, dt$ 라 하자.

(2-1) $f(x)$가 최소가 되는 x의 값을 구하시오. (70점)

(2-2) $f(1) = a$라 할 때, $\int_{0}^{1} e^{x} \tan^{2} x\, dx$ 를 a의 식으로 나타내시오. (80점)

(2-3) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f'(x)}{x^{2}}\, dx - f\left(\frac{1}{e}\right)$ 을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

주어진 조건을 만족시키는 함수의 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 B-문제2	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2022	144-149
	미적분	박교식 외	동아출판	2022	134-144
기타					

5. 문항 해설

주어진 조건을 만족시키는 함수의 적분을 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	▪ $f'(x) = \tan(\ln x)$를 구하면 (+20점) ▪ $f'(1) = 0$을 보이면 (+20점) ▪ "$x < 1$이면 $f'(x) < 0$이고 $x > 1$이면 $f'(x) > 0$이다"를 기술하면 (+20점) ▪ 답 $x = 1$을 쓰면 (+10점) (별해) ▪ $f'(x) = \tan(\ln x)$를 구하면 (+20점) ▪ $f'(1) = 0$을 보이면 (+20점) ▪ $f''(x) = \dfrac{\sec^2(\ln x)}{x} > 0$ 구하면 (+20점) ▪ 답 $x = 1$을 쓰면 (+10점)	70
(2-2)	▪ 부분적분을 이용하여 $\int_e^1 \sec^2(\ln x)dx = -e\tan 1 - f(1)$을 구하면 (+40점) ▪ 치환적분을 이용하여 $\int_0^1 e^x \tan^2 x dx = e\tan 1 + a - e + 1$을 구하면 (+40점) (별해) ▪ 치환적분을 이용하여 $a = -\int_0^1 e^x \tan x\, dx$를 구하면 (+30점) ▪ 부분적분을 이용하여 $a = -e\tan 1 + \int_0^1 e^x \sec^2 x\, dx$를 구하면 (+40점) ▪ $\int_0^1 e^x \tan^2 x dx = e\tan 1 + a - e + 1$을 구하면 (+10점)	80
(2-3)	▪ 문제를 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\, dx$ 형태로 변형하면 (+20점) ▪ $y = \dfrac{1}{x}$로 치환하거나 $\theta = \ln x$로 치환하면 (+20점) ▪ 답이 0임을 보이면 (+40점)	80

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(2-1) $f'(x) = \tan(\ln x)$이므로 $f'(1) = 0$이다. $e^{-\frac{\pi}{2}} < x < 1$이면 $-\frac{\pi}{2} < \ln x < 0$ 이고 $f'(x) = \tan(\ln x) < 0$이다. $1 < x < e^{\frac{\pi}{2}}$이면 $0 < \ln x < \frac{\pi}{2}$이고 $f'(x) = \tan(\ln x) > 0$이다. 따라서 $x = 1$에서 $f(x)$는 최소이다.

(별해) $f'(x) = \tan(\ln x)$이므로 $f'(1) = 0$이다.

$f''(x) = \dfrac{\sec^2(\ln x)}{x} > 0$이므로 $x = 1$에서 $f(x)$는 최소이다.

(2-2) $f(1) = \displaystyle\int_e^1 \tan(\ln x)\,dx = [x\tan(\ln x)]_e^1 - \int_e^1 \sec^2(\ln x)dx$ 이므로

$\displaystyle\int_e^1 \sec^2(\ln x)dx = [x\tan(\ln x)]_e^1 - f(1) = -e\tan 1 - f(1)$이다.

$x = e^t$로 치환하면

$\displaystyle\int_e^1 \sec^2(\ln x)dx = -\int_0^1 e^t \sec^2 t\,dt = -\int_0^1 e^t \tan^2 t\,dt - \int_0^1 e^t\,dt = -e\tan 1 - f(1)$이고,

$\displaystyle\int_0^1 e^x \tan^2 x dx = e\tan 1 + a - e + 1$이다.

(별해) $t = e^x$ 로 치환하면 $a = f(1) = \displaystyle\int_e^1 \tan(\ln t)\,dt = -\int_0^1 e^x \tan x\,dx$ 이다. 따라서

$$a = -\int_0^1 e^x \tan x\,dx = [-e^x\tan x]_0^1 + \int_0^1 e^x \sec^2 x\,dx = -e\tan 1 + \int_0^1 e^x(1+\tan^2 x)dx$$
$$= -e\tan 1 + [e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x \tan^2 x\,dx$$

이므로 $\displaystyle\int_0^1 e^x \tan^2 x dx = e\tan 1 + a - e + 1$이다.

(2-3) $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f'(x)}{x^2}\,dx - f\left(\frac{1}{e}\right)$이라 두면,

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f'(x)}{x^2}\,dx - f\left(\frac{1}{e}\right) = -\int_e^{\frac{1}{e}} \frac{\tan(\ln x)}{x^2}\,dx - \int_e^{\frac{1}{e}} \tan(\ln x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx$$

이다. $x = \dfrac{1}{y}$로 치환하면 $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\tan(\ln y)\,dy = -I$이므로

$I = 0$이다.

(별해) $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f'(x)}{x^2}\,dx - f\left(\frac{1}{e}\right)$이라 두면,

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f'(x)}{x^2}\,dx - f\left(\frac{1}{e}\right) = -\int_e^{\frac{1}{e}} \frac{\tan(\ln x)}{x^2}\,dx - \int_e^{\frac{1}{e}} \tan(\ln x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx$$

이다.

$\theta=\ln x$ 로 치환하면 $d\theta=\dfrac{1}{x}dx$ 에서 $dx=x\,d\theta=e^{\theta}d\theta$ 이고

$I=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)\tan\theta\,d\theta$ 이다. $y=-\theta$ 로 치환하면

$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)\tan\theta\,d\theta=-\int_{-1}^{1}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\tan y\,dy=-I$ 이므로 $I=0$ 이다.

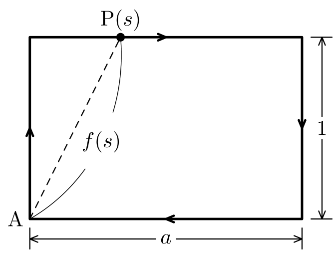
[문항카드7] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항3

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	이계도함수, 함수의 그래프
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 그림과 같이 가로의 길이가 $a>1$이고 세로의 길이가 1인 직사각형이 있다.
꼭짓점 A에서 출발하여 직사각형의 네 변을 따라서 시계 방향으로 이동한 거리가 s인 위치의 점 $\mathrm{P}(s)$와 점 A 사이의 거리를 $f(s)$라 하자. (단, $0 \le s \le 2a+2$)



또한 곡선 $y=f(s)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선을 ℓ_t라 하자. (단, $1<t<a+1$ 또는 $a+1<t<a+2$)

(3-1) $0 \le s \le 2a+2$에서 $f(s)$를 구하시오. 또한 곡선 $y=f(s)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 ℓ_2의 방정식을 구하시오. (80점)

(3-2) $1<\alpha<a+1$일 때 ℓ_α와 곡선 $y=f(s)$의 교점의 개수를 α의 값의 범위에 따라 구하시오. 또한 $a+1<\beta<a+2$일 때 ℓ_β와 곡선 $y=f(s)$의 교점의 개수를 구하시오. (80점)

(3-3) $1<\alpha<a+1$이고 $a+1<\beta<a+2$인 α, β에 대하여 두 직선 ℓ_α와 ℓ_β가 이루는 예각을 $\theta(\alpha,\beta)$라 하자. 실수 $a>1$에 대하여 집합 I_a는 다음과 같이 주어진다.

$$I_a=\{\theta(\alpha,\beta)\ \mid\ 1<\alpha<a+1,\ a+1<\beta<a+2\}$$

I_a는 열린구간 $(L(a),\ R(a))$이다. 이 때 $\lim_{a\to\infty} L(a)$와 $\lim_{a\to\infty} R(a)$를 각각 구하시오.

(80점)

3. 출제 의도

주어진 조건으로부터 함수를 찾고, 함수의 볼록성을 이해하는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 B-문제3	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	97~111
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	111~124
기타					

5. 문항 해설

주어진 조건으로부터 함수를 찾고, 미분법을 이용하여 함수의 증감, 볼록성 등을 얻어 문제를 해결한다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪모든 경우의 $f(s)$를 구하면 (+40) ▪ℓ_2의 방정식 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(s-2)+\sqrt{2}$ 또는 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}s$를 구하면 (+40)	80
(3-2)	▪볼록성이 보이는 $y=f(s)$의 그래프가 있으면 (+20점) ▪f의 볼록성을 보이면 (+20점) ▪(f의 볼록성을 보이고) $1<\alpha\le 2$일 때 ℓ_α와 $y=f(s)$의 교점의 개수가 3이고, $2<\alpha<a+1$일 때 ℓ_α와 $y=f(s)$의 교점의 개수가 2임을 보이면 (+20점)	80

	■(f의 볼록성을 보이고) $a+1<\beta<a+2$에서 ℓ_β와 $y=f(s)$의 교점의 개수가 3임을 보이면 (+20점)	
(3-3)	■$\theta(\alpha,\beta)=\pi-\theta_\beta+\theta_\alpha$ (+10점) ■ $\lim\limits_{a\to 0+} L(a)=0$을 구하면 (+30점) ■$\lim\limits_{a\to\infty} R(a)=\dfrac{\pi}{4}$를 구하면 (+40점)	80

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(3-1) 좌표평면에서 점 A의 좌표를 $(0,0)$이라 두면, 점 $\mathrm{P}(s)$의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(s)=\begin{cases}(0,s) & 0\le s\le 1\\ (s-1,1) & 1\le s\le a+1\\ (a,a+2-s) & a+1\le s\le a+2\\ (2a+2-s,0) & a+2\le s\le 2a+2\end{cases}$$

따라서 $f(s)$는 다음과 같이 구하여진다.

$$f(s)=\begin{cases}s & 0\le s\le 1\\ \sqrt{(s-1)^2+1} & 1\le s\le a+1\\ \sqrt{(s-a-2)^2+a^2} & a+1\le s\le a+2\\ 2a+2-s & a+2\le s\le 2a+2\end{cases}$$

$1<s<a+1$에서 $f(s)=\sqrt{s^2-2s+2}$로부터 $f'(s)=\dfrac{s-1}{\sqrt{s^2-2s+2}}$을 얻어, $f(2)=\sqrt{2}$이고,

$f'(2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로, 구하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(s-2)+\sqrt{2}$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}s$이다.

(3-2) $1<s<a+1$에서 $f'(s)=\dfrac{s-1}{\sqrt{s^2-2s+2}}>0$, $f''(s)=\dfrac{1}{(s^2-2s+2)^{3/2}}>0$이므로

$y=f(x)$는 아래로 볼록인 함수이며 증가한다. 또한 $a+1<s<a+2$에서

$f'(s)=\dfrac{s-a-2}{\sqrt{s^2-2(a+2)s+2a^2+4a+4}}<0$,

$f''(s)=\dfrac{a^2}{(s^2-2(a+2)s+2a^2+4a+4)^{3/2}}>0$이므로 $y=f(x)$는 아래로 볼록인 함수이며

감소한다.

따라서 $0\le s\le 2a+2$에서 $y=f(s)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

$1<\alpha<a+1$일 때, $\dfrac{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}{\alpha}=\dfrac{f(\alpha)-0}{\alpha-0}=f'(\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}$ 을 이용하여 ℓ_α가 $(0,0)$을 지나는 α를 구하면 $\alpha=2$이다. 그런데 $1<s<a+1$에서 $y=f(s)$는 아래로 볼록한 증가함수이므로 $1<\alpha\le 2$일 때 ℓ_α의 s절편은 0보다 작거나 같고 ℓ_α와 $y=f(s)$의 접점을 포함한 교점의 개수는 3이다. $2<\alpha<a+1$일 때는 ℓ_α의 s절편이 0보다 크고 $a+1$보다 작으므로 ℓ_α와 $y=f(s)$의 접점을 포함한 교점의 개수는 2이다.

$2<a+1<\beta<a+2$일 때,

$-\dfrac{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}{(2a+2)-\beta}=\dfrac{0-f(\beta)}{(2a+2)-\beta}=f'(\beta)=\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}$ 를 이용하여 ℓ_β가 $(2a+2,0)$을 지나는 β를 구하면 $\beta=2$이고 $\beta>2$인 것에 모순이다.

$a+1<s<a+2$에서 $y=f(s)$가 아래로 볼록한 감소함수이므로, 위 모순은 ℓ_β의 s절편이 $2a+2$보다 작거나 같을 수 없음을 의미한다. 그러므로 $a+1<\beta<a+2$에서 ℓ_β의 s절편은 $2a+2$보다 크고, ℓ_β와 $y=f(s)$의 접점을 포함한 교점의 개수는 3이다.

(별해) $a+1<\beta<a+2$일 때, ℓ_β의 s절편이 $2a+2$보다 큰 것은 다음과 같이 보일 수도 있다:

ℓ_β의 방정식은 $y-f(\beta)=f'(\beta)(s-\beta)$로 주어지고, s절편은 $\beta-\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}$이다. 따라서

$a+1<\beta<a+2$인 경우는 접선의 s절편이 $\beta-\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}=(2a+2)-\dfrac{a(\beta-2)}{\beta-a-2}$로 주어지는데,

$2<a+1<\beta<a+2$이므로 $(2a+2)-\dfrac{a(\beta-2)}{\beta-a-2}>2a+2$이다.

(3-3) $1<\alpha<a+1$에서의 접선 ℓ_α가 s축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_α라 하면 $\tan\theta_\alpha=f'(\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}$ 이다. 또 $a+1<\beta<a+2$ 에서의 접선 ℓ_β가 s축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_β라 하면 $\tan\theta_\beta=f'(\beta)=\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}$ 이다.

$1<\alpha<a+1$에서 $0<\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}<1$이고, $a+1<\beta<a+2$에서

$-1<\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}<0$이므로 $0<\theta_\alpha<\dfrac{\pi}{4}$이고, $\dfrac{3\pi}{4}<\theta_\beta<\pi$이다. 따라서

ℓ_α와 ℓ_β가 이루는 예각 $\theta(\alpha,\beta)$는 $\theta(\alpha,\beta)=\pi-\theta_\beta+\theta_\alpha$이다. 이제, $\lim\limits_{\alpha\to 1+}\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}=0$이고,

$\lim\limits_{\beta\to(a+2)-}\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}=0$이므로 a값에 상관없이 $L(a)=\pi-\pi+0=0$이다.

또한 $\lim\limits_{\alpha\to(a+1)-}\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$,

$\lim\limits_{\beta\to(a+1)+}\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}=\dfrac{-1}{\sqrt{a^2+1}}$이고, $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}=1$,

$\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{a^2+1}}=0$이므로 $\lim\limits_{a\to\infty}R(a)=\pi-\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$이다.