[문항카드3] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항1

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목)/
문항 번호</td><td colspan="2">자연계열(A형) / 문제 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정
과목명</td><td>미적분</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>이계도함수, 함수의 그래프</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">36분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=te^{-x^2}\ (x>0)$이라 정의하자.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중 원점 O와 가장 가까운 점을 P, 변곡점을 Q라 할 때
다음 물음에 각각 답하시오. (단, $t>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

(1-1) 점 Q의 x좌표를 구하시오. (70점)

(1-2) 원점 O와 점 P 사이의 거리를 t에 대한 식으로 나타내시오. (80점)

(1-3) $\angle \mathrm{OPS}=\dfrac{\pi}{2}$ 를 만족하는 x축 위의 점 $\mathrm{S}(r,0)$에 대하여 r가 최소일 때, 점 P의 x좌표를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

변곡점을 이해하고 함수의 최솟값을 계산 할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><td colspan="2">문항 및 제시문</td><td>관련 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">자연계열A
-문제1</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	97~111
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	111~124
기타					

5. 문항 해설

도함수를 이용하여 함수의 최솟값을 계산하고 이계도함수를 이용하여 변곡점을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	■ $f''(x)=t(4x^2-2)e^{-x^2}$을 구하고 $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$을 보이면 (+40점). ■ $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f''(x)<0$을 보이면(+10점) ■ $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f''(x)>0$을 보이면(+10점) ■ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 구하면 (+10점).	70
(1-2)	■ $D'(x)=2x(1-2t^2e^{-2x^2})=0$의 근 $\alpha=\sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}}$ 을 구하면(+40점). ■ $0<x<\alpha$일 때 $D'(x)<0$을 보이면 (+10점) ■ $x>\alpha$일 때 $D'(x)>0$을 보이면(+10점) ■ 답 $\sqrt{\frac{\ln(2t^2)+1}{2}}$ 을 구하면(+20점)	80
(1-3)	■ $r=\alpha+\frac{1}{2\alpha}$을 구하면(+40점) ■ r는 $\alpha=\frac{1}{2\alpha}$일 때 최소임을 언급하면 (+10점) ■ $t=\sqrt{\frac{e}{2}}$를 구하면 (+10점) ■ $\sqrt{\frac{e}{2}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$를 언급하면 (+10점) ■ P의 x좌표가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$임을 보이면(+10점)	80

7. 예시 답안

(1-1) $f'(x)=t(-2xe^{-x^2})$ 이다. $f''(x)=t(4x^2-2)e^{-x^2}$이므로 $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$이다.

$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $f''(x)<0$, $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $f''(x)>0$ 이므로 Q의 x좌표는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(1-2) 원점과 곡선 위의 점 $\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{te}^{-\mathrm{x}^2})$ 사이의 거리를 $d(x)$라 하면 $d(x)$가 최소이기 위한 필요충분조건은 $D(x)=\{d(x)\}^2=x^2+t^2e^{-2x^2}$이 최소인 것이다.

$D'(x)=2x(1-2t^2e^{-2x^2})=0$을 만족하는 근을 α라 하면, $\alpha=\sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}}$ 이다.

$0<x<\alpha$ 이면 $D'(x)<0$이고 $x>\alpha$ 이면 $D'(x)>0$ 이므로 $d(x)$는 $x=\alpha$일 때 최소이다.

따라서 구하는 거리는 $\sqrt{\frac{\ln(2t^2)+1}{2}}$ 이다.

(1-3) 두 점 P와 S를 지나는 직선을 ℓ이라 하자.

직선 OP의 기울기는 $\frac{te^{-\alpha^2}}{\alpha}$이므로 직선 ℓ의 기울기는 $\frac{-\alpha e^{\alpha^2}}{t}$ 이다.

ℓ의 방정식은 $y=\frac{-\alpha e^{\alpha^2}}{t}(x-\alpha)+te^{-\alpha^2}$이므로 식 $\alpha=\sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}}$ 으로부터 $r=\alpha+\frac{1}{2\alpha}$이 되고,

$\alpha+\frac{1}{2\alpha}\geq 2\sqrt{\alpha\frac{1}{2\alpha}}=\sqrt{2}$로부터 r는 $\alpha=\frac{1}{2\alpha}$일 때 최소가 된다.

$1=2\alpha^2=\ln(2t^2)$이므로 $t=\sqrt{\frac{e}{2}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$이고, 이 때 P의 x좌표는 $\alpha=\sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
1번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과의 지수함수의 미분을 주제로 하였으며 고등학교 교육과정 내에서 출제되었음.
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
1번 문항은 지수함수를 미분할 수 있는가와 지수함수의 그래프에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있고 이를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제되었음.
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.
6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (1-1) 중, (1-2) 중, (1-3) 상 1번 문항은 미적분 교과에서 출제 되었으며 지수함수의 미분, 합성함수의 미분을 할 수 있는가를 묻고 있으며 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결해야 하는 평가 문항으로 교육과정 범위 내에서 출제되었다고 판단됨. 미적분을 공부하면서 도함수, 이계도함수를 이용하여 변곡점과 그래프 개형을 그리는 유사한 접근법을 이용하는 문제를 많이 풀어보았을 것으로 생각됨. 미적분 교과를 성실히 공부한 학생은 쉽게 풀어낼 것으로 생각됨.

[문항카드4] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항2

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(A형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	도함수, 이계도함수, 증가
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x)-f(y) \le (x-y)g(x)$이다.

(2-1) 모든 실수 x, y에 대하여 $(x-y)g(y) \le f(x)-f(y)$가 성립함을 보이시오. (70점)

(2-2) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=g(x)$임을 보이시오. (80점)

(2-3) 모든 실수 x에 대하여 $8f(x)+f(-2x)=18$일 때, $f(x)$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 도함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열 A-문제2	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준·성취수준	수학II (2) 미분 ① 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 수학II (1) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 미적분 (3) 미분법 ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오남 외	교학사	2019	115~116
	수학II	황선욱 외	미래엔	2019	23, 55
기타					

5. 문항 해설

함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 도함수를 구하고 그 도함수의 성질을 이용하여 주어진 함수를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	■ $f(y)-f(x) \le (y-x)g(y)$를 쓰면 (+40점) ■ $(x-y)g(y) \le f(x)-f(y)$를 쓰면 (+30점)	70
(2-2)	■ $(x-y)g(y) \le f(x)-f(y) \le (x-y)g(x)$를 쓰면 (+20점) ■ $g(y) \le \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le g(x)$를 쓰면 (+20점) ■ $\lim\limits_{y\to x} g(y) \le \lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \lim\limits_{y\to x} g(x)$를 쓰면 (+20점) ■ $g(x) \le f'(x) \le g(x)$를 쓰면 (+20점) **[별해]** ■ $x>y$일 때 $\lim\limits_{y\to x-}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \lim\limits_{y\to x-} g(x)$를 쓰고 $f'(x) \le g(x)$를 얻으면 (+40점) ■ $x<y$일 때 $\lim\limits_{y\to x+}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge \lim\limits_{y\to x+} g(x)$를 쓰고 $f'(x) \ge g(x)$를 얻으면 (+40점)	80
(2-3)	■ $f''(x) \ge 0$라고 기술하면 (+20점) ■ $f''(x)=0$임을 보이면 (+30점) ■ $f'(x)=0$임을 보이면 (+20점) ■ $f(x)=2$임을 보이면 (+10점)	80

7. 예시 답안

(2-1) 주어진 식에서 x와 y를 교환하면 $f(y)-f(x) \le (y-x)g(y)$이다.
따라서 $(x-y)g(y) \le f(x)-f(y)$이다.

(2-2) $(x-y)g(y) \le f(x)-f(y) \le (x-y)g(x)$에서 $x>y$이면 $g(y) \le \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le g(x)$이다.

$f(x)$가 미분가능하고 $\lim\limits_{y\to x-} g(y) \le \lim\limits_{y\to x-} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \lim\limits_{y\to x-} g(x)$이므로 $g(x) \le f'(x) \le g(x)$이다.

따라서 $f'(x)=g(x)$이다.

[별해] $x>y$이면 $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le g(x)$이므로 $\lim\limits_{y\to x-} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \lim\limits_{y\to x-} g(x)$이고
$f'(x) \le g(x)$이다.
$x<y$이면 $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge g(x)$이므로 $\lim\limits_{y\to x+} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge \lim\limits_{y\to x+} g(x)$이고 $f'(x) \ge g(x)$이다.
따라서 $f'(x)=g(x)$이다.

(2-3) 양변을 미분하면 $4f'(x)-f'(-2x)=0$이다.
(2-2)의 결과에 의해 $f'(x)=g(x)$이다.
(2-2)의 풀이에서 $x>y$이면 $g(y) \le \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \le g(x)$이므로 $g(x) \ge g(y)$이다.
따라서 $g'(x) \ge 0$이 되고 $f''(x) \ge 0$이다.
$2f''(x)+f''(-2x)=0$에서 $f''(x)=0$을 얻는다.
$4f'(x)-f'(-2x)=0$에 $x=0$을 대입하면 $4f'(0)-f'(0)=0$이 되어 $f'(0)=0$이다.
즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이다. 따라서 $f(x)$는 상수함수이다.
그런데 $8f(0)+f(0)=18$이므로 $f(0)=2$이다. 그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2$이다.

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항

2번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.
[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
주어진 문항 및 제시문은 수학Ⅱ 교과에서 도함수를 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.

2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항

2번 문항은 주어진 부등식을 응용하여 도함수를 구할 수 있는가와 이계도함수를 구하여 $f(x)$를 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.

3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항

주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.

4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항

제시된 채점 기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점 되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.

5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항

제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음.

6. 예상 난이도 및 총평

각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.
(2-1) 중, (2-2) 중, (2-3) 중
2번 문항은 수학Ⅱ 교과 미분 단원에서 출제되었으며 도함수의 정의를 이용하고 주어진 부등식을 응용하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$사이의 관계를 찾아낼 수 있는가를 묻고 있다. $f''(x)=0$임을 찾아내는 것이 문제 풀이의 핵심아이디어이며 고등학교 수학 교과과정을 잘 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있을 것으로 생각됨. 개념, 문제해결, 추론 등의 수학교과 역량을 고등학교 교육과정에 제시된 수준을 준수하여 출제하였다고 판단됨.

[문항카드5] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항3

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호</td><td colspan="2">자연계열(A형) / 문제 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>도함수, 이계도함수, 극대, 극소, 변곡점</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">40분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=f(x)e^x$이라 정의할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x g(t)\,dt \geq 0$이다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값 0을 갖는다.

(3-1) $f(1)=0$ 임을 보이시오. (80점)

(3-2) $g(x)$를 구하고 도함수와 이계도함수를 이용하여 곡선 $y=g(x)$의 개형을 좌표평면에 그리시오. 또한 극대, 극소, 변곡점이 되는 x의 값을 모두 구하시오. (80점)

(3-3) 실수 t에 대하여 방정식 $g'(t)=\dfrac{g(x+1)-g(t)}{x-t}$를 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수를 $h(t)$라 정의하자. 구간 $[2,3]$에 속하는 t중에서 $h(t)=2$를 만족시키는 t의 개수를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

극솟값, 극댓값, 변곡점에 대한 그래프에서의 기하학적인 의미를 이해하고, 이를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열 A-문제3	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준·성취수준	수학II (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	권오남 외	교학사	2020	96~99
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	114~121
기타					

5. 문항 해설

조건을 이용하여 함수를 찾고 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프의 개형을 그린 뒤, 접선과 변곡점의 성질을 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪ $G(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소임을 설명하면 (+40점) ▪ $g(1)=G'(1)=0$ 임을 언급하면 (+30점) ▪ $f(1)=0$ 임을 언급하면 (+10점)	80
(3-2)	▪ 방정식 $f(x)=0$ 의 실근 $x=3$ 이 중근임을 보이거나 $f'(3)=0$ 임을 보이면 (+30점) $g(x)$ 는 ▪ $x=2$ 에서 극대 (+5점) ▪ $x=-1$ 에서 극소 (+5점) ▪ $x=3$ 에서 극소 (+5점) ▪ $x=1$ 에서 변곡점 (+5점) ▪ $x=-\sqrt{7}$ 에서 변곡점 (+5점) ▪ $x=\sqrt{7}$ 에서 변곡점 (+5점) ▪ $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 제대로 그리면 (+20점)	80
(3-3)	▪ 주어진 방정식이 $g'(t)(x-t)+g(t)=g(x+1)$ $(x\neq t)$와 같으므로 $h(t)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$ 에서의 접선이 곡선 $y=g(x+1)$ 과 만나는 점 중 $(t,\ g(t))$ 가 아닌 점의 개수임을 설명하면 (+20점) [참고] "$(t,\ g(t))$ 가 아닌 점"이라는 것을 언급하지 않은 경우는 (+10점)만 부여 ▪ 좌표평면에 $y=g(x)$ 와 $y=g(x+1)$ 의 그래프를 동시에 그려서 설명하면 (+10점) ▪ $h(2)=2$ 임을 설명하면 (+10점) ▪ $h(3)=2$ 임을 설명하면 (+10점) ▪ 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$ 에서의 접선이 곡선 $y=g(x+1)$ 과도 접하게 되는 α 가 변곡점의 x 좌표(= $\sqrt{7}$)과 3 사이에 존재함을 설명하면 (+10점) [참고] α 가 2와 3 사이에 존재한다고만 설명한 경우 (+0점) ▪ $g(\alpha)<g(\alpha+1)$ 임을 보여서 $h(\alpha)=2$ 임을 설명하면 (+10점) ▪ $h(t)=2$ 를 만족시키는 t 의 개수가 3 임을 설명하면 (+10점)	80

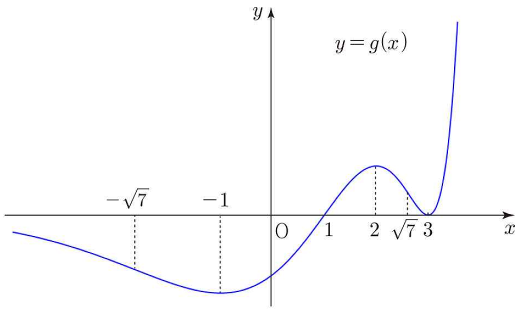
7. 예시 답안

(3-1) $G(x)=\int_1^x g(t)\,dt$ 라 정의하면 $G(x)$는 임의의 실수 x에 대하여 $G(x)\ge 0$이며 $G(1)=0$이다. 따라서 $G(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 가진다. 그런데 $G(x)$는 미분가능한 함수이므로 $G'(1)=0$이고, 적분과 미분의 관계를 이용하면 $G'(x)=g(x)$이므로 $g(1)=G'(1)=0$이다. $f(x)=g(x)e^{-x}$이므로 $f(1)=g(1)e^{-1}=0$이다.

(3-2) (3-1)의 결과와 조건 (나)로부터 $f(1)=f(3)=0$이다. 만일 방정식 $f(x)=0$의 실근 $x=3$이 중근이 아니면 $x=3$을 경계로 함수 $g(x)$의 부호가 바뀌므로 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가질 수 없다. 따라서 조건 (나)에 의해 $f(x)=(x-1)(x-3)^2$이다.

이 때 $g(x)=(x-1)(x-3)^2e^x$이고 $g'(x)=(x+1)(x-2)(x-3)e^x$, $g''(x)=(x-1)(x^2-7)e^x$이다. 이를 이용하여 증감표를 작성하면 $g(x)$는 $x=-1,\,3$에서 극소, $x=2$에서 극대이며 $x=1,\,\pm\sqrt{7}$에서 변곡점을 갖는다.

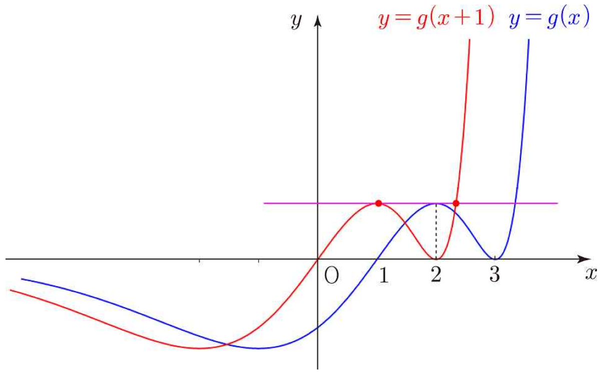
$g(1)=g(3)=0$이고 $x<1$일 때 $g(x)<0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[별해] (3-1)의 결과와 조건 (나)로부터 $f(1)=f(3)=g(3)=g'(3)=0$이다.

그런데 $g'(x)=\{f'(x)+f(x)\}e^x$이므로 $0=g'(3)=\{f'(3)+f(3)\}e^3=f'(3)e^3$이다. 따라서 $f'(3)=0$이고 $f(x)=(x-1)(x-3)^2$이다. 이후의 내용은 위의 풀이와 같다.

(3-3) 방정식 $g'(t)=\dfrac{g(x+1)-g(t)}{x-t}$는 $g'(t)(x-t)+g(t)=g(x+1)\ (x\ne t)$와 같으므로 $h(t)$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\,g(t))$에서의 접선이 곡선 $y=g(x+1)$과 만나는 점 중 $(t,\,g(t))$가 아닌 점의 개수이다. 그래프를 이용하여 구간 $[2,3]$에 속하는 t중에서 $h(t)=2$를 만족시키는 t를 찾으면 된다. 일단 $t=2$일 때 아래 그림과 같이 점 $(2,\,g(2))$에서의 접선이 곡선 $y=g(x+1)$과 두 점에서 만나며, 그 두 점의 x좌표는 2가 아니다. 따라서 $h(2)=2$이다.



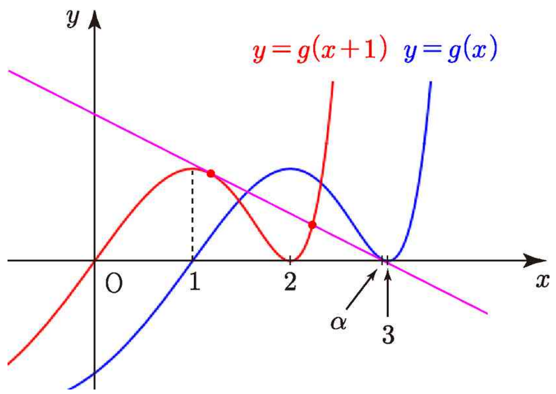
$(t=2)$

이제 $t>2$인 경우를 생각하기 위해 t를 조금씩 증가시켜 보면 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\,g(t))$에서의 접선의 기울기는 음수이며 점점 감소하다가 변곡점인 $(\sqrt{7},\,g(\sqrt{7}))$에서 최소가 된다. 이때까지의 접선은 곡선 $y=g(x+1)$과 계속 한 점에서만 만난다. 그 이후에는 기울기가 다시 증가하기 시작하지만 기울기

는 여전히 음수이고 접선은 곡선 $y=g(x+1)$ 과 한동안 계속 한 점에서만 만나게 된다. 그렇지만 결국 아래 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$ 에서의 접선이 곡선 $y=g(x+1)$ 과도 접하게 되는 α 가 $\sqrt{7}$ 과 3 사이에 유일하게 존재하며, 이 때 접선과 곡선 $y=g(x+1)$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 경우 $\frac{5}{2}<\sqrt{7}<\alpha<3$ 이므로 $(\alpha-3)^2<(\alpha-2)^2$ 이고 다음이 성립한다.

$$g(\alpha)=(\alpha-1)(\alpha-3)^2e^{\alpha}<\alpha(\alpha-2)^2e^{\alpha+1}=g(\alpha+1)$$

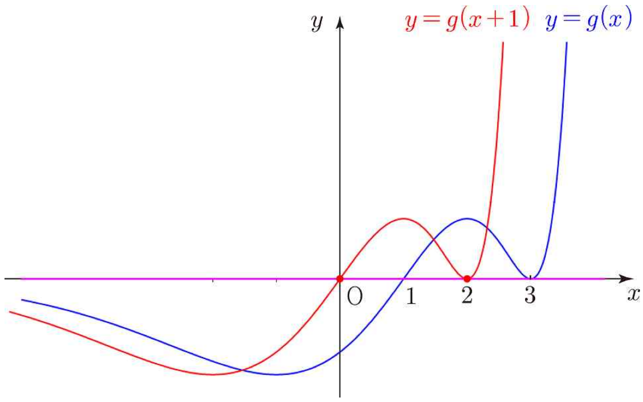
따라서 아래 그림에서 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$ 에서의 접선과 곡선 $y=g(x+1)$ 이 만나는 두 점의 x 좌표는 모두 α 보다 작다. 그러므로 $2<t<\alpha$ 일 때 $h(t)\le 1$ 이고, $h(\alpha)=2$ 이다.



$(t=\alpha)$

$\alpha<t<3$ 인 경우에는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$ 에서의 접선이 곡선 $y=g(x+1)$ 과 서로 다른 세 점에서 만나며, 그래프를 통해 위 그림과 비교하여 보면 그 세 점의 x 좌표는 모두 t 보다 작은 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 이 경우 $h(t)=3$ 이다.

$t=3$ 일 때는 아래 그림과 같이 점 $(3,\ g(3))$ 에서의 접선이 곡선 $y=g(x+1)$ 과 두 점에서 만나며 두 점의 x 좌표는 모두 3보다 작다. 그러므로 $h(3)=2$ 이다.



$(t=3)$

결국 $h(t)=2$ 를 만족시키는 $t\in[2,3]$ 은 $t=2,\ \alpha,\ 3$ 일 때뿐이므로 $h(t)=2$ 를 만족시키는 t 의 개수는 3 이다.

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
3번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. 주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 정적분으로 이루어진 함수의 미분을 이용하여 함수를 구하고 그래프의 개형을 통해 함수 추론을 요구하는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
3번 문항은 정적분으로 이루어진 함수의 미분, 이계도함수를 이용한 그래프의 개형, 함수 추론을 할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 그래프를 통해 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.
6. 예상 난이도 및 총평
각 문항별 예상난이도는 다음과 같다. (3-1) 중, (3-2) 상, (3-3) 상 3번 문항은 미적분 교과에서 출제되었으며 미준과 적분과의 관계를 이용한 정적분으로 이루어진 함수의 미분, 이계도함수를 이용한 그래프 개형, 주어진 조건을 만족시키는 함수 추론을 묻고 있으며 고등학교 수학 교육과정에서 학생들의 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항이다. 전체적인 난이도는 상으로 예상되며 미적분 교과를 성실히 공부한 학생이라면 잘 풀어낼 것으로 판단됨. 고등학교 교육과정 수준내에서 출제함.