[문항카드6] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항1

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호</td><td colspan="2">자연계열(B형) / 문제 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>삼각함수, 함수의 극한, 미분계수</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">35분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제1] 아래 그림에 있는 삼각형 ABC는 시각 $t \geq 0$에 따라 크기가 변하며, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 시각 $t=0$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=1$이다.

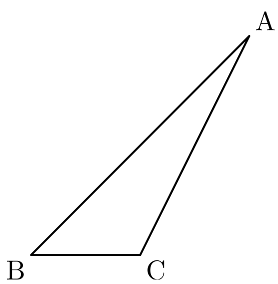
(나) 임의의 시각 $t \geq 0$에서 $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{4}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:2\sqrt{2}$이다.

(다) 임의의 시각 $t>0$에서 삼각형 ABC의 넓이의 순간변화율은 $\frac{4}{3}t+6$이다.

(1-1) $\sin C$를 구하시오. (70점)

(1-2) 시각 t에서 선분 BC의 길이를 $\ell(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{\ell(t)}{t}$의 값을 구하시오. (80점)

(1-3) 삼각형 ABC의 외심을 Z라 하자. 선분 BC의 길이가 5일 때, 사각형 ZBCA의 넓이의 순간변화율을 구하시오. (80점)



3. 출제 의도

삼각함수, 함수의 극한, 미분계수에 관한 개념과 성질을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열B -문제1	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준· 성취수준	수학Ⅰ(2) 삼각함수 $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학II (1) 함수의 극한과 연속 $\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 수학II (2) 미분 $\boxed{1}$ 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	권오남 외	교학사	2019	97~104
	수학II	박교식 외	동아출판	2019	11~18, 53~59
기타					

5. 문항 해설

시간에 따라 크기가 변하는 삼각형이 있을 때, 사인법칙, 코사인법칙, 미분계수, 함수의 극한 등을 활용하여, 주어진 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{5}$ (+35점) ▪ $\sin\mathrm{C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (+35점) **[별해]** ❖ k는 다른 기호 사용 가능 ▪ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{5}\mathrm{k}$ (+35점) ▪ $\sin\mathrm{C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (+35점)	70
(1-2)	▪ $S(t) = \{\ell(t)\}^2$ 또는 $S(t) = \frac{2}{3}t^2 + 6t + 1$ (+20점) ▪ $\ell(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^2 + 6t + 1}$ (+30점) ▪ $\lim_{t \to \infty}\frac{\ell(t)}{t} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (+30점)	80
(1-3)	▪ $T(t) = 2S(t)$, $T(t) = 2\{\ell(t)\}^2$ 또는 $T(t) = \frac{4}{3}t^2 + 12t + 2$ (+40점) ▪ $\ell(t) = 5$이면 $t = 3$ (+20점) ▪ $T'(3) = 20$ (+20점)	80

7. 예시 답안

(1-1) 시각 $t=0$에서 코사인법칙을 사용하면 $\overline{\mathrm{AC}}^2=1^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot1\cdot2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=5$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{5}$이다. 사인법칙에 의해 $\frac{\sin\mathrm{C}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{5}}$ 이므로, $\sin\mathrm{C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

(1-2) 시각 t에서 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라고 하면, 조건으로부터 $S'(t)=\frac{4}{3}t+6$이므로

$S(t)=\frac{2}{3}t^2+6t+K$ (K는 실수)이다. 조건에 의해 $S(0)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=1$이므로 $K=1$이고

$S(t)=\frac{2}{3}t^2+6t+1$이 된다.

한편 $S(t)=\frac{1}{2}\cdot\ell(t)\cdot2\sqrt{2}\,\ell(t)\sin\frac{\pi}{4}=\{\ell(t)\}^2$이므로, $\ell(t)=\sqrt{\frac{2}{3}t^2+6t+1}$ 이고

$\frac{\ell(t)}{t}=\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{6}{t}+\frac{1}{t^2}}$ 이다. 따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{\ell(t)}{t}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

(1-3) 삼각형 ABC에 대하여 외접원의 반지름을 $R(t)$라 하면, $2R(t)=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\mathrm{C}}=\frac{2\sqrt{2}\,\ell(t)}{2/\sqrt{5}}$가

성립하므로, $R(t)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\ell(t)$이다. 사각형 ZBCA의 넓이를 $T(t)$, 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$,

삼각형 AZB의 넓이를 $T_1(t)$라 하면, $T(t)=S(t)+T_1(t)$이고 (1-2)번 풀이에서 $S(t)=\{\ell(t)\}^2$임을

구했으므로, $T_1(t)$를 구하면 된다. $T_1(t)=\frac{1}{2}\{R(t)\}^2\sin(\angle\mathrm{AZB})$인데,

$\cos(\angle\mathrm{AZB})=\frac{2\{R(t)\}^2-8\{\ell(t)\}^2}{2\{R(t)\}^2}=-\frac{3}{5}$이므로 $\sin(\angle\mathrm{AZB})=\frac{4}{5}$가 되어,

$T_1(t)=\{\ell(t)\}^2=S(t)$이고, $T(t)=2S(t)$가 된다.

(1-2)번 풀이의 $\ell(t)=\sqrt{\frac{2}{3}t^2+6t+1}$ 로부터, $\ell(t)=5$이면 $t=3$이다.

$S'(t)=\frac{4}{3}t+6$이므로, $S'(3)=10$이 되고, 따라서 $T'(3)=20$이다.

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
1번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 수학Ⅰ, 미적분 교과에서 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 도형의 길이를 나타낼 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 내에서 출제됨.
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
1번 문항은 사인법칙, 코사인법칙, 순간변화율의 개념을 알고 이를 활용하여 문제에 적용할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음.
6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (1-1) 중, (1-2) 중, (1-3) 중 1번 문항은 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 나타내고, 미분을 이용하여 순간변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문항으로 전체적인 난이도는 중이라고 판단됨. 고등학교 수학 교과과정에서 비슷한 유형의 문제를 접해 본 학생들은 쉽게 풀어낼 수 있을 것으로 생각되며 수학 개념, 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항이라 생각됨. 주어진 문항 및 풀이는 고등학교 교육과정 수준에서 출제되었음.

[문항카드7] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항2

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(B형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	치환적분법, 정적분
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=4f(x)$이다.

(나) $\int_1^2 f(x)dx=6$

(다) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $1 \le x \le 2$에서 $f(x)=g(x)$이다.

(2-1) $\int_1^3 2^x f(2^x)dx$를 구하시오. (70점)

(2-2) $\int_0^1 f(x)dx$를 구하시오. (80점)

(2-3) $g(x)$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

치환적분과 적분의 성질을 이용하여 적분을 계산하고 미분을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열B -문제2	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준· 성취수준	미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학II (3) 적분 ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오인 외	교학사	2019	156-157
	수학II	황선욱 외	미래엔	2019	126
기타					

5. 문항 해설

치환적분과 적분의 성질을 이용하여 적분을 계산하고 미분을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 함수를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	■ $u=2^x$으로 치환하여 $\int_1^3 2^x f(2^x)dx = \frac{1}{\ln 2}\int_2^8 f(u)du$를 얻으면 (+20점) ■ $\int_2^4 f(x)dx = 48$을 계산하면 (+20점) ■ $\int_2^8 f(x)dx = 432$를 계산하고 답 $\int_1^3 2^x f(2^x)dx = \frac{432}{\ln 2}$를 구하면 (+30점)	70
(2-2)	■ $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(2u)2du = \int_0^1 8f(u)du = 8\int_0^1 f(x)dx$를 얻으면 (+40점) ■ 답 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{6}{7}$을 얻으면 (+40점) **[별해]** ■ $\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x)dx = \int_1^2 f(2^{-k}x)2^{-k}dx = 8^{-k}\int_1^2 f(x)dx = \frac{6}{8^k}$을 얻으면 (+40점) ■ $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{8^k} = \frac{6}{7}$을 얻으면 (+40점)	80
(2-3)	■ $f(2)=4f(1)$을 얻으면 (+10점) ■ $f'(2)=2f'(1)$을 얻으면 (+30점) ■ 답 $g(x)=x^3-\frac{7}{4}x^2+6x-\frac{8}{3}$을 얻으면 (+40점)	80

7. 예시 답안

(2-1) $u=2^x$으로 치환하면 $du=2^x\ln 2dx$이므로 $\int_1^3 2^x f(2^x)dx=\frac{1}{\ln 2}\int_2^8 f(u)du$이다.

$\int_2^4 f(x)dx=\int_1^2 f(2y)2dy=8\int_1^2 f(y)dy=48$이고

$\int_4^8 f(x)dx=\int_2^4 f(2y)2dy=8\int_2^4 f(y)dy=384$이다.

따라서 $\int_2^8 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx=432$이다.

그러므로 $\int_1^3 2^x f(2^x)dx=\frac{1}{\ln 2}\int_2^8 f(u)du=\frac{432}{\ln 2}$이다.

(2-2) $\int_0^2 f(x)dx$에서 $u=\frac{x}{2}$로 치환하면

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(2u)2du=\int_0^1 8f(u)du=8\int_0^1 f(x)dx$이다.

$8\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=6+\int_0^1 f(x)dx$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{6}{7}$이다.

[별해] $\int_1^2 f(x)dx=6$이므로 $\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x)dx=\int_1^2 f(2^{-k}x)2^{-k}dx=8^{-k}\int_1^2 f(x)dx=\frac{6}{8^k}$이다.

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{8^k}=\frac{6}{7}$이다.

(2-3) $f(2x)=4f(x)$에서 $2f'(2x)=4f'(x)$이다.
따라서 $f(2)=4f(1)$이고 $f'(2)=2f'(1)$이다.
$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자. $g'(x)=3x^2+2ax+b$이다.

$g(2)=4g(1)$, $g'(2)=2g'(1)$이므로 $2b+3c=4$, $b=6$이다. 따라서 $c=-\frac{8}{3}$이다.

$\int_1^2\left(x^3+ax^2+6x-\frac{8}{3}\right)dx=6$에서 $a=-\frac{7}{4}$이다. 그러므로 $g(x)=x^3-\frac{7}{4}x^2+6x-\frac{8}{3}$이다.

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
2번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
2번 문항은 미적분 교과의 여러 가지 함수의 정적분 값을 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.
6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (2-1) 중, (2-2) 상, (2-3) 중 2번 문항은 미적분 교과의 적분 단원에서 출제되었으며 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있는가를 묻고 있다. (2-1)은 합성함수의 적분(치환적분)의 개념을 공부했다면 쉽게 풀어낼 수 있는 문제이며 (2-2)은 제시문에 주어진 조건을 활용하여 정적분의 값을 구해내야 하는데 학생들의 창의력과 문제해결력을 평가하기에 좋은 문항이라 생각됨. 미적분 교과를 성실히 공부하였다면 잘 풀어낼 것으로 판단되며 고등학교 교육과정 순준 내에서 출제 되었음.

[문항카드8] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항3

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(B형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	대칭, 최대, 최소, 역함수의 미분법
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,1)$에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<\pi$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(\cos x)=e^x$이다.
(나) $f(1)=\frac{1}{2}$

$0 \le x \le 2\pi$일 때 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(\cos x)$라 정의하자. 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $0 \le x \le \pi$일 때 $g(x)$를 구하시오. (80점)

(3-2) $\pi \le x \le 2\pi$일 때 함수 $g(x)$를 구하고, $0 \le x \le 2\pi$일 때 곡선 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그리시오. 또한 이 곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표와 변곡점의 x좌표를 모두 구하고 함수 $g(x)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때 상수 m과 M을 각각 구하시오. (80점)

(3-3) (3-2)에서 구한 상수 m과 M에 대하여 열린구간 (m, M)을 I라 하자. 실수 $t \in I$에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나서 생기는 두 점 사이의 거리를 $h(t)$라 정의하자. 미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 $h(k)=\pi$일 때 상수 k와 $h'(k)$의 값을 각각 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

주어진 조건을 만족시키는 그래프의 개형을 파악한 뒤 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열B -문제3	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준·성취수준	수학II (2) 미분 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 2 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	황선욱 외	미래엔	2020	82~88
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	97~101
기타					

5. 문항 해설

대칭성을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 그래프의 개형을 그린 뒤 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪ $g'(x) = -e^x \sin x$를 구하면 (+20점) ▪ 부분적분을 이용하여 $g(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C$ 임을 보이면 (+50점) ▪ $C=0$임을 보여서 $g(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)$ 를 구하면 (+10점)	80
(3-2)	▪ 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=\pi$에 대칭임을 언급하면 (+10점) ▪ $\pi \le x \le 2\pi$ 일 때 $g(x) = \frac{1}{2}e^{2\pi - x}(\cos x + \sin x)$ 임을 구하면 (+20점) ▪ x축과 만나는 점의 x좌표: $\frac{\pi}{4}$ (+5점), $\frac{7\pi}{4}$ (+5점) ▪ $0 \le x \le \pi$ 일 때 (또는 $\pi \le x \le 2\pi$ 일 때)의 $g''(x)$를 제대로 구하고 변곡점의 x좌표를 구한 경우: $\frac{3\pi}{4}$ (+5점), $\frac{5\pi}{4}$ (+5점) ▪ $m = -\frac{e^\pi}{2}$ (+5점), $M = \frac{1}{2}$ (+5점) ▪ 곡선 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 제대로 그리면 (+20점)	80
(3-3)	▪ $k = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$을 구하면 (+20점) ▪ $g\left(\pi - \frac{1}{2}h(t)\right) = t$ 임을 설명하면 (+20점) ▪ $h'(t) = -\dfrac{2}{g'\left(\pi - \frac{1}{2}h(t)\right)}$ 임을 설명하면 (+20점) ▪ $h'(k) = 2e^{-\frac{\pi}{2}}$ 을 구하면 (+20점) **[별해]** ▪ $h(t) = 2\{\pi - g^{-1}(t)\}$를 설명하면 (+20점) ▪ $k = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ 을 구하면 (+20점) ▪ $h'(t) = -\dfrac{2}{g'(g^{-1}(t))}$를 구하면 (+20점) ▪ $h'(k) = 2e^{-\frac{\pi}{2}}$ 을 구하면 (+20점)	80

7. 예시 답안

(3-1) 조건 (가)에서 $0<x<\pi$일 때 $f'(\cos x)=e^x$이므로 다음을 얻는다.

$$g'(x)=f'(\cos x)(-\sin x)=-e^x\sin x$$

양변을 적분하면 $f(\cos x)=g(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)+C$이다.

그런데 함수 $g(x)$는 구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이므로 이 식은 $0\le x\le\pi$에서도 성립한다.

이 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=g(0)=\frac{1}{2}+C$ 인데 조건 (나)를 이용하면 $C=0$이다.

따라서 다음을 얻는다.

$$g(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)\ (0\le x\le\pi)$$

(3-2) $\pi\le x\le 2\pi$일 때 $0\le 2\pi-x\le\pi$이고 $g(2\pi-x)=f(\cos(2\pi-x))=f(\cos x)=g(x)$이므로 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=\pi$에 대칭이다. 그러므로 (3-1)에서 구한 $0\le x\le\pi$일 때 의 $g(x)$의 식에 x대신 $2\pi-x$를 대입하면 다음을 얻는다.

$$g(x)=g(2\pi-x)=\frac{1}{2}e^{2\pi-x}\{\cos(2\pi-x)-\sin(2\pi-x)\}=\frac{1}{2}e^{2\pi-x}(\cos x+\sin x)\ (\pi\le x\le 2\pi)$$

그래프를 그리기 위해 우선 $0<x<\pi$일 때를 생각하면, $g'(x)=-e^x\sin x<0$이므로 $g(x)$는 감소한다.

또한 $g''(x)=-e^x(\cos x+\sin x)$ 이므로 $g''(x)=0$일 때를 생각하면 $\cos x+\sin x=0$,

즉 $\tan x=-1$이므로 $x=\frac{3\pi}{4}$이다. 따라서 $x=\frac{3\pi}{4}$일 때 변곡점이 되고, $0<x<\frac{3\pi}{4}$일 때

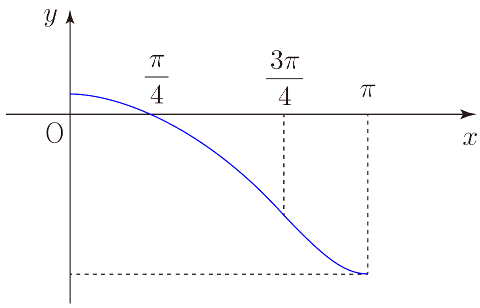
$g''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$일 때 $g''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

이제 $0\le x\le\pi$일 때 이 곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하기 위해

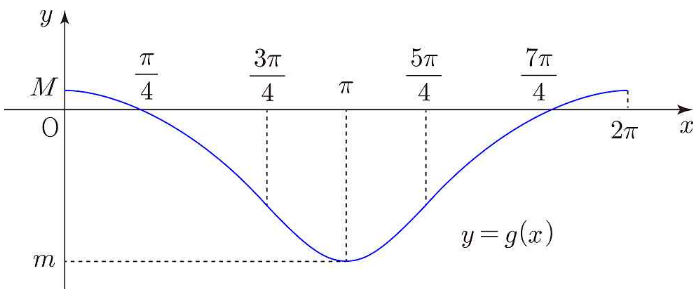
$g(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)=0$을 풀면 $\cos x-\sin x=0$에서 $\tan x=1$이다.

$0\le x\le\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$이다. 즉, 구간 $[0,\ \pi]$에서 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$ 뿐이다.

따라서 구간 $[0,\pi]$에서 곡선 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



$g'(\pi)=0$이고, 그래프의 대칭성을 생각하면 구간 $[0,2\pi]$에서 곡선 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 이 곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$와 $\frac{7\pi}{4}$이고 변곡점의 x좌표는 $\frac{3\pi}{4}$와 $\frac{5\pi}{4}$이다.

또한 $m=g(\pi)=-\frac{e^{\pi}}{2}$, $M=g(0)=g(2\pi)=\frac{1}{2}$이다.

(3-3) $h(k)=\pi$일 때 직선 $y=k$가 곡선 $y=g(x)$와 만나서 생기는 두 점의 x좌표는

각각 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$이다. 이 때 $k=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$이다.

곡선 $y=g(x)$의 그래프의 대칭성을 이용하면 $g\left(\pi-\frac{1}{2}h(t)\right)=t$이고,

이 식의 양변을 미분하면 $-\frac{1}{2}g'\left(\pi-\frac{1}{2}h(t)\right)h'(t)=1$이므로 $h'(t)=-\frac{2}{g'\left(\pi-\frac{1}{2}h(t)\right)}$이다.

이 식에 $t=k$, $h(k)=\pi$를 대입하면 다음을 얻는다.

$$h'(k)=-\frac{2}{g'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{2}{-e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}}=2e^{-\frac{\pi}{2}}$$

[별해] 함수 $g(x)$는 구간 $[0,\,\pi]$에서 감소함수이므로 역함수를 갖는다.
그러므로 구간 $(m,\,M)$에 속하는 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와
$0<x<\pi$에서 만나서 생기는 점의 x좌표는 $g^{-1}(t)$로 나타낼 수 있다.
곡선 $y=g(x)$의 대칭성을 이용하면 $h(t)=2\{\pi-g^{-1}(t)\}$이다.

따라서 $h(k)=\pi$일 때 $h(k)=2\{\pi-g^{-1}(k)\}=\pi$로부터 $g^{-1}(k)=\frac{\pi}{2}$이고 $k=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$이다.

역함수의 미분법을 사용하여 $h(t)=2\{\pi-g^{-1}(t)\}$의 도함수를 구하면

$$h'(t)=-2\{g^{-1}(t)\}'=-\frac{2}{g'(g^{-1}(t))}$$

이다. 위의 식에 $t=k$, $g^{-1}(t)=\frac{\pi}{2}$를 대입하면 다음을 얻는다.

$$h'(k)=\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}}=2e^{-\frac{\pi}{2}}$$

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
3번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 미분과 부정적분을 이용하여 주어진 함수를 구하고 함수추론을 할 수 있는가를 묻는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
3번 문항은 지수함수와 삼각함수의 곱으로 이루어진 함수를 미분과 정적분을 할 수 있는가를 묻고 있으며 대칭성을 이용하여 함수추론을 하고 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프 개형을 그릴 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음. 변별력을 평가하기에 적절함.
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 그래프를 통해 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 풀이가 가능함을 제시함.
6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (3-1) 중, (3-2) 상, (3-3) 상 3번 문항 전체적인 난이도는 상으로 판단됨. 지수함수와 삼각함수의 곱으로 이루어진 형태의 함수를 부정적분 할 수 있는가를 평가하고, 삼각함수의 주기성을 이용하여 함수의 대칭성을 파악할 수 있는가가 문제풀이의 핵심 아이디어이다. 미적분 교과에서 비슷한 문항을 접해보았을 것으로 생각되며 고등학교 수학 교육과정을 잘 공부한 학생이라면 잘 풀어낼 수 있을 것으로 판단됨. 기본 개념, 창의력, 문제해결력 등을 변별할 수 있는 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.