세종대학교 2022학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

(1-1) 원 C의 방정식은 $x^2+y^2-2\sqrt{2}y+1=0$이다. 접선의 방정식을 $y=m(x-a)$라 두면 C의 방정식과 연립하여

$$x^2+m^2(x-a)^2-2\sqrt{2}m(x-a)+1=0$$

을 얻는다. $g(x)=(1+m^2)x^2+(-2\sqrt{2}m-2am^2)x+1+2\sqrt{2}am+a^2m^2$라 두고, 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$$D/4=(1-a^2)m^2-2\sqrt{2}am-1=0$$

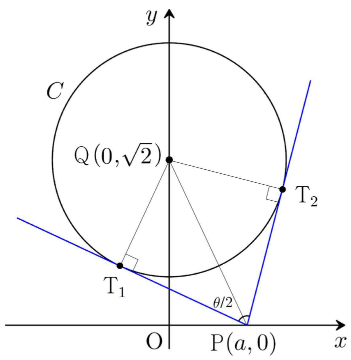
으로부터 $m_1=\dfrac{\sqrt{2}a-\sqrt{1+a^2}}{1-a^2}$, $m_2=\dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{1+a^2}}{1-a^2}$을 얻는다.

[다른 풀이] 접선 $mx-y-ma=0$는 점 $(0,\sqrt{2})$로 부터의 거리가 1이다. 따라서 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 $\left|\dfrac{-\sqrt{2}-ma}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1$을 얻는다. 양변을 제곱하여 $m^2+1=a^2m^2+2\sqrt{2}am+2$를 얻고 이는 위의 $D/4=0$과 동등하다.

(1-2) 두 접선 중에서 기울기가 m_1, m_2인 것을 각각 ℓ_1, ℓ_2라 하자. 또한 θ_1과 θ_2를 각각 ℓ_1, ℓ_2가 양의 x축과 이루는 각이라 하면 다음이 성립한다.

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{2\sqrt{1+a^2}}{a^2}$$

[다른 풀이] 원의 중심을 Q라 하면 $\angle \mathrm{QPT_1}=\dfrac{\theta}{2}$이고 $\angle \mathrm{QT_1P}=\dfrac{\pi}{2}$ 이다.

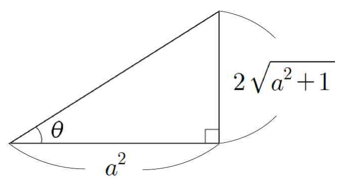


$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2+2}$ 이고, $\mathrm{QT_1}=1$이므로, $\mathrm{T_1P}=\sqrt{a^2+1}$ 이다. 따라서 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$이고,

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$$ 을 얻는다.

(1-3) $\tan\theta>0$이므로 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\cos\theta>0$이다. 그림과 같이 $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$인 직각삼각형을 생각하면

빗변의 길이가 $\sqrt{a^4+4a^2+4}=a^2+2$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{a^2}{a^2+2}$이다.



세종대학교 2022학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

그림을 그리지 않고 $\dfrac{(a^2+2)^2}{a^4}=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ 임을 이용하여 $\cos\theta=\dfrac{a^2}{a^2+2}$ 을 구할 수도 있다.

그러므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{a\to 0+}\frac{\cos\theta}{a^2}=\lim_{a\to 0+}\frac{1}{a^2+2}=\frac{1}{2}$$

[다른 풀이] 1-2의 다른 풀이와 같은 방법으로 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+2}}$, $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+2}}$,

$\cos\theta=\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{a^2}{a^2+2}$ 을 얻고 $\displaystyle\lim_{a\to 0+}\frac{\cos\theta}{a^2}=\frac{1}{2}$ 을 얻는다.

(2-1) $x<0$ 일 때 $f(x)=x+k$ 를 주어진 식에 대입하면 다음 항등식을 얻는다.

$$x+k=f(x)=\int_0^x\sqrt{k-2}\,dt+x+2=(\sqrt{k-2}+1)x+2\ \ (x<0)$$

이 식을 만족시키는 상수 k 를 구하면 $k=2$ 이다.

[다른 풀이 1] 조건 (가)의 식 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{f(t)-t-2}\,dt+x+2$ 에서 $\sqrt{f(t)-t-2}$ 가 계산되려면 다음이 성립해야 함을 알 수 있다.

임의의 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq x+2$ 이다. $\cdots\cdots(1)$

또한 $x<0$ 일 때 $\displaystyle\int_0^x\sqrt{f(t)-t-2}\,dt\leq 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$f(x)=\int_0^x\sqrt{f(t)-t-2}\,dt+x+2\leq x+2\ (x<0)\qquad\cdots\cdots(2)$$

(1), (2)로 부터 $x<0$ 일 때 $f(x)=x+2$ 이다. 따라서 $k=2$ 이다.

[다른 풀이 2] 조건 (가)를 이용하면 임의의 실수 x 에 대하여 $f'(x)=\sqrt{f(x)-x-2}+1$ 이다. 그런데 $x<0$ 에서 $f'(x)=1$ 이므로 $0=\sqrt{x+k-x-2}=\sqrt{k-2}$ 이다. 따라서 $k=2$ 이다.

(2-2) 조건 (가)를 이용하면 임의의 실수 x 에 대하여

$$f'(x)=\sqrt{f(x)-x-2}+1\qquad\cdots\cdots(3)$$

$$f'(x)-1=\sqrt{f(x)-x-2}$$

이고, 조건 (나)에 의해 모든 실수 $x>2$ 에 대하여, $f(x)>x+2$ 이므로

$$\frac{f'(x)-1}{\sqrt{f(x)-x-2}}=1\ (x>2)$$

이다. $t=f(x)-x-2$ 라 두고 치환적분법을 이용하여 계산하면

$$\int\frac{f'(x)-1}{\sqrt{f(x)-x-2}}\,dx=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{f(x)-x-2}=x+C\ (x>2)$$

이다. $f(4)=7$ 임을 이용하면 $C=-2$ 이고, 양변을 제곱하여 계산하면

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x-2)^2+x+2=\dfrac{1}{4}x^2+3\ (x>2)$ 이다.

(2-3) 2-1, 2-2의 계산 결과와 함수 f 의 연속성에 의해 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\leq 0)\\ \dfrac{1}{4}x^2+3 & (x\geq 2)\end{cases}$ 이므로 $f(0)=2$ 이고

$f(2)=4$ 이다.

또한 식 (3)으로부터 임의의 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 1$ 이다. $\cdots(4)$

만일 $0<x_0<2$ 이고 $f(x_0)>x_0+2$ 인 x_0 이 존재하면 평균값 정리에 의해 $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=\dfrac{4-f(x_0)}{2-x_0}$ 인

세종대학교 2022학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

c가 x_0과 2 사이에 존재하게 되는데 $\dfrac{4-f(x_0)}{2-x_0} < \dfrac{4-(x_0+2)}{2-x_0} = \dfrac{2-x_0}{2-x_0} = 1$이므로 $f'(c) < 1$이어야 한다. 이는 식 (4)에 모순이다. 그러므로 $0<x<2$일 때 $f(x) \le x+2$이다. 따라서 식 (1)에 의해 $f(x)=x+2 \ (0<x<2)$ 이다.
결국 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 2) \\ \frac{1}{4}x^2+3 & (x \ge 2) \end{cases}$이고 $f(x)$는 문제의 모든 조건을 만족시킨다. 그러므로 $f(1)=3$이다.

[다른 풀이] 2-1, 2-2의 계산 결과와 함수 f의 연속성을 이용하면 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ \frac{1}{4}x^2+3 & (x \ge 2) \end{cases}$ 이므로 $f(0)=2$이고 $f(2)=4$이다. $g(x)=f(x)-x-2$라 두면 $g'(x)=\sqrt{f(x)-x-2} \ge 0$ 이므로 $g(x)$는 감소하지 않는다. 그런데 $g(0)=g(2)=0$이므로 $0<x<2$일 때 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x+2 \ (0<x<2)$ 이다. 이후의 풀이는 앞에서와 같다.

(3-1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[x+\sin\frac{\pi}{2}x\right]_{-1}^{0} = 2$이다. 따라서 $g(-1)=0$이다.

(3-2) 고정된 실수 t에 대하여 $h(u)=\displaystyle\int_t^u f(x)\,dx$라 정의하면

(i) $h(t)=\displaystyle\int_t^t f(x)\,dx = 0$이고

(ii) $|x|>1$일 때, $2x^4 \ge x^2+1$이므로 $f(x) \ge 1$이다.

$|x| \le 1$일 때, $\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x \ge 0$이므로 $f(x) \ge 1$이다.

따라서 $h(t+2)=\displaystyle\int_t^{t+2} f(x)\,dx \ge \int_t^{t+2} 1\,dx = 2$이다. 함수 $h(u)$는 구간 $[t, t+2]$에서 연속이므로 사잇값 정리에 의해 $h(c)=\displaystyle\int_t^c f(x)\,dx = 2$를 만족시키는 c가 구간 $[t, t+2]$에 존재한다. 즉, $t \le g(t) \le t+2$이다.

(3-3) 3-2에 의해 $t>0$일 때 $1 \le \dfrac{g(t)}{t} \le 1+\dfrac{2}{t}$가 성립한다. $t\to\infty$일 때의 극한을 생각하면 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t}=1$을 얻는다. $\displaystyle\int_t^{g(t)} f(x)\,dx = 2$이므로 $t>1$일 때 양변을 미분하면
$g'(t)\dfrac{2\{g(t)\}^4}{1+\{g(t)\}^2} - \dfrac{2t^4}{1+t^2} = 0$이 된다. 이것을 $g'(t)$에 대하여 풀면
$g'(t)=\left\{\dfrac{t}{g(t)}\right\}^4 \dfrac{1+\{g(t)\}^2}{1+t^2} = \left\{\dfrac{1}{\frac{g(t)}{t}}\right\}^4 \dfrac{\frac{1}{t^2}+\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}^2}{\frac{1}{t^2}+1}$ 이다. 따라서 위의 결과를 이용하여 $t\to\infty$일 때의 극한을 계산하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{t\to\infty} g'(t) = 1$$