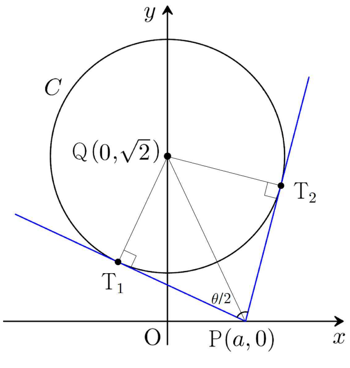
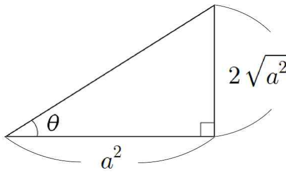
세종대학교 2022학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

문항 (배점)	풀이	배점
1-1 (70점)	원 C의 방정식은 $x^2+y^2-2\sqrt{2}y+1=0$이다. 접선의 방정식을 $y=m(x-a)$라 두면 C의 방정식과 연립하여 $x^2+m^2(x-a)^2-2\sqrt{2}m(x-a)+1=0$ 을 얻는다. $g(x)=(1+m^2)x^2+(-2\sqrt{2}m-2am^2)x+1+2\sqrt{2}am+a^2m^2$ 라 두고, 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 할 때 $D/4=(1-a^2)m^2-2\sqrt{2}am-1=0$ 으로부터 $m_1=\frac{\sqrt{2}a-\sqrt{1+a^2}}{1-a^2}$, $m_2=\frac{\sqrt{2}a+\sqrt{1+a^2}}{1-a^2}$ 을 얻는다. **[다른 풀이]** 접선 $mx-y-ma=0$는 점 $(0,\sqrt{2})$로 부터의 거리가 1이다. 따라서 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 $\left\|\frac{-\sqrt{2}-ma}{\sqrt{m^2+1}}\right\|=1$을 얻는다. 양변을 제곱하여 $m^2+1=a^2m^2+2\sqrt{2}am+2$를 얻고 이는 위의 $D/4=0$과 동등하다.	▪ 연립한 식을 $g(x)$ 형태의 x에 대한 2차식으로 정리하면 (30점) ▪ 판별식 $D=0$(또는 $D/4=0$)을 얻으면 (50점) ▪ m_1과 m_2를 얻으면 (70점) ▪ m_1과 m_2를 바꾸어 적으면 (60점만) [다른 풀이] ▪ $\left\|\frac{-\sqrt{2}-ma}{\sqrt{m^2+1}}\right\|=1$을 얻으면 (30점) ▪ $m^2+1=a^2m^2+2\sqrt{2}am+2$를 얻으면 (50점) ▪ 이후 동일
1-2 (80점)	두 접선 중에서 기울기가 m_1, m_2인 것을 각각 ℓ_1, ℓ_2라 하자. 또한 θ_1과 θ_2를 각각 ℓ_1, ℓ_2가 양의 x축과 이루는 각이라 하면 다음이 성립한다. $\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{2\sqrt{1+a^2}}{a^2}$ **[다른 풀이]** 원의 중심을 Q라 하면 $\angle \mathrm{QPT_1}=\frac{\theta}{2}$이고 $\angle \mathrm{QT_1P}=\frac{\pi}{2}$이다.  PQ= $\sqrt{a^2+2}$이고, $\mathrm{QT_1}=1$이므로, $\mathrm{T_1P}=\sqrt{a^2+1}$이다. 따라서 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$이고, $\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$을 얻는다.	▪ 탄젠트 함수의 덧셈정리를 알고 있으면 (40점) ▪ $\tan\theta=\frac{2\sqrt{1+a^2}}{a^2}$를 얻으면 (80점) ▪ $\tan(\theta_2-\theta_1)$를 대신 계산하여 $-\frac{2\sqrt{1+a^2}}{a^2}$을 얻은 경우 (60점) [다른 풀이] ▪ $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$를 얻으면 (+40점) ▪ 탄젠트 함수의 덧셈정리를 알고 있으면 (+20점) ▪ $\tan\theta=\frac{2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$ (80점)

세종대학교 2022학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

문항 (배점)	풀이	배점
1-3 (80점)	$\tan\theta > 0$이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고 $\cos\theta > 0$이다. 그림과 같이 $\tan\theta = \frac{2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$인 직각삼각형을 생각하면 빗변의 길이가 $\sqrt{a^4+4a^2+4} = a^2+2$ 이므로 $\cos\theta = \frac{a^2}{a^2+2}$이다.  그림을 그리지 않고 $\frac{(a^2+2)^2}{a^4} = 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$임을 이용하여 $\cos\theta = \frac{a^2}{a^2+2}$을 구할 수도 있다. 그러므로 다음을 얻는다. $\lim_{a\to0+}\frac{\cos\theta}{a^2} = \lim_{a\to0+}\frac{1}{a^2+2} = \frac{1}{2}$ **[다른 풀이]** 1-2의 다른 풀이와 같은 방법으로 $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+2}}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}$, $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{a^2}{a^2+2}$을 얻고 $\lim_{a\to0+}\frac{\cos\theta}{a^2} = \frac{1}{2}$을 얻는다.	▪ $\cos\theta > 0$임을 언급하면 (+20점) ▪ $\cos\theta = \frac{a^2}{a^2+2}$을 구하면 (+40점) ▪ $\frac{\cos\theta}{a^2}$의 극한이 $\frac{1}{2}$임을 구하면 (+20점) [다른 풀이] ▪ $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+2}}$ (+20점) ▪ $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}$ (+20점) ▪ $\cos\theta = \frac{a^2}{a^2+2}$ (+20점) ▪ $\frac{\cos\theta}{a^2}$의 극한이 $\frac{1}{2}$임을 구하면 (+20점)
2-1 (70점)	$x < 0$ 일 때 $f(x) = x+k$를 주어진 식에 대입하면 다음 항등식을 얻는다. $x+k = f(x) = \int_0^x \sqrt{k-2}\,dt + x + 2 = (\sqrt{k-2}+1)x + 2 \quad (x < 0)$ 이 식을 만족시키는 상수 k를 구하면 $k=2$이다. **[다른 풀이 1]** 조건 (가)의 식 $f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)-t-2}\,dt + x + 2$에서 $\sqrt{f(t)-t-2}$ 가 계산되려면 다음이 성립해야 함을 알 수 있다. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq x+2$이다. ······ (1) 또한 $x < 0$일 때 $\int_0^x \sqrt{f(t)-t-2}\,dt \leq 0$이므로 다음을 얻는다. $f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)-t-2}\,dt + x + 2 \leq x+2 \ (x < 0)$ ······ (2) (1), (2)로 부터 $x < 0$일 때 $f(x) = x+2$이다. 따라서 $k=2$이다. **[다른 풀이 2]** 조건 (가)를 이용하면 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x) = \sqrt{f(x)-x-2}+1$이다. 그런데 $x < 0$에서 $f'(x) = 1$이므로 $0 = \sqrt{x+k-x-2} = \sqrt{k-2}$ 이다. 따라서 $k=2$이다.	▪ 항등식을 구하면 (+50점) ▪ $k=2$를 구하면 (+20점) [다른 풀이 1] ▪ $f(x) \geq x+2$임을 보이면 (+25점) ▪ $f(x) \leq x+2$임을 보이면 (+25점) ▪ $k=2$를 구하면 (+20점) [다른 풀이 2] ▪ $f'(x) = \sqrt{f(x)-x-2}+1$를 보이면 (+20점) ▪ $x < 0$에서 $f'(x) = 1$임을 언급하면 (+30점) ▪ $k=2$를 구하면 (+20점)

세종대학교 2022학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

문항 (배점)	풀이	배점
2-2 (80점)	조건 (가)를 이용하면 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)=\sqrt{f(x)-x-2}+1 \qquad \cdots\cdots(3)$ $f'(x)-1=\sqrt{f(x)-x-2}$ 이고, 조건 (나)에 의해 모든 실수 $x>2$에 대하여, $f(x)>x+2$이므로 $\dfrac{f'(x)-1}{\sqrt{f(x)-x-2}}=1\,(x>2)$ 이다. $t=f(x)-x-2$라 두고 치환적분법을 이용하여 계산하면 $\displaystyle\int\frac{f'(x)-1}{\sqrt{f(x)-x-2}}dx=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{f(x)-x-2}=x+C\ (x>2)$ 이다. $f(4)=7$임을 이용하면 $C=-2$이고, 양변을 제곱하여 계산하면 $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2+x+2=\frac{1}{4}x^2+3\,(x>2)$이다.	▪ $f'(x)=\sqrt{f(x)-x-2}+1$ 을 구하면 (+10점) ▪ 치환적분법을 이용하여 $2\sqrt{f(x)-x-2}=x+C$ 를 구하면 (+40점) ▪ $C=-2$를 구하면 (+20점) ▪ $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2+x+2$ 또는 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+3$을 구하면 (+10점)
2-3 (80점)	2-1, 2-2의 계산 결과와 함수 f의 연속성에 의해 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\le 0)\\ \frac{1}{4}x^2+3 & (x\ge 2)\end{cases}$ 이므로 $f(0)=2$이고 $f(2)=4$이다. 또한 식 (3)으로부터 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 1$이다. $\cdots(4)$ 만일 $0<x_0<2$이고 $f(x_0)>x_0+2$ 인 x_0이 존재하면 평균값 정리에 의해 $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=\dfrac{4-f(x_0)}{2-x_0}$인 c가 x_0과 2 사이에 존재하게 되는데 $\dfrac{4-f(x_0)}{2-x_0}<\dfrac{4-(x_0+2)}{2-x_0}=\dfrac{2-x_0}{2-x_0}=1$이므로 $f'(c)<1$이어야 한다. 이는 식 (4)에 모순이다. 그러므로 $0<x<2$일 때 $f(x)\le x+2$이다. 따라서 식 (1)에 의해 $f(x)=x+2\ (0<x<2)$ 이다. 결국 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\le 2)\\ \frac{1}{4}x^2+3 & (x\ge 2)\end{cases}$이고 $f(x)$는 문제의 모든 조건을 만족시킨다. 그러므로 $f(1)=3$이다. **[다른 풀이]** 2-1, 2-2의 계산 결과와 함수 f의 연속성을 이용하면 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\le 0)\\ \frac{1}{4}x^2+3 & (x\ge 2)\end{cases}$ 이므로 $f(0)=2$이고 $f(2)=4$이다. $g(x)=f(x)-x-2$라 두면 $g'(x)=\sqrt{f(x)-x-2}\ge 0$ 이므로 $g(x)$는 감소하지 않는다. 그런데 $g(0)=g(2)=0$이므로 $0<x<2$일 때 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x+2\ (0<x<2)$ 이다. 이후의 풀이는 앞에서와 같다.	▪ $f(0)=2$임을 보이면 (+10점) ▪ $f(2)=4$임을 보이면 (+10점) ▪ 평균값 정리를 이용하여 $f(x)\le x+2$를 보이면 (+40점) ▪ $f(1)=3$임을 보이면 (+20점) [다른 풀이] ▪ $f(0)=2$임을 보이면 (+10점) ▪ $f(2)=4$임을 보이면 (+10점) ▪ $0<x<2$일 때 $g(x)=0$임을 보이면 (+40점) ▪ $f(1)=3$임을 보이면 (+20점)

세종대학교 2022학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

문항 (배점)	풀이	배점
3-1 (80점)	$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx$ $= \left[x+\sin\frac{\pi}{2}x\right]_{-1}^{0}$ $=2$ 이다. 따라서 $g(-1)=0$ 이다.	▪ 적분식 $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ $= \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx$ 를 적으면 (+40점) ▪ $1+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$ 의 부정적분인 $x+\sin\frac{\pi}{2}x$ 를 구하면 (+20점) ▪ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 2$임을 보이면 (+20점)
3-2 (80점)	고정된 실수 t에 대하여 $h(u)=\int_{t}^{u} f(x)\,dx$라 정의하면 (i) $h(t)=\int_{t}^{t} f(x)\,dx=0$ 이고 (ii) $\lvert x\rvert>1$ 일 때, $2x^4 \ge x^2+1$이므로 $f(x)\ge 1$ 이다. $\lvert x\rvert \le 1$ 일 때, $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x \ge 0$이므로 $f(x)\ge 1$ 이다. 따라서 $h(t+2)=\int_{t}^{t+2} f(x)\,dx \ge \int_{t}^{t+2} 1\,dx = 2$이다. 함수 $h(u)$는 구간 $[t,t+2]$에서 연속이므로 사잇값 정리에 의해 $h(c)=\int_{t}^{c} f(x)\,dx=2$를 만족시키는 c가 구간 $[t,t+2]$에 존재한다. 즉, $t\le g(t)\le t+2$이다.	▪ $\int_{t}^{t} f(x)\,dx=0$를 기술하면 (+20점) ▪ $\int_{t}^{t+2} f(x)\,dx \ge 2$를 보이면 (+20점) ▪ $\int_{t}^{u} f(x)\,dx$가 변수 u에 대하여 연속함수임을 언급하면 (+20점) ▪ 사잇값 정리를 이용하여 $t\le g(t)\le t+2$를 보이면 (+20점)
3-3 (80점)	3-2에 의해 $t>0$일 때 $1\le \frac{g(t)}{t} \le 1+\frac{2}{t}$가 성립한다. $t\to\infty$일 때의 극한을 생각하면 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t}=1$을 얻는다. $\int_{t}^{g(t)} f(x)\,dx=2$이므로 $t>1$일 때 양변을 미분하면 $g'(t)\frac{2\{g(t)\}^4}{1+\{g(t)\}^2}-\frac{2t^4}{1+t^2}=0$이 된다. 이것을 $g'(t)$에 대하여 풀면 $g'(t)=\left\{\frac{t}{g(t)}\right\}^4\frac{1+\{g(t)\}^2}{1+t^2}=\left\{\frac{1}{\frac{g(t)}{t}}\right\}^4\frac{\frac{1}{t^2}+\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}^2}{\frac{1}{t^2}+1}$ 이다. 따라서 위의 결과를 이용하여 $t\to\infty$일 때의 극한을 계산하면 다음을 얻는다. $\lim_{t\to\infty} g'(t)=1$	▪ $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t}=1$을 보이면 (+10점) ▪ $g'(t)\frac{2\{g(t)\}^4}{1+\{g(t)\}^2}-\frac{2t^4}{1+t^2}=0$을 구하면 (+40점) ▪ $g'(t)=\left\{\frac{t}{g(t)}\right\}^4\frac{1+\{g(t)\}^2}{1+t^2}$을 구하면 (+20점) ▪ 위의 계산을 다하고 $\lim_{t\to\infty} g'(t)=1$을 구하면 (+10점)