[문항카드2] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항1

1. 일반 정보

유형	☑논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 치환적분법, 부분적분법
예상 소요 시간	36분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)=(x^2+2)e^{2x}+e^{4x}$이 모든 실수 $x>0$에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시킨다.

(1-1) 방정식 $g(x)=3e^2+e^4$의 해는 $x=1$뿐임을 보이시오. 또한 방정식 $g(x)=3$의 해는 $x=0$뿐임을 보이시오. (70점)

(1-2) 극한 $\lim_{x\to 0+} xf'(x)$를 구하시오. (80점)

(1-3) $\int_3^{3e^2+e^4} f(x)\,dx$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

주어진 조건을 만족하는 함수의 극한과 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 A-문제1	수학Ⅱ (1) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2022	144-149
	미적분	박교식 외	동아출판	2022	134-144
기타					

5. 문항 해설

주어진 조건을 만족하는 함수의 미분을 계산하고 치환적분법 또는 부분적분법을 이용하여 적분을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪ $g'(x)=(2x^2+2x+4)e^{2x}+4e^{4x}$을 구하면 (+20점) ▪ $g'(x)>0$을 설명하고 $g(x)$가 일대일함수임을 언급하면 (+30점) ▪ $g(1)=3e^2+e^4$을 얻으면 (+10점) ▪ $g(0)=3$을 얻으면 (+10점)	70
(1-2)	▪ $x\to 0+$일 때 $f(x)\to -\infty$ 임을 보이면 (+30점) ▪ $xf'(x)=\dfrac{f(x)^2+2+e^{2f(x)}}{2f(x)^2+2f(x)+4+4e^{2f(x)}}$ 을 구하면 (+30점) ▪ 답 $\dfrac{1}{2}$을 구하면 (+20점)	80
(1-3)	▪ 적절한 적분식 $\displaystyle\int_0^1 t\{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}\}dt$ 또는 $3e^2+e^4-\displaystyle\int_0^1\{(t^2+2)e^{2t}+e^{4t}\}dt$ 를 구하면 (+40점) ▪ 답 $\dfrac{3}{4}e^4+\dfrac{7}{4}e^2+\dfrac{3}{2}$을 구하면 (+40점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

(1-1) 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) = (2x^2+2x+4)e^{2x} + 4e^{4x} > 0$이다. 따라서 $g(x)$는 증가함수이므로 일대일함수이다. 그런데 $g(1) = 3e^2 + e^4$이므로 $x=1$이 방정식 $(x^2+2)e^{2x} + e^{4x} = 3e^2+e^4$의 유일한 해이다. 또한 $g(0)=3$이므로 $x=0$이 방정식 $(x^2+2)e^{2x}+e^{4x}=3$의 유일한 해이다.

(1-2) $x = g(f(x)) = \{f(x)^2+2\}e^{2f(x)} + e^{4f(x)} = \{f(x)^2 + 2 + e^{2f(x)}\}e^{2f(x)}$에 대하여 $x \to 0+$일 때 우변의 극한은 0이고, $f(x)^2+2+e^{2f(x)} > 2$이므로 $\lim\limits_{x\to 0+} e^{2f(x)} = 0$이다. 따라서 $f(x) = t$로 치환하면 $x \to 0+$일 때 $t \to -\infty$이다. $f'(x) = \dfrac{1}{\{2f(x)^2+2f(x)+4\}e^{2f(x)} + 4e^{4f(x)}}$이므로

$$xf'(x) = \frac{(f(x)^2+2)e^{2f(x)}+e^{4f(x)}}{\{2f(x)^2+2f(x)+4\}e^{2f(x)}+4e^{4f(x)}} = \frac{f(x)^2+2+e^{2f(x)}}{2f(x)^2+2f(x)+4+4e^{2f(x)}}$$ 이고,

$$\lim_{x\to 0+} xf'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)^2+2+e^{2f(x)}}{2f(x)^2+2f(x)+4+4e^{2f(x)}} = \lim_{t\to -\infty}\frac{t^2+2+e^{2t}}{2t^2+2t+4+4e^{2t}} = \frac{1}{2}$$ 이다.

(1-3) $g(x)$는 증가함수이므로 일대일함수이다. (1-1)에 의하여 $f(3)=0$이고 $f(3e^2+e^4)=1$이다.
$f(x)=t$로 치환하면

$$dt = f'(x)dx = \frac{1}{\{2f(x)^2+2f(x)+4\}e^{2f(x)}+4e^{4f(x)}}dx = \frac{1}{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}}dx$$ 를 얻는다.

따라서 $dx = \{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}\}dt$가 되고

$$\int_3^{3e^2+e^4} f(x)dx = \int_0^1 t\{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}\}dt = \frac{3}{4}e^4 + \frac{7}{4}e^2 + \frac{3}{2}$$ 이다.

(별해1) 부분적분법에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_3^{3e^2+e^4} f(x)dx &= [xf(x)]_3^{3e^2+e^4} - \int_3^{3e^2+e^4} xf'(x)dx \\ &= 3e^2+e^4 - \int_3^{3e^2+e^4}\{(f(x)^2+2)e^{2f(x)}+e^{4f(x)}\}f'(x)dx \\ &= 3e^2+e^4-\int_0^1\{(t^2+2)e^{2t}+e^{4t}\}dt \\ &= \frac{3}{4}e^4+\frac{7}{4}e^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(별해2) $f(x)=t$ 로 치환하면 $x = g(f(x)) = g(t)$ 로부터 $dx = g'(t)\,dt$ 이고,

$$\begin{aligned}\int_3^{3e^2+e^4} f(x)\,dx &= \int_0^1 t\,g'(t)\,dt \\ &= [t\,g(t)]_0^1 - \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= 3e^2+e^4-\int_0^1\{(t^2+2)\,e^{2t}+e^{4t}\}\,dt \\ &= \frac{3}{4}e^4+\frac{7}{4}e^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이다.

[문항카드3] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항2

1. 일반 정보

유형	☑논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	음함수의 미분법, 이계도함수, 극대, 극소
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$라 할 때 $y+\ln(x+y)=x$가 성립한다.

(2-1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{e+1}{2}, \frac{e-1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. (70점)

(2-2) 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하시오. (80점)

(2-3) $f(0)=f(\alpha)=\beta$일 때, β를 α의 식으로 표현하고 $\alpha<2$임을 보이시오. (단, $\alpha \neq 0$) (80점)

3. 출제 의도

음함수의 도함수와 이계도함수를 이해하고 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 A-문제2	수학II (2) 미분 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 2 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	권오남 외	교학사	2022	96~99
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2022	87~92
기타					

5. 문항 해설

음함수의 도함수와 이계도함수를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그리고 함수의 최대, 최소를 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	▪ $y' = \dfrac{x+y-1}{x+y+1}$ 을 구하면 (+40점) ▪ 답 $\dfrac{e-1}{e+1}$ 을 구하면 (+30점)	70
(2-2)	▪ $x = \dfrac{1}{2}$ 에서만 $y' = 0$을 보이면 (+30점) ▪ $y'' = \dfrac{1}{2} > 0$을 보이면 (+40점) ▪ 답 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 을 구하면 (+10점) [별해1] ▪ $x = \dfrac{1}{2}$ 에서만 $y' = 0$을 보이면 (+30점) ▪ $y'' = \dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3} > 0$을 보이면 (+40점) ▪ 답 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 을 구하면 (+10점) [별해2] ▪ $x = \dfrac{1}{2}$ 에서만 $y' = 0$을 보이면 (+30점) ▪ $x < \dfrac{1}{2}$ 이면 $y' < 0$을 보이면 (+20점) ▪ $x > \dfrac{1}{2}$ 이면 $y' > 0$을 보이면 (+20점) ▪ 답 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 을 구하면 (+10점)	80
(2-3)	▪ $\beta = \dfrac{\alpha}{e^{\alpha}-1}$ 를 구하면 (+30점) ▪ $2\alpha+1 > e^{\alpha}$을 얻으면 (+10점) ▪ 왼쪽 그래프로부터 $\alpha < 2$를 보이면 (+40점)	80

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(2-1) 음함수 미분법에 의하여 $y'=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$ 이므로, $x=\dfrac{e+1}{2}$, $y=\dfrac{e-1}{2}$에서 접선의 기울기 $y'=\dfrac{e-1}{e+1}$이다.

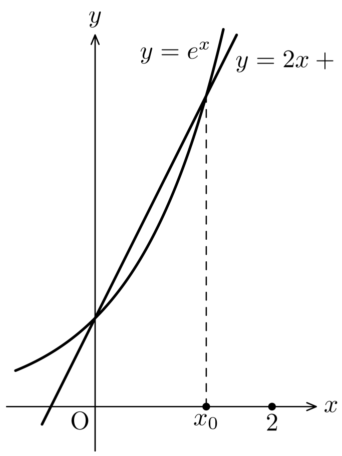
(2-2) $y'=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}=0$이면 $x+y=1$이고 식 $y+\ln(x+y)=x$로부터 $x=y$이다.
따라서 $x=\dfrac{1}{2}$에서만 $y'=0$이다. $y''=\dfrac{(1+y')(x+y+1)-(x+y-1)(1+y')}{(x+y+1)^2}$ 이므로 $x=\dfrac{1}{2}$에서 $y''=\dfrac{1}{2}>0$이고 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

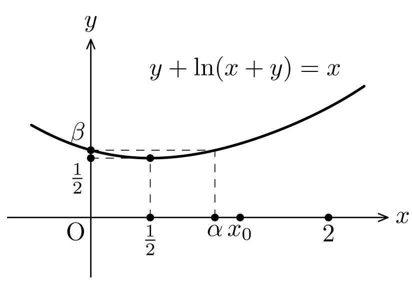
(별해1) $y'=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}=0$이면 $x+y=1$이고 식 $y+\ln(x+y)=x$로부터 $x=y$이다.
따라서 $x=\dfrac{1}{2}$에서만 $y'=0$이다. 또한 $x+y>0$이므로 $y''=\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}>0$이고, 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

(별해2) $y'=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}=0$이면 $x+y=1$이고 식 $y+\ln(x+y)=x$로부터 $x=y$이다. 따라서 $x=\dfrac{1}{2}$에서만 $y'=0$이다. 그리고 $y+\ln(x+y)=x$로부터 $x+y>1$이면 $x>y$을 얻는다.
또한 $y'>0$이면 $x+y>1$이고, 이 때 $x>y$이므로 $x>\dfrac{1}{2}$이다. 그리고 $y'<0$이면 $x+y<1$이고, 이 때 $x<y$이므로 $x<\dfrac{1}{2}$이다. 따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

(2-3) $f(0)=f(\alpha)=\beta$라 놓으면 $\beta+\ln\beta=0$, $\beta+\ln(\alpha+\beta)=\alpha$이고 이로부터 $\alpha=-\ln\beta+\ln(\alpha+\beta)=\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$를 얻고, 이 식을 정리하면 $\beta=\dfrac{\alpha}{e^\alpha-1}$이다. $f(x)$의 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{\alpha}{e^\alpha-1}=\beta=f(0)>\dfrac{1}{2}$을 얻고 이 식을 정리하면 $2\alpha+1>e^\alpha$ 이다. $y=e^x$와 $y=2x+1$의 그래프를 보면 $2x+1>e^x$을 만족시키는 x의 범위는 $0<x<x_0$이다. (여기서 x_0은 $2x_0+1=e^{x_0}$을 만족시킨다.) 따라서 $2\alpha+1>e^\alpha$ 과 $2\times2+1=5<e^2$으로부터 $\alpha<x_0<2$를 얻는다.

[참고]





[문항카드4] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항3

1. 일반 정보

유형	☑논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II
	핵심개념 및 용어	극대, 극소, 미분가능성, 함수의 그래프
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$로 정의할 때 함수 $g(t)$는 다음을 만족시킨다.

(가) $g(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않다.

(나) 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$에 속하는 모든 t에 대하여 $g(t)=7$이다.

(3-1) $f(3)-f(4)$의 값을 구하시오. (80점)

(3-2) $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다. α의 최솟값과 최댓값을 각각 구하시오. (80점)

(3-3) $g(4)=7$일 때 $f(3)$을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

삼차함수의 그래프의 개형과 극댓값, 극솟값 및 미분가능성을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 A-문제3	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	이준열 외	천재교육	2022	48-58
	수학II	홍성복 외	지학사	2022	86-93
기타					

5. 문항 해설

미분가능성 및 극대, 극소의 정의와 삼차함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 찾고 문제를 해결한다.

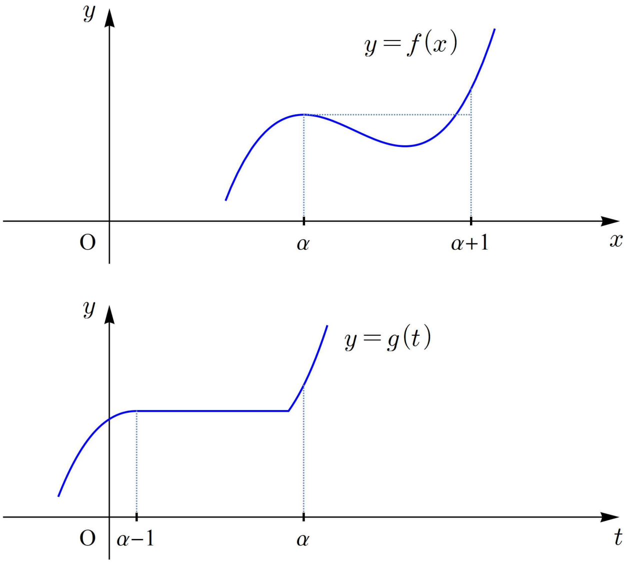
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪ $f(x)$ 가 열린구간 $(3,\ 4)$ 에 속하는 적당한 점에서 극솟값을 가짐을 설명하면 (+40점) ▪ $f(3)=f(4)$ 임을 설명하고 답 $f(3)-f(4)=0$ 을 구하면 (+40점)	80
(3-2)	▪ $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\subset[\alpha-1,\ \alpha]$ (또는) $\alpha\in[0,\ 1]$ 이고 $\alpha\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]$ 임을 설명하면 (+20점) ▪ α 의 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 구하면 (+30점) ▪ α 의 최댓값 1 을 구하면 (+30점)	80
(3-3)	▪ $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)+7$ 로 두면 (+20점) ▪ $\beta=5$ 를 구하면 (+20점) ▪ $\alpha=2-\sqrt{2}$ 를 구하면 (+20점) ▪ $f(3)=1-4\sqrt{2}$ 를 구하면 (+20점)	80

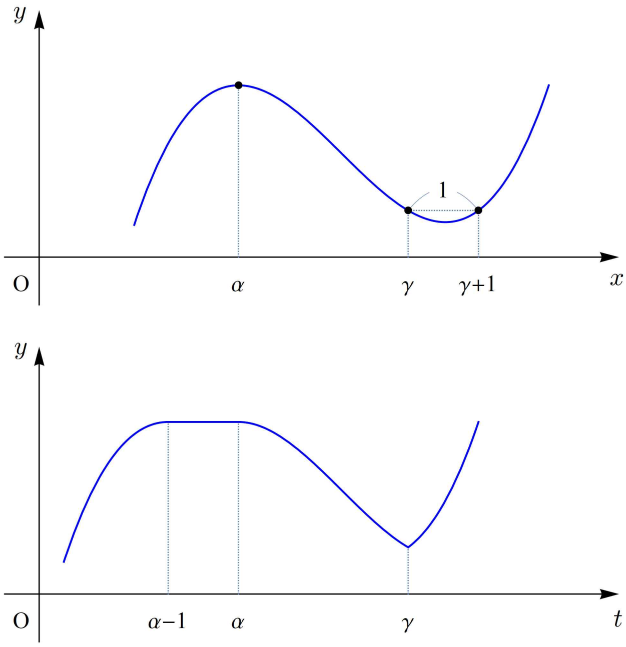
※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(3-1) 구간 $[a,\ a+1]$ 에서 증가하는 경우 $g(a)=f(a+1)$ 이고 감소하는 경우 $g(a)=f(a)$ 이다. 만일 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 갖지 않는 경우에는 $f(x)$ 가 증가함수이므로 $g(t)=f(t+1)$ 이고 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 이 경우 조건 (가)를 만족시키지 못하게 되므로 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 가져야 한다. 만일 함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극댓값을 갖고 $f(\alpha+1)\geq f(\alpha)$이면 다음 그림에 의하여 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



$f(\alpha+1) < f(\alpha)$인 경우 아래 그림의 예처럼 α보다 오른쪽에 있는 적당한 점 $t=\gamma$에서 $g(t)$가 미분불가능 하게 되며, 구간 $[\alpha-1,\ \alpha]$에서는 $g(t)$의 함숫값이 $f(\alpha)$로 일정하다.



이 경우 $t=\alpha-1$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 모두 0이므로 미분가능하다. 마찬가지로 $t=\alpha$에서도 좌미분계수와 우미분계수가 모두 0이므로 미분가능하다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키면서, 동시에 조건 (가)를 만족시키려면, 즉 $g(t)$가 $t=3$에서 미분가능하지 않으려면 열린구간 $(3,\ 4)$에 속하는 적당한 점에서 $f(x)$가 극솟값을 갖고 $f(3)=f(4)$이어야 한다. 따라서 $f(3)-f(4)=0$이다.

(3-2) 조건 (나)에서 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$에 속하는 모든 t에 대하여 $g(t)=7$이므로, (3-1)에서와 같이 생각하면 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값 7을 가져야 하고 $\alpha \le 1$임을 알 수 있다. 그런데 $f(x)$가 극소가 되는 점은 $x=\alpha$에서 거리가 2 이상 떨어져서 오른쪽에 있으므로 구간 $[\alpha-1,\ \alpha]$에 속하는 모든 t에 대하여 $g(t)=7$이다. (위의 그림 참조) 그러므로 $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right] \subset [\alpha-1,\ \alpha]$이어야 한다. 따라서

$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ 임을 알 수 있고, α의 최솟값은 $\frac{1}{2}$, 최댓값은 1이다.

(3-3) (3-1)과 (3-2)의 결과를 이용하면 적당한 상수 α와 β에 대하여 다음과 같이 둘 수 있다.

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)+7 \quad (\text{단, } \tfrac{1}{2} \le \alpha \le 1,\ \beta > 3)$$

그런데 삼차함수 $f(x)$의 개형을 생각하면 적어도 구간 $[4, \infty)$에서는 $f(x)$가 증가해야 하므로 $g(4) = f(5)$이다. 주어진 조건식 $g(4) = 7$을 이용하면

$$7 = g(4) = f(5) = (5-\alpha)^2(5-\beta)+7 \quad (\tfrac{1}{2} \le \alpha \le 1,\ \beta > 3)$$

에서 $\beta = 5$이다. 그러므로 $f(x) = (x-\alpha)^2(x-5)+7$이다. $f(3) = f(4)$임을 다시 이용하면

$$-2(3-\alpha)^2 + 7 = -(4-\alpha)^2 + 7$$

에서 $\alpha = 2 \pm \sqrt{2}$인데 $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$이므로 $\alpha = 2-\sqrt{2}$이다. 따라서

$f(x) = (x-2+\sqrt{2})^2(x-5)+7$이고 $f(3) = 1-4\sqrt{2}$ 이다.

참고: (3-3)에서의 $y = f(x)$와 $y = g(t)$의 그래프는 각각 다음과 같다.