<문항카드 13>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(D형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	도함수, 극값, 증가, 감소, 정적분
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 a에 대하여 다음 식을 만족한다.

$$\int_0^x f(t)\,dt = e^x - ae^{3x}\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt$$

다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 함수 $f(x)$와 실수 a를 각각 구하시오. (70점)

(1-2) 좌표평면의 $x<0$인 부분에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=e^x$ 위에 각각 하나씩 점을 잡고, y축 위에 두 점을 잡아서 직사각형을 만들 때, 직사각형 넓이의 최댓값을 구하시오. (80점)

(1-3) 곡선 $y=f(x)$와 y축의 교점을 P라 하자. 직선 ℓ_1은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이고, ℓ_2는 x축과 평행하면서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이다. 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 ℓ_1, ℓ_2로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 적분과 미분의 관계, 함수의 최댓값, 접선의 방정식, 넓이에 대한 이해도를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 수학Ⅱ (2) (3) 적분 ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020.3.1	pp. 71-96 pp. 126-132
	미적분	이준열 외	천재교육	2020.3.1	pp. 102-111, pp. 138-171
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

- 함수에 대한 적분 관계식으로부터 함수를 구하고, 그 함수와 관련된 최댓값, 접선의 방정식, 넓이를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	■ $a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt=1$까지 구하면 (+20점) ■ $f(x)=e^x-3e^{3x}$를 구하면 (+30점) ■ $a=\dfrac{1}{\ln 3-12}$를 구하면 (+20점)	70

(1-2)	▪ $A(x) = -3xe^{3x}$ 를 보이면 (+30점) ▪ $A(x)$가 $x=-\frac{1}{3}$에서 최대임을 보이면 (+20점) ▪ 최댓값 $A\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{-1}$ 을 구하면 (+30점)	80
(1-3)	▪ 접선 ℓ_1의 방정식 $y = -8x-2$을 구하면 (+30점) ▪ 직선 ℓ_2의 방정식 $y=\frac{2}{9}$ 을 구하면 (+20점) ▪ 두 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 교점의 x좌표 $-\frac{5}{18}$를 구하면 (+10점) ▪ 영역의 넓이 $\frac{2}{9}\ln 3-\frac{1}{81}$을 구하면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

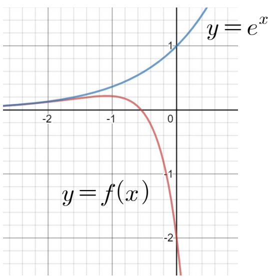
(1-1) $x=0$을 대입하면 $0=1-a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt$ 이므로 $a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt=1$ 이다.

따라서 $\int_0^x f(t)\,dt=e^x-e^{3x}$이다.

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=e^x-3e^{3x}$이다.

$1=a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt=a\int_0^{\ln 3}(1-3e^{2t})\,dt$ 이므로 $a=\frac{1}{\ln 3-12}$이다.

(1-2) 곡선 $y=f(x)$와 $y=e^x$은 (그림 1)과 같다.



(그림 1)

꼭지점의 좌표는 (x, e^x), (x, e^x-3e^{3x}), $(0, e^x)$, $(0, e^x-3e^{3x})$이므로, 직사각형의 넓이는 $A(x) = -3xe^{3x}$ 이다.

$A'(x) = -3e^{3x}(1+3x)$이므로, $A'\left(-\frac{1}{3}\right)=0$이고, $x<-\frac{1}{3}$에서 $A'(x)>0$이고,

$x>-\frac{1}{3}$에서 $A'(x)<0$이다. 따라서 함수 $A(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 최대가 되고, 최댓값은 $A\left(-\frac{1}{3}\right)=e^{-1}$이다.

(1-3) $f'(x)=e^x-9e^{3x}=e^x(1-9e^{2x})$ 이므로, $f'(-\ln 3)=0$이고, $x<-\ln 3$에서 $f'(x)>0$이고, $x>-\ln 3$에서 $f'(x)<0$이다.

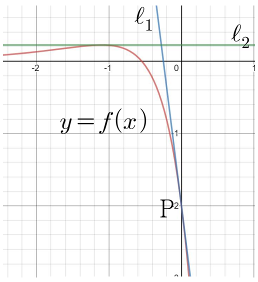
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\ln 3$에서 최대가 되고, 이 때 최댓값은 $f(-\ln 3)=\frac{2}{9}$ 이므로,

직선 ℓ_2의 방정식은 $y=\frac{2}{9}$ 이다. $f(x)=e^x-3e^{3x}$이므로, $\mathrm{P}=(0,-2)$이다. $f'(0)=-8$이므로

접선 ℓ_1의 방정식은 $y=-8x-2$이다. $-8x-2=\frac{2}{9}$로부터 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 교점의 x좌표는

$-\frac{5}{18}$이다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 ℓ_1, ℓ_2로 둘러싸인 영역의 넓이는 다음과 같다.

(아래 (그림 2) 참고) $\int_{-\ln 3}^{-\frac{5}{18}}\left(\frac{2}{9}-e^x+3e^{3x}\right)dx+\int_{-\frac{5}{18}}^{0}(-8x-2-e^x+3e^{3x})\,dx=\frac{2}{9}\ln 3-\frac{1}{81}$



(그림 2)

[1-3 별해] 영역의 넓이를 구할 때, 도형의 넓이를 이용하여 $\frac{2}{9}\ln 3-\frac{1}{81}$를 구할 수도 있다.

<문항카드 14>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(D형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	배반사건, 조건부확률, 확률의 곱셈정리, 표준정규분포, 기댓값과 표준편차, 이항분포와 정규분포의 관계
예상 소요 시간	35분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 상자 안에 '0'이 적힌 공 n개와 '1'이 적힌 공 4개가 들어 있다. 다음 물음에 각각 답하시오.

(2-1) 상자에서 공 4개를 동시에 뽑아 '0'이 적힌 공 한 개당 5000원을, '1'이 적힌 공 한 개당 3000원을 상금으로 받는다. $n=3$일 때, 상금의 표준편차를 구하시오. (70점)

(2-2) $n=2$일 때, 상자에서 공을 한 개씩 꺼내어, '0'이 나오면 다시 넣지 않고 '1'이 나오면 '1'이 적힌 새로운 공 한 개와 꺼낸 공을 함께 상자에 다시 넣는 시행을 3번 반복한다.
세 번째 꺼낸 공이 '1'이 적힌 공일 확률을 구하시오. (80점)

(2-3) $n=4$라 하자. 상자에서 임의로 공을 한 개 꺼내어 적힌 숫자를 확인하고 다시 넣는 시행을 k번 반복할 때, '1'이 적힌 공의 개수의 평균을 확률변수 X라 하자. 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 조건 $\mathrm{P}(0.4 \le X \le 0.6) \ge 0.95$이 성립하는 k의 최솟값을 구하시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대해 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) (80점)

3. 출제 의도

- 이산확률변수의 확률분포를 이해하고 표준편차를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 조건부확률을 이해하고 이항분포와 표준정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	확률과 통계 (2) 확률 ② 조건부확률 [12확통002-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. 확률과 통계 (3) 통계 ① 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. 확률과 통계 (3) 통계 ② 통계적 추정 [12확통03-06] 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정

**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박규식 외	동아출판사	2020년	pp. 61, 87, 95, 98, 101, 105
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2020년	pp. 60, 89, 99, 105, 109
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

- 정의한 이산확률변수의 확률분포를 구하고 확률변수의 기댓값과 표준편차를 계산한다.
- 조건부확률을 이해하고 확률을 구한다.
- 이항분포와 정규분포와의 관계를 이용하여 확률의 값을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점) ■ 답이 틀린 경우 - 확률분포를 구하면 (+20점) - E(X)를 맞게 구하면 (+10점) - V(X)를 맞게 구하면 (+10점) - 상금과 X 사이의 선형관계식을 구하면 (+20점)	70
	■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점) ■ 답이 틀린 경우 - 확률분포를 구하면 (+20점)	

<table>
<tr><td></td><td>- E(X)를 맞게 구하면 (+10점)
- V(X)를 맞게 구하면 (+10점)
- 상금과 X 사이의 선형관계식을 구하면 (+20점)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점)
■ 답이 틀린 경우
- 확률분포를 구하면 (+20점)
- E(X)를 맞게 구하면 (+10점)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점)
■ 답이 틀린 경우
- 상금액수를 조정하면 (+20점)
- 확률분포를 구하면 (+20점)
- E(X)를 맞게 구하면 (+10점)
- V(X)를 맞게 구하면 (+10점)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2-2)</td><td>■ 네 가지 경우로 나누면 (+20점)
■ 각 경우의 확률을 계산하면 (각각 +10점)
■ 답이 네 경우의 확률을 모두 더한 값이라는 것을 알면 (+10점)
■ $\frac{169}{210}$을 제시하면 (+10점)</td><td>80</td></tr>
<tr><td>(2-3)</td><td>■ 확률변수 kX가 이항분포 $\mathrm{B}(k,\ 0.5)$를 따르는 것을 보이면 (+20점)
■ $Z=\frac{Y-k/2}{\sqrt{k/4}}$가 표준정규분포를 따름을 언급하면 (+20점)
■ 풀이과정을 통해 $\mathrm{P}(0.4\le X\le 0.6)=\mathrm{P}(|Z|\le 0.2\sqrt{k})$에 도달하면 (+30점)
■ 자연수 k의 최솟값 97을 구하면 (+10점)</td><td>80</td></tr>
</table>

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2]

(2-1) 뽑은 공 중에서 ‘0’이 적힌 공의 수를 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{35}(1\cdot 12+2\cdot 18+3\cdot 4)=\frac{12}{7}$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{35}(1\cdot 12+2^2\cdot 18+3^2\cdot 4)=\frac{24}{7}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\frac{24}{49}$이다. 상금을 Y라 하면 $Y=5000X+3000(4-X)=12000+2000X$이므로 Y의

표준편차는 $\sigma(Y)=\sigma(12000+2000X)=2000\sigma(X)=\frac{4000\sqrt{6}}{7}$이다.

[2-1 별해 1] 뽑은 공 중에서 ‘1’이 적힌 공의 수를 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
P(X=x)	$\frac{{}_4C_1\,{}_3C_3}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$	$\frac{{}_4C_2\,{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_3\,{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_4\,{}_3C_0}{{}_7C_4}=\frac{1}{35}$	1

$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{35}(1\cdot 4+2\cdot 18+3\cdot 12+4\cdot 1) = \frac{16}{7}$,

$\mathrm{E(X^2)} = \frac{1}{35}(1\cdot 4+2^2\cdot 18+3^2\cdot 12+4^2\cdot 1) = \frac{40}{7}$이므로 $\mathrm{V}(X) = \frac{24}{49}$이다.

상금을 Y라 하면 $Y=3000X+5000(4-X)=20000-2000X$이므로 Y의 표준편차

$\sigma(Y)=\sigma(20000-2000X) = 2000\sigma(X) = \frac{4000\sqrt{6}}{7}$이다.

[2-1 별해 2] 확률변수 Y는 전체 받는 상금의 액수라 할 때 Y의 확률분포는 다음과 같다.

Y	12000	14000	16000	18000	합계
P(Y=y)	$\frac{{}_4C_4\,{}_3C_0}{{}_7C_4}=\frac{1}{35}$	$\frac{{}_4C_3\,{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_2\,{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_1\,{}_3C_3}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$	1

$\mathrm{E(Y)} = \frac{1000}{35}(12\cdot 1+14\cdot 12+16\cdot 18+18\cdot 4) = \frac{108000}{7}$,

$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{10^6}{35}(12^2\cdot 1+14^2\cdot 12+16^2\cdot 18+18^2\cdot 4) = \frac{1680}{7}\times 10^6$이므로 $\mathrm{V}(Y) = \frac{96}{49}\cdot 10^6$이다.

그러므로 $\sigma(Y) = \frac{4000\sqrt{6}}{7}$이다.

[2-1 별해 3] 공 4개를 뽑아서 '0'이 적힌 공이 나온 수만큼 2000원을 받은 총액을 Z라 하면 Z의 표준편차는 문제에서 주어진 상금의 표준편차와 동일하다. Z의 확률분포는 다음과 같다.

Z	0	2000	4000	6000	합계
P(Z=z)	$\frac{{}_4C_4\,{}_3C_0}{{}_7C_4}=\frac{1}{35}$	$\frac{{}_4C_3\,{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_2\,{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_1\,{}_3C_3}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$	1

$\mathrm{E}(Z) = \frac{1000}{35}(2\cdot 12+4\cdot 18+6\cdot 4) = \frac{24}{7}\cdot 10^3$,

$\mathrm{E}(Z^2) = \frac{10^6}{35}(2^2\cdot 12+4^2\cdot 18+6^2\cdot 4) = \frac{96}{7}\cdot 10^6$ 이므로 $\sigma(Z) = \frac{4\sqrt{6}}{7}\times 10^3$이다.

(2-2) 첫 번째 시도에서 나온 수를 a, 두 번째 시도에서 나온 수를 b라 하자.

$(a,b)=(1,1)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{4}{6}\times\frac{5}{7}\times\frac{6}{8}=\frac{5}{14}$,

$(a,b)=(1,0)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{4}{6}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{63}$,

$(a,b)=(0,1)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{9}$,

$(a,b)=(0,0)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{15}$

이다. 따라서 네 경우의 확률을 모두 더하면 $\frac{169}{210}$이 구하는 확률이다.

(2-3) k번 공을 뽑아 구한 수의 합을 확률변수 Y라 하면, $Y=kX$는 이항분포 $\mathrm{B}(k,\ 0.5)$를 따르고 평균은 $\frac{k}{2}$, 분산은 $\frac{k}{4}$이다. k가 충분히 크면 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{k}{2},\ \frac{k}{4}\right)$를 따르므로 $Z=\frac{Y-k/2}{\sqrt{k/4}}$는 표준정규분포를 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.4\le X\le 0.6)&=\mathrm{P}(0.4k\le Y\le 0.6k)\\&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y-k/2}{\sqrt{k/4}}\right|\le\frac{0.1k}{\sqrt{k/4}}\right)=\mathrm{P}(|Z|\le 0.2\sqrt{k})\ge 0.95\end{aligned}$$

그러므로 $0.2\sqrt{k}\ge 1.96$를 만족하는 자연수 k의 최솟값은 97이다.

<문항카드 15>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(D형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	거리, 여러 가지 미분법, 치환적분법
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y=f(t)$는 다음 조건을 만족한다.

< 조건 >

(가) $f(0)=1$

(나) $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $f'(t)>0$이다.

$t \geq 0$에 대하여 매개변수 방정식

$$x(t)=f(t)\cos(t^2-2t),\ y(t)=f(t)\sin(t^2-2t)$$

로 정의되는 점 $\mathrm{P}(x(t),y(t))$가 있다. 임의의 양수 a에 대하여 $0 \leq t \leq a$에서 점 P가 움직인 거리가 $\int_0^a e^t\sqrt{4(t^2-1)^2+(t+2)^2}\,dt$일 때, 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $f'(1)$을 구하시오. (80점)

(3-2) 모든 양의 실수 x에 대하여 $(f'(x)-(x+2)e^x)(f(x)-(x+1)e^x) \leq 0$가 성립함을 보이시오. (80점)

(3-3) $x \geq 0$에서 함수 $f(x)$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 매개변수 함수로 주어진 점이 움직인 거리를 적분으로 표현하고 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정

**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	김원경 외	비상교육	2020	pp. 80, 129, 155
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	pp. 89, 150, 179
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

– 매개변수 함수로 정의된 점의 움직인 거리를 합성함수 미분을 이용하여 구하고 환적분을 계산하여 미지의 함수를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	■ $\frac{dx}{dt}$와 $\frac{dy}{dt}$를 구하면 (각각 +10점) ■ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$를 구하면 (+30점) ■ $\frac{dx}{dt}$와 $\frac{dy}{dt}$를 쓰지 않고 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$를 바로 기술하면 (+50점) ■ $\sqrt{(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2}=e^x\sqrt{4(x^2-1)^2+(x+2)^2}$ 를 구하면 (+20점) ■ 변수를 바꾸지 않고 t가 포함된 식으로 표현하면 $\sqrt{(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2}=e^x\sqrt{4(x^2-1)^2+(x+2)^2}$ (+10점) 즉 감점 10점 ■ 과정이 맞고 답을 구하면 (+10점)	80
(3-2)	■ $f(x)=(x+1)e^x$ 또는 $f'(x)=(x+2)e^x$라고 생각하여 풀면 (0점)	80

	■ $(f'(x))^2-(x+2)^2e^{2x}$를 계산하여 오른쪽 항 (*)을 구하면 (+40점) ■ 풀이의 (**)에서 $(f'(x)^2-(x+2)^2e^{2x})$와 $(f(x)^2-(x+1)^2e^{2x})$의 곱이 0보다 작거나 같음을 보이면 (+20점) ■ $f'(x)+(x+2)e^x>0$와 $f(x)+(x+1)e^x>0$를 기술하면 (각각 +10점)	
(3-3)	■ $f(x)=(x+1)e^x$ 또는 $f'(x)=(x+2)e^x$라고 생각하여 풀면 (0점) ■ 적분이 ≤ 0임을 기술하면 (+30점) ■ 적분값 $\frac{1}{2}(f(a)-(a+1)e^a)^2$을 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 $f(x)=(x+1)e^x$를 구하면 (+10점)	80
	■ $f(x)=(x+1)e^x$ 또는 $f'(x)=(x+2)e^x$라고 생각하여 풀면 (0점) ■ $g(x)$를 설정하고 $g(x)\ge 0$을 기술하면 (+30점) ■ $g'(x)$을 계산하고 $g'(x)\le 0$을 보이면 (+30점) ■ $g(x)\le 0$를 보이고 $f(x)$를 구하면 (+20점)	

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 3]

(3-1) $\frac{dx}{dt}=f'(t)\cos(t^2-2t)-f(t)(2t-2)\sin(t^2-2t)$이고

$\frac{dy}{dt}=f'(t)\sin(t^2-2t)+f(t)(2t-2)\cos(t^2-2t)$이므로

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(f'(t))^2+f(t)^2(2t-2)^2$이다.

$\int_0^x\sqrt{(f'(t))^2+f(t)^2(2t-2)^2}\,dt=\int_0^x e^t\sqrt{4(t^2-1)^2+(t+2)^2}\,dt$이므로

$\sqrt{(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2}=e^x\sqrt{4(x^2-1)^2+(x+2)^2}$ 이다.

따라서 모든 양의 실수 x에 대하여

$(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2=e^{2x}\left(4(x^2-1)^2+(x+2)^2\right)$이므로 $x=1$을 대입하면

$(f'(1))^2=9e^2$이고 $f'(1)=3e$이다.

(3-2) 위의 풀이 $(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2=e^{2x}\left(4(x^2-1)^2+(x+2)^2\right)$에서

$(f'(x))^2=-f(x)^2(2x-2)^2+e^{2x}\left(4(x^2-1)^2+(x+2)^2\right)$이다.

$(f'(x))^2-(x+2)^2e^{2x}=-f(x)^2(2x-2)^2+4e^{2x}(x^2-1)^2=(2x-2)^2\left(-f(x)^2+e^{2x}(x+1)^2\right)$이므로

$(f'(x)^2-(x+2)^2e^{2x})(f(x)^2-(x+1)^2e^{2x})=-(2x-2)^2(f(x)^2-(x+1)^2e^{2x})^2\le 0$이다.

$f'(x)+(x+2)e^x>0$이고 $f(x)+(x+1)e^x>0$이므로

$x\ge 0$일 때 $(f'(x)-(x+2)e^x)(f(x)-(x+1)e^x)\le 0$이다.

(3-3) $a > 0$인 실수에 대하여

$$\int_0^a (f'(x) - (x+2)e^x)(f(x) - (x+1)e^x)dx \le 0$$이고

$$\int_0^a (f'(x) - (x+2)e^x)(f(x) - (x+1)e^x)dx = \left[\frac{1}{2}(f(x) - (x+1)e^x)^2\right]_0^a = \frac{1}{2}(f(a) - (a+1)e^a)^2 \le 0$$

이므로 $f(a) = (a+1)e^a$이고 $f(x)$의 연속성으로부터 모든 실수 $x \ge 0$에 대해

$f(x) = (x+1)e^x$이다.

[3-3 별해] $g(x) = (f(x) - (x+1)e^x)^2$라 할 때 $g(x) \ge 0$이다. (3-2)의 결과에 의해 양수 x에 대하여 $g'(x) = 2(f'(x) - (x+2)e^x)(f(x) - (x+1)e^x) \le 0$이다.

$g(0) = 0$이고 양수 x에 대하여 $g(x)$가 감소함수이므로 $g(x) \le 0$이다.

따라서 $g(x) = 0$이다. 그러므로 모든 실수 $x \ge 0$에 대해 $f(x) = (x+1)e^x$이다.