[문항카드9] 논술 우수자 전형 : 자연계열C-문항1

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(C형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	치환적분법, 부분적분법, 역함수의 미분법
예상 소요 시간	36분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=2e^{x}-e^{-x}$에 대하여 다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재함을 보이시오. (70점)

(1-2) 함수 $F(x)=\int_{0}^{x} tf^{-1}(t)\,dt$는 $x=1$에서 극솟값을 가짐을 보이시오. (80점)

(1-3) $F(1)$의 값을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

부분적분법과 치환적분법을 이용하여 문제를 풀 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열C -문제1	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준·성취수준	미적분 (3)적분법 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 (2)미분법 2 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2019	144~149
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	89~90, 132-139
기타					

5. 문항 해설

부분적분법과 치환적분법 및 적분과 미분의 관계식을 이용하여 함수의 극솟값을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪ $f'(x)=2e^{x}+e^{-x}>0$을 보이면 (+40점) ▪ "$y=f(x)$는 일대일대응(또는 일대일함수 또는 증가함수)이므로 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다"를 서술하면 (+30점) **[별해]** ▪ 역함수 $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+8}}{4}$을 구하면 (70점)	70
(1-2)	▪ $f^{-1}(1)=0$을 보이면 (+20점) ▪ $F'(1)=f^{-1}(1)=0$을 보이면 (+20점) ▪ $F''(x)=f^{-1}(x)+\dfrac{x}{f'(f^{-1}(x))}$를 구하면 (+20점) ▪ $F''(1)=f^{-1}(1)+\dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\dfrac{1}{3}>0$을 보이면 (+20점) **[별해]** ▪ $f^{-1}(1)=0$을 보이면 (+20점) ▪ $F'(1)=f^{-1}(1)=0$을 보이면 (+20점) ▪ $0<x<1$이면 $F'(x)=xf^{-1}(x)<0$을 보이면 (+20점) ▪ $x>1$이면 $F'(x)=xf^{-1}(x)>0$을 보이면 (+20점)	80
(1-3)	▪ $\int_0^1 xf^{-1}(x)dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2f^{-1}(x)\right]_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{2}x^2\{f^{-1}(x)\}'dx$ $=-\int_0^1\dfrac{1}{2}x^2\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,dx$ 를 보이면 (+20점) ▪ $-\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\dfrac{1}{2}(2e^{t}-e^{-t})^2dt$를 보이면 (+30점) ▪ 답 $\ln2-\dfrac{3}{4}$을 구하면 (+30점) **[별해]** ▪ $\int_0^1 xf^{-1}(x)dx\equiv\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}f(t)tf'(t)dt=\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}t(2e^{t}-e^{-t})(2e^{t}+e^{-t})dt$ 를 구하면 (+30점) ▪ 답 $\ln2-\dfrac{3}{4}$을 구하면 (+50점)	80

7. 예시 답안

(1-1) $f'(x)=2e^x+e^{-x}>0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이다. 따라서 $y=f(x)$는 일대일대응이다. 그러므로 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다.

[별해] 역함수 $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+8}}{4}$ 을 직접 구한다.

(1-2) $f^{-1}(1)=a$라 하면 $1=f(a)=2e^a-e^{-a}$이다.
$e^a=A$라 놓으면 $0=2A^2-A-1=(A-1)(2A+1)$로부터 $1=A=e^a$이고 $a=0$이다.
$F'(x)=xf^{-1}(x)$로부터 $F'(1)=f^{-1}(1)=0$이다.

$$F''(x)=f^{-1}(x)+x\{f^{-1}(x)\}'=f^{-1}(x)+\frac{x}{f'(f^{-1}(x))}$$ 이므로

$$F''(1)=f^{-1}(1)+\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\frac{1}{3}>0$$ 이다. 따라서 $F(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

[별해] $f(0)=1$로부터, $f^{-1}(1)=0$이다. $F'(x)=xf^{-1}(x)$로부터 $F'(1)=f^{-1}(1)=0$이다.
$f^{-1}(x)$는 증가함수이고 $f^{-1}(1)=0$이므로, $x<1$이면 $f^{-1}(x)<0$이고, $x>1$이면 $f^{-1}(x)>0$이다.
따라서 $0<x<1$이면 $F'(x)=xf^{-1}(x)<0$, $x>1$이면 $F'(x)=xf^{-1}(x)>0$이므로
$F(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가진다.

(1-3) $f^{-1}(0)=a$라 하면 $0=f(a)=2e^a-e^{-a}$이다. $e^a=A$라 놓으면 $0=2A^2-1$로부터
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=A=e^a$이고 $a=\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

$$\int_0^1 xf^{-1}(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2f^{-1}(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\{f^{-1}(x)\}'dx=-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,dx$$

$(t=f^{-1}(x)$로 치환, $x=f(t)$, $dx=f'(t)dt)$

$$=-\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(1)}\frac{1}{2}\{f(t)\}^2\frac{1}{f'(t)}f'(t)dt=-\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(1)}\frac{1}{2}(2e^t-e^{-t})^2dt=-\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\frac{1}{2}(2e^t-e^{-t})^2dt=\ln2-\frac{3}{4}$$

[별해] $f^{-1}(0)=a$라 하면 $0=f(a)=2e^a-e^{-a}$이다. $e^a=A$라 놓으면 $0=2A^2-1$로부터
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=A=e^a$이고 $a=\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

$t=f^{-1}(x)$로 치환하면 $x=f(t),dx=f'(t)dt$이므로

$$\int_0^1 xf^{-1}(x)dx=\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}f(t)tf'(t)dt=\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}t(2e^t-e^{-t})(2e^t+e^{-t})dt=\ln2-\frac{3}{4}$$

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
1번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.

2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
1번 문항은 지수함수를 미분하고 정적분을 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 미분과 적분 전반적인 개념을 알고 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.

3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.

4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.

5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 여러 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.

6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (1-1) 하, (1-2) 중, (1-3) 중 (1-1) 문항은 미분을 이용하여 역함수가 존재할 조건을 구할 수 있는가를 평가하며 (1-2)와 (1-3)에서는 여러 가지 함수를 미분하고 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가한다. 문항 전반적인 난이도는 중으로 판단되며 학생들이 미적분 교과를 잘 공부한 학생이면 쉽게 풀어낼 수 있을 것으로 생각됨. 기본 개념과 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항을 평가되며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.

[문항카드10] 논술 우수자 전형 : 자연계열C-문항2

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(C형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	삼각함수, 함수의 극한, 정적분
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제2] 시각 $t>0$에서 함수 $f(x)$를 모든 실수 x에 대하여 다음과 같이 정의하자.

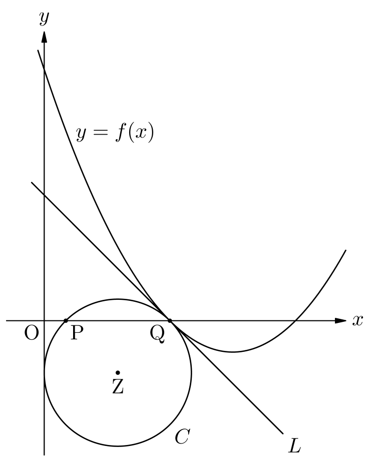
$$f(x)=t(x-t)(x-t-1)$$

점 $\mathrm{Q}(t,0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선을 L이라 하자.
중심 Z가 제4사분면에 있는 원 C는 y축에 접하며 점 Q에서 직선 L에도 접한다.

(2-1) 시각 t에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 L 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 t에 대한 식으로 나타내시오. (70점)

(2-2) 시각 t에서 원 C의 중심 Z의 좌표를 $(a(t),b(t))$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)}$ 을 구하시오. (80점)

(2-3) 시각 t에서 원 C가 x축과 만나는 점 중에서 Q가 아닌 점을 P라 하고, $\angle\mathrm{PZQ}$를 θ라 하자. 시각 t_1, t_2 $(0<t_1<t_2)$에서 $\sin\theta$의 값이 같고, $t_1+t_2=14$일 때 t_1의 값을 구하시오. (80점)



3. 출제 의도

삼각함수의 덧셈정리, 함수의 극한, 정적분, 원과 직선의 위치 관계 등을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">자연계열C
-문제2</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>수학II (1) 함수의 극한과 연속 [1] 함수의 극한
[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
미적분 (2) 미분법 [1] 여러 가지 함수의 미분
[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
미적분 (2) 미분법 [3] 도함수의 활용
[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
미적분 (3) 적분법 [2] 정적분의 활용
[12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

<table>
<tr><th>참고자료</th><th>도서명</th><th>저자</th><th>발행처</th><th>발행 연도</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td rowspan="2">고등학교
교과서</td><td>수학II</td><td>황선욱 외</td><td>동아출판</td><td>2019</td><td>11~18</td></tr>
<tr><td>미적분</td><td>이준열 외</td><td>천재교육</td><td>2019</td><td>65~70,
168~171</td></tr>
<tr><td>기타</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5. 문항 해설

접선의 방정식, 정적분, 원과 직선의 위치관계, 삼각함수 덧셈정리, 미분계수 등을 활용하여, 도형의 넓이, 함수의 극한 등을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	▪ $f'(x)=t(2x-2t-1)$ (+10점) ▪ $y=-t(x-t)$ (+20점) ▪ 도형의 넓이 $=\frac{t^4}{3}$ (+40점)	70
(2-2)	▪ $a(t)=t\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$ 또는 $b(t)=-t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$를 구하면 (+40점) ▪ $\frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)}=\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)}$ (+20점) ▪ $\lim_{t\to\infty}\frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)}=\frac{1}{2}$ (+20점)	80
(2-3)	▪ $\sin\theta=\frac{2t}{t^2+1}$ (+40점) ▪ $t_1t_2=1$ (+30점) ▪ $t_1=7-4\sqrt{3}$ (+10점)	80

7. 예시 답안

(2-1) $f'(x) = t(2x-2t-1)$이므로, $f'(t) = -t$이다. 따라서 직선 L의 방정식은 $y = -t(x-t)$이고,

구하는 도형의 넓이는 $\int_0^t \{t(x-t)(x-t-1)+t(x-t)\}\,dx = \frac{t^4}{3}$이다.

(2-2) $f'(t) = -t$이므로, 점 Q에서 직선 L에 수직인 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{t}(x-t)$,

즉 $x = ty+t$이다.

원 C가 점 $\mathrm{Q}(t,0)$을 지나고, 중심이 이 직선 상에 있으므로, 다음 두 식이 성립한다.

$$(t-a)^2+b^2 = a^2, \quad a = t(b+1)$$

이 식을 풀면, $b(t) = -t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$, $a(t) = t\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}-t\right) = -\sqrt{t^2+1}\,b(t)$이다.

$\frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)}$ 이 되므로, $\lim_{t\to\infty}\frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)} = \frac{1}{2}$이다.

(2-3) 시각 t에서 $\mathrm{H} = (a,0)$이라 하면

$\angle \mathrm{PZH} = \frac{\theta}{2}$이다. $\overline{\mathrm{ZP}} = a$, $\overline{\mathrm{ZH}} = -b$이므로, $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

$0<\theta<\pi$이므로 $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

따라서, 시각 t에서 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2t}{t^2+1}$이다.

시각 t_1, t_2 $(0<t_1<t_2)$에서 $\sin\theta$의 값이 동일하므로, $\frac{2t_1}{t_1^2+1} = \frac{2t_2}{t_2^2+1}$가 성립하고,

이 식으로부터 $t_1t_2 = 1$이 나온다.

그런데 $t_1+t_2 = 14$이므로, t_1, t_2는 $t^2-14t+1=0$의 해가 되어, $t_1 = 7-4\sqrt{3}$이다.

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
2번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고 함수의 극한 값을 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
2번 문항은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가와 주어진 조건을 만족하는 식을 구하고 극한값을 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음. `
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점 기준은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 점수 배점이 되었음. 각 문항별로 학생들의 수학 수준을 평가하기 적절하게 부분점수 배점하여 변별력이 있음.
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하여 나타내었으며 학생들이 이해하기 쉽게 풀이를 제시하였음.
6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (2-1) 중, (2-2) 상, (2-3) 중 2번 문항은 미적분 교과에서 곡선으로 둘러싸인 넓이를 구할 수 있는가를 평가하며 수학Ⅱ 교과에서 함수의 극한, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 제시된 문항을 해결할 수 있는가를 평가한다. 전체적인 문항 난이도는 중으로 판단되며 수학Ⅱ와 미적분 교과를 공부하면서 비슷한 유형의 문제를 풀어본 학생들은 잘 풀어낼 수 있을 것으로 생각됨. 개념을 잘 알고 있는지와 복잡한 연산을 간단히 정리할 수 있는가를 평가하기에 적절한 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.

[문항카드11] 논술 우수자 전형 : 자연계열C-문항3

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목)/
문항 번호</td><td colspan="2">자연계(C형) / 문제 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정
과목명</td><td>수학Ⅱ, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>접선의 방정식, 미분계수, 적분과 미분의 관계,
곡선의 길이</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">40분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제 3] $x \geq 0$에서 연속인 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$에서 $f(x)$는 두 번 미분가능하고 $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$이다. (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이 점 $\mathrm{A}(0, -\sqrt{2})$를 지난다. (단, $a>0$)

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\sqrt{2}$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2a$로 둘러싸인 도형을 S라 하자. 도형 S에서 점 A와 점 $(x, f(x))$ $(0 \leq x \leq 2a)$를 잇는 가장 짧은 경로의 길이를 $\ell(x)$라 하자.

(3-1) $x=a$에서 $\ell(x)$가 미분가능함을 보이시오. (80점)

(3-2) $\ell(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+\dfrac{5}{3}$일 때 접점 $(a, f(a))$를 구하시오. (80점)

(3-3) (3-2)의 $\ell(x)$에 대하여 $f(x)$ $(0 \leq x \leq 2a)$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

곡선의 길이와 미분과 적분의 관계 등을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열 C-문제3	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준·성취수준	수학Ⅱ (2) 미분 ① 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 미분 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 수학Ⅱ (2) 미분 ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	97, 163~164
	수학II	박교식 외	동아출판	2020	53~59, 73, 130
기타					

5. 문항 해설

문제의 조건에 부합하는 길이 함수를 찾고, 길이 함수의 미분계수를 구하여 주어진 함수를 찾는다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	■ $\ell(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+\left(f(x)+\sqrt{2}\right)^2} & (0\le x\le a)\\ \sqrt{a^2+\left(f(a)+\sqrt{2}\right)^2}+\int_a^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt & (a<x\le 2a)\end{cases}$ 를 구하면 (+40점) ■ $-af'(a)+f(a)=-\sqrt{2}$ 또는 이와 동등한 관계를 얻으면 (+20점) ■ 좌우의 미분계수를 나누어 생각하여 각각 $\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}$ 임을 얻어 $x=a$에서 미분가능함을 보이면 (+20점)	80
(3-2)	■ $\ell(a)=a\ell'(a)$를 얻으면 (+50점) ■ $a=1$ (+20점) ■ $f(1)=\sqrt{2}$ 또는 접점 $(1,\sqrt{2})$를 쓰면 (+10점) **[별해]** ■ $f'(a)=(1+a)\sqrt{a^2+2a-1}$ 을 얻으면 (+30점) ■ $\{\ell(a)\}^2=a^2+\left\{a(1+a)\sqrt{a^2+2a-1}\right\}^2$ (+10점) ■ $\{\ell(a)\}^2=\left(\dfrac{a^3}{3}+a^2+\dfrac{5}{3}\right)^2$ (+10점) ■ $a=1$ (+20점) ■ $f(1)=\sqrt{2}$ 또는 접점 $(1,\sqrt{2})$를 쓰면 (+10점)	80
(3-3)	다음과 같이 $1\le x\le 2$인 경우 50점, $0\le x\le 1$인 경우 30점으로 채점하여 합산한다. ($1\le x\le 2$인 경우) ■ $f'(x)=(1+x)\sqrt{x^2+2x-1}$ 을 얻으면 (+10점) ■ $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)^{3/2}+C$ 를 얻으면 (+30점) ■ $C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 를 얻으면 (+10점) ($0\le x\le 1$인 경우) ■ $\ell(x)=\sqrt{x^2+\{f(x)+\sqrt{2}\}^2}=\dfrac{x^3}{3}+x^2+\dfrac{5}{3}$ 를 얻으면 (+20점) ■ $f(x)=\left\{\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2+\dfrac{5}{3}\right)^2-x^2\right\}^{1/2}-\sqrt{2}$ 를 얻으면 (+10점)	80

7. 예시 답안

(3-1) $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 문제의 조건에 부합하는 가장 짧은 경로는 $0 \le x \le a$일 때는 A와 $(x, f(x))$를 잇는 선분이며, $a < x \le 2a$일 때는 A와 $(a, f(a))$를 선분으로 연결한 후 곡선 $y=f(x)$를 따라 이동해야 한다. 따라서 $\ell(x)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\ell(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+\{f(x)+\sqrt{2}\}^2} & (0 \le x \le a) \\ \sqrt{a^2+\{f(a)+\sqrt{2}\}^2}+\int_a^x \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt & (a < x \le 2a) \end{cases}$$

점 $(a, f(a))$에서 $y=f(x)$에 접하는 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이므로 접선이 A를 지나기 위해서는 $-af'(a)+f(a)=-\sqrt{2}$이다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{\ell(a+h)-\ell(a)}{h}=\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}$이고

$\lim_{h\to 0-}\frac{\ell(a+h)-\ell(a)}{h}=\frac{1}{2}\frac{2a+2\{f(a)+\sqrt{2}\}f'(a)}{\sqrt{a^2+\{f(a)+\sqrt{2}\}^2}}=\frac{a+a\{f'(a)\}^2}{\sqrt{a^2+a^2\{f'(a)\}^2}}=\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}$ 이므로

$\ell(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $\ell'(a)=\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}$이다.

(3-2) $\ell(a)=\sqrt{a^2+\{f(a)+\sqrt{2}\}^2}=\sqrt{a^2+\{af'(a)\}^2}=a\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}=a\ell'(a)$이다.

따라서 $\frac{a^3}{3}+a^2+\frac{5}{3}=\ell(a)=a\ell'(a)=a(a^2+2a)$이다.

따라서 $\frac{1}{3}(2a^3+3a^2-5)=\frac{1}{3}(a-1)(2a^2+5a+5)=0$를 얻고,

$a=1$이다.

그런데 $\ell(1)=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}=3=\sqrt{1+\{f(1)+\sqrt{2}\}^2}$ 이므로

$f(1)=\sqrt{2}$이고 접점은 $(1, \sqrt{2})$이다.

[별해] 다음과 같이 보다 직접적인 계산으로 $a=1$을 얻을 수도 있다:

$\ell'(a)=\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}=a^2+2a$이므로

$\{f'(a)\}^2=(a^2+2a)^2-1=(a+1)^2(a^2+2a-1)$이다.

따라서 $f'(a)=(1+a)\sqrt{a^2+2a-1}$이고,

$\{\ell(a)\}^2=a^2+\{f(a)+\sqrt{2}\}^2=a^2+\{af'(a)\}^2=a^2+\{a(1+a)\sqrt{a^2+2a-1}\}^2$이다.

또한 주어진 $\ell(a)=\frac{a^3}{3}+a^2+\frac{5}{3}$ 으로부터 $\{\ell(a)\}^2=\left(\frac{a^3}{3}+a^2+\frac{5}{3}\right)^2$을 얻는다.

따라서 $a^2+\{a(1+a)\sqrt{a^2+2a-1}\}^2=\left(\frac{a^3}{3}+a^2+\frac{5}{3}\right)^2$이다.

$h(a)=a^2+\{a(1+a)\sqrt{a^2+2a-1}\}^2-\left(\frac{a^3}{3}+a^2+\frac{5}{3}\right)^2$이라 하면

$h(a)=\frac{1}{9}(a-1)(8a^5+38a^4+65a^3+55a^2+25a+25)$이고, $a>0$이므로 $h(a)=0$인 a는

$a=1$ 뿐이다.

그런데 $\ell(1)=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}=3=\sqrt{1+\{f(1)+\sqrt{2}\}^2}$ 이므로

$f(1)=\sqrt{2}$이고 접점은 $(1, \sqrt{2})$이다.

(3-3) ($1 \le x \le 2$인 경우)

$\ell'(x) = \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = x^2+2x$이므로

$\{f'(x)\}^2 = (x^2+2x)^2-1 = (x+1)^2(x^2+2x-1)$이다. 그런데 $f'(x)>0$이므로

$f'(x) = (1+x)\sqrt{x^2+2x-1}$ 이다.

$f'(x)$를 적분하여 $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x-1)^{3/2}+C$를 얻는다.

그런데 $f(1)=\sqrt{2}$ 이므로 $C = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이다.

($0 \le x \le 1$인 경우)

$\ell(x) = \sqrt{x^2+\{f(x)+\sqrt{2}\}^2} = \frac{x^3}{3}+x^2+\frac{5}{3}$ 이다. 따라서

$\{f(x)+\sqrt{2}\}^2 = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{5}{3}\right)^2-x^2$ 인데 $f(x)>0$이므로

$f(x) = \left\{\left(\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{5}{3}\right)^2-x^2\right\}^{1/2}-\sqrt{2}$ 이다.

정리하면 $f(x)$는 다음과 같고 문제의 조건을 모두 만족시킨다.

$$f(x) = \begin{cases} \left\{\left(\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{5}{3}\right)^2-x^2\right\}^{1/2}-\sqrt{2} & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{3}(x^2+2x-1)^{3/2}+\frac{\sqrt{2}}{3} & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
3번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 곡선의 길이를 구할 수 있는가와 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
3번 문항은 곡선의 길이를 구할 수 있는가와 주어진 조건을 만족하는 함수를 정의할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점 기준은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 점수 배점이 되었음. 각 문항별로 학생들의 수학 수준을 평가하기 적절하게 부분점수 배점하여 변별력이 있음.
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하여 나타내었으며 학생들이 이해하기 쉽게 풀이를 제시하였음. 별해(다른풀이)를 제시하여 풀이의 이해를 높임.
6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (3-1) 상, (3-2) 상, (3-3) 상 제시문에서 가장 짧은 곡선이 변곡점 이전에는 직선의 거리가 되며, 변곡점 이후에는 변곡점까지 직선이고 그 이후 곡선의 길이를 따라가야 함을 찾아낼 수 있는 것이 문제풀이의 핵심 아이디어이다. (3-1) 문항이 어렵기에 전체적인 난이도는 상으로 판단되며 (3-1) 문항을 해결한다면 연결문제인 (3-2), (3-3) 풀이를 잘 해낼 것으로 생각됨. 학생들의 문제해결력과 창의력을 평가하기에 적절한 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제되었음.