<문항카드 10>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(C형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	미분 가능, 여러 가지 미분법
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 세 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2}\ , x\ge\frac{3}{2} \\ 2x-2\ , 1<x\le\frac{3}{2} \\ -x+1\ , x\le 1 \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}(x-1)^2\ , x\ge 1 \\ -x+1\ , x<1\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}x+e^x-e\ , x\ge 1 \\ ex+1-e\ , x<1\end{cases}$$

에 대하여, 다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 함수 $y=h(x)$가 역함수를 가짐을 보이시오. (70점)

(1-2) 집합 $A=\{a\in\mathbb{R}\,|\,(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 미분 가능하지 않다.$\}$를 구하시오. (80점)

(1-3) 함수 $(h^{-1}\circ f)(x)$가 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않음을 보이시오. (80점)

3. 출제 의도

- 합성함수와 역함수의 미분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2) 미분 ① 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정

**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2020	pp. 88-103
	수학Ⅱ	황선옥 외	미래엔	2020	pp. 58
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

주어진 함수의 역함수와 합성함수을 구하고 미분이 불가능한 점을 찾는다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>(1-1)</td><td>■ $x>1$일 때 $h'(x)=1+e^x$를 맞게 구하면 (+20점)
■ $x<1$일 때 $h'(x)=e$를 맞게 구하면 (+20점)
■ $h(x)$가 증가함수이므로 역함수를 갖는다는 것을 설명하면 (+30점)</td><td>70</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(1-2)</td><td>■ $g(f(x))=\begin{cases}(x-\frac{3}{2})^2, x \ge \frac{3}{2} (+10점) \\ -2x+3 \ , 1<x \le \frac{3}{2} (+10점) \\ x \qquad , 0<x \le 1 (+10점) \\ x^2 \qquad , x \le 0 (+20점)\end{cases}$
■ (i) $x=\frac{3}{2}$에서 오른쪽 접선의 기울기가 0이고 왼쪽 접선의 기울기는 -2 (+10점)
■ (ii) $x=1$에서 오른쪽 접선의 기울기는 -2이고 왼쪽 접선의 기울기는 1 (+10점)
■ (iii) $x=0$에서 오른쪽 접선의 기울기는 1이고 왼쪽 접선의 기울기는 0 (+10점)</td><td rowspan="2">80</td></tr>
<tr><td>[별해]
■ $x=0, 1, \frac{3}{2}$을 제외한 점에서는 $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능함을 이용하여 합성함수의 미분가능성을 설명하면 (+30점)
■ (i) $x=0$에서 오른쪽 접선의 기울기는 1이고 왼쪽 접선의 기울기는 0 (+30점)
■ (ii) $x=1$에서 오른쪽 접선의 기울기는 -2이고 왼쪽 접선의 기울기는 1 (+10점)
■ (iii) $x=\frac{3}{2}$에서 오른쪽 접선의 기울기 0이고 왼쪽 접선의 기울기는 -2 (+10점)</td></tr>
</table>

(1-3)	■ 미분계수를 구하는 오른쪽 극한식에서 $\dfrac{1}{1+e}$ 임을 보이면 (+50점) ■ 미분계수를 구하는 왼쪽 극한식에서에서 $\dfrac{2}{e}$ 임을 보이면 (+30점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

(1-1) $h'(x)=\begin{cases}1+e^x, & x>1\\ e &, x<1\end{cases}$ 이고 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다. 따라서 역함수를 가진다.

(1-2)

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}(x-\frac{3}{2})^2, & x\ge\frac{3}{2}\\ -2x+3, & 1<x\le\frac{3}{2}\\ x, & 0<x\le 1\\ x^2, & x\le 0\end{cases}$$

에서, $x=0, 1, \frac{3}{2}$을 제외한 구간에서는 각각 다항함수이므로 미분가능하다.

$x=a$에서의 미분계수는 접선의 기울기와 같으므로,

(i) $x=\frac{3}{2}$에서 $(g\circ f)(x)$ $(x>\frac{3}{2})$의 접선의 기울기는 0이고 $(g\circ f)(x)$ $(x<\frac{3}{2})$의 접선의 기울기는 -2이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않다.

(ii) $x=1$에서 $(g\circ f)(x)$ $(x>1)$의 접선의 기울기는 -2이고 $(g\circ f)(x)$ $(x<1)$의 접선의 기울기는 1이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않다.

(iii) $x=0$에서 $(g\circ f)(x)$ $(x>0)$의 접선의 기울기는 1이고 $(g\circ f)(x)$ $(x<0)$의 접선의 기울기는 0이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않다.

따라서 $A=\left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$이다.

[1-2 별해] (합성함수를 구하지 않고)

$f(x)$가 미분 불가능한 점은 $x=1, \frac{3}{2}$이고, $g(x)$가 미분 불가능한 점은 $x=1$ 뿐이다.

한편 $f(x)=1$이 되는 점은 $x=0, \frac{3}{2}$이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=0, 1, \frac{3}{2}$을 제외한 점에서는 미분가능하다.

$x=0$일 때,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(f(t))-g(f(0))}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{g(-t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{t}=1$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{g(f(t))-g(f(0))}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{g(-t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^2}{t}=0$$

이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 미분 불가능하다.

$x=1$일 때,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(f(1+t))-g(f(1))}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{g(2t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{-2t}{t}=-2$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{g(f(1+t))-g(f(0))}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{g(-t)-g(1)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{t}=1$$

이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 미분 불가능하다.

$x=\frac{3}{2}$일 때,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(f(\frac{3}{2}+t))-g(f(\frac{3}{2}))}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{g(t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^2}{t}=0$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{g(f(\frac{3}{2}+t))-g(f(\frac{3}{2}))}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{g(2t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{-2t}{t}=-2$$

이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 불가능하다.

(1-3)

$$\lim_{t\to 0+}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{h^{-1}(1+t)-h^{-1}(1)}{t}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{h(x)-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{x+e^x-e-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{1+\frac{e^x-e}{x-1}}$$
$$=\frac{1}{1+e}$$

(두 번째 등식에서 $h^{-1}(t+1)=x$ 이용)

$$\lim_{t\to 0-}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{h^{-1}(2t+1)-h^{-1}(1)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\frac{1}{e}(2t+1)+1-\frac{1}{e}-1}{t}=\frac{2}{e}$$

따라서 $\lim_{t\to 0-}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}\neq\lim_{t\to 0+}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}$이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분불가능이다. (이 경우에도 $h^{-1}(2t+1)=x$로 치환하여 계산하는 것도 가능함.)

<문항카드 11>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(C형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	확률의 덧셈정리, 조건부 확률, 이항분포, 표준정규분포
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 어떤 질병에 걸릴 확률은 0.01이며 전체 주민 중 이 질병에 걸리는 환자 수는 이항분포를 따른다고 하자. 또한 진단키트를 이용하여 실제로 이 질병에 걸린 사람을 검사하였을 때 양성으로 판정할 확률은 0.99이고, 질병에 걸리지 않은 사람을 검사하였을 때 양성으로 판정할 확률은 0.03이라고 한다.

(2-1) 어떤 사람이 진단키트 검사로 양성판정을 받을 확률과 양성판정을 받았을 때 이 사람이 질병에 걸려 있을 확률을 각각 구하시오. (70점)

(2-2) 이 진단키트 검사결과 양성판정을 받은 사람 중에서 질병에 걸려 있는 환자 수는 이항분포를 따른다고 하자. 양성판정을 받은 768명 중에서 질병에 걸려 있는 환자 수가 210명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (80점)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

(2-3) 의료보험에서 이 질병에 걸린 환자 한 명을 치료하기 위해 부담하는 비용은 100만원이지만, 진단키트 검사로 조기 진단하는 경우 양성판정을 받으면 실제로 질병에 걸리는 것과
상관없이 한 명에 대해 부담하는 치료비용이 10만원으로 줄어든다.
다만 집단검진을 통해 전체 n명을 검사할 때 소요되는 검사비용 $C(n)$은 다음과 같다.

$$C(n) = \begin{cases} 6000n, & n > 40000 \\ 10000n - \dfrac{n^2}{10}, & n \le 40000 \end{cases}$$

어떤 지역 주민 전체 n명을 집단검진할 때, 의료보험에서 부담하는 총 비용(전체 주민에 대한 검사비용과 양성판정을 받은 모든 사람에 대한 치료비용을 더한 비용)의 기댓값이 집단검진하지 않을 때 질병에 걸릴 환자 전체에 대한 치료비용의 기댓값보다 작아지는 n의 최솟값을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 두 배반사건에 대한 확률의 덧셈정리를 이해하고 조건부확률의 개념을 이해하는지 평가한다.
- 이항분포와 정규분포와의 관계식을 이해하여 정규분포에서 확률을 구하는 과정을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	확률과 통계 (2) 확률 ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과 통계 (2) 확률 ② 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과 통계 (3) 통계 ① 확률분포 [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2020	pp. 44, 55, 85, 94, 97
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2020	pp. 59, 71, 109, 117, 121
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

– 두 사건이 배반일 때 덧셈정리를 활용하여 관심의 대상인 사건의 확률을 구하고 확률의 곱셈정리를 이용하여 조건부확률을 구한다.
– 이항분포의 평균과 분산을 구하여 이항분포와 정규분포와의 관계식을 이용하여 확률을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2–1)	■ 풀이과정을 통해 $\mathrm{P}(A)$의 값을 구하면 (+30점) ■ 풀이과정을 통해 $\mathrm{P}(D\|A)$ 의 값 $\frac{1}{4}$ 을 구하거나 또는	70

	$\dfrac{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{3}{100}}$ 에 대응되는 수식이 있으면 (+40점)	
(2-2)	■ 문제 2-1에서 구한 확률 $\frac{1}{4}$로부터 X의 기댓값 192를 구하면 (+20점) ■ X의 분산($\mathrm{V}(X)$) 144 또는 표준편차 12를 구하면 (+20점) ■ $\mathrm{P}(X \le 210) = \mathrm{P}(Z \le 1.5)$을 보이면 (+20점) ■ $\mathrm{P}(Z \le 1.5) = 0.93$을 구하면(+20점)	80
(2-3)	■ 예상되는 판정자수 $0.0396n$을 계산하면 (+10점) ■ 진단키트 검사를 실시하지 않았을 때 드는 총 비용 $0.01\times n\times 10^6$을 구하면 (+20점) ■ 진단키트 검사를 실시할 때 드는 총 비용 $C(n)+0.0396n\times 10^5$을 구하면 (+20점) ■ $10^4 n > 10^4 n - \frac{n^2}{10} + 3960n$을 풀어서 $n=39601$을 구하면 (+20점) $10^4 n \ge 10^4 n - \frac{n^2}{10} + 3960n$ $\quad\quad$ $n=39600$ ■ n의 최솟값 39601을 논리적으로 도출하면 (+10점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2]

(2-1) 질병에 걸리는 사건을 D, 양성으로 판정되는 사건을 A라 할 때 다음이 성립한다.

$\mathrm{P}(D)=0.01,\quad \mathrm{P}(D^C)=0.99,\quad \mathrm{P}(A|D)=0.99,\quad \mathrm{P}(A|D^C)=0.03$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(A\cap D^C)=\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)+\mathrm{P}(D^C)\mathrm{P}(A|D^C)=\dfrac{4\times 99}{10^4}=0.0396$이고

$\mathrm{P}(D|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap D)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)}{\mathrm{P}(A)}$이므로

$$\mathrm{P}(D|A)=\frac{\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)}{\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)+\mathrm{P}(D^C)\mathrm{P}(A|D^C)}=\frac{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{3}{100}}=\frac{1}{4}\text{이다.}$$

(2-2) 768명의 양성판정을 받은 사람 중에 실제로 질병에 걸린 환자 수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $B(768,\frac{1}{4})$를 따르므로 $\mathrm{E}(X)=192$이고 $\mathrm{V}(X)=144$이다. 이항분포를 정규분포로 근사시키면 정규분포 $\mathrm{N}(192,144)$를 이용하여 다음과 같이 $\mathrm{P}(X\le 210)$를 구할 수 있다.

$$\mathrm{P}(X\le 210)=\mathrm{P}\left(\frac{X-192}{\sqrt{144}}\le\frac{210-192}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)=0.5+0.43=0.93.$$

(2-3) 이 지역 주민 전체 수를 n이라 할 때, 예상되는 질병 환자 수는 $n\times 0.01$이고, 예상되는 양성판정자 수는 $n\times \mathrm{P}(A)=0.0396n$이다.

진단키트 검사를 실시여부에 따른 예상 총비용을 구하면

(i) 진단키트 검사를 실시하지 않았을 때 드는 총 비용 : $0.01\times n\times 10^6$ (원)

(ii) 진단키트 검사를 실시할 때 드는 총 비용: $C(n)+0.0396n\times 10^5$ (원)

이다. (i)의 비용이 (ii)보다 커지는 n의 최솟값을 구하자.

$n\le 40000$인 경우, $10^4 n > 10^4 n-\dfrac{n^2}{10}+3960n$을 풀면 $n>39600$이므로 n의 최솟값은 39601이다.

(구한 최솟값이 40000보다 작으므로 나머지 경우는 고려할 필요가 없다.)

<문항카드 12>

1. 일반 정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사
전형명		논술우수자 전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열(C형) / 문제 3
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	증가, 치환적분법, 급수의 합, 수열의 극한
예상 소요 시간		40분

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, $g(x)=\sin^2(\pi x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx,\ (n=1,2,\cdots)$$

로 정의할 때, 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. (80점)

(3-2) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (80점)

$$a_n \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(3-3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$이 성립함을 이용하여 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 적분의 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고 치환적분을 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2)미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (1)수열의 극한 ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. ② 급수 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. 미적분 (2)미분법 ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. ② 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. 미적분 (3)적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	김원경 외	비상교육	2019.3.1	pp. 11, 75, 126, 143
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018.3.1	pp. 82-84
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

- 치환적분과 적분의 성질을 이용하여 주어진 수열을 정적분으로 표현 가능한 급수의 합과 비교하고, 수열의 성질을 이용하여 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	■ $\sin^2(\pi x) = \dfrac{1-\cos(2\pi x)}{2}$를 구하면 (+40점) ■ 적분값을 맞게 구하면 (+40점)	80

	[별해] ■ $\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = \int_0^1 \cos^2\pi x\,dx$를 이용하면 (+40점) ■ 적분값을 맞게 구하면 (+40점)	
(3-2)	■ 치환적분 $\int_0^1 f(x)g(nx)dx \ = \frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt$을 적용하면 (+20점) ■ $\int_0^n dt = \sum_{k=1}^{k}\int_{k-1}^{k} dt$과 같이 적분 성질을 쓰면 (+20점) ■ f가 증가함수임을 이용하여 $\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt \le f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k-1}^{k} g(t)\,dt$를 보이면 (+20점) ■ g가 주기함수임을 이용하여 결론에 도달하면 (+20점)	80
(3-3)	■ (식 1)과 같은 부등식을 쓰면, (3-1)의 적분 계산값 $\frac{1}{2}$이 틀려도 (+30점) ■ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$을 쓰면, 앞의 상수가 틀려도 (+30점) ■ 최종 답이 맞으면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 3]

(3-1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$이므로 $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$가 성립한다. 따라서 $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$임을 이용하여 적분 식을 변형하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos(2\pi x))\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

[3-1 별해] $\sin^2\pi x + \cos^2\pi x = 1$이고, $\sin^2\pi x$와 $\cos^2\pi x$의 그래프의 대칭성과 주기성을 이용하면 $\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = \int_0^1 \cos^2\pi x\,dx$이므로 다음과 같이 적분값을 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx + \int_0^1 \cos^2\pi x\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\sin^2\pi x + \cos^2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(3-2) $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \ge 0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다.

치환적분과 적분의 성질 $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$를 이용하면 아래 식(*)가 성립한다.

$$a_n = \int_0^1 f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt \quad \cdots(*)$$

일반적으로 함수 $h(x)$가 $a \le x \le b$에서 $h(x) \ge 0$이면 정적분과 넓이의 관계에 의해

$\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$이 성립한다. 따라서 식 (*)의 $k-1 \le x \le k$에서 $f(x)$가 증가함수이고

$g(x) \ge 0$임을 이용하면, $f\left(\frac{t}{n}\right)g(t) \le f\left(\frac{k}{n}\right)g(t) \Leftrightarrow f\left(\frac{k}{n}\right)g(t) - f\left(\frac{t}{n}\right)g(t) \ge 0$로부터

$\int_{k-1}^{k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)g(t) - f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\right)dx \ge 0$이 성립한다. 이때, $\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{k}{n}\right)g(t)dt = f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k-1}^{k} g(t)dt$이고,

$g(x)$는 주기가 1인 함수임을 이용하면 위의 식 (*)에서

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k-1}^{k} g(t)\,dt = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\int_0^1 g(t)\,dt$$

가 성립한다. 따라서 (3-1)에서 구한 적분값 $\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{1}{2}$를 대입하면

$a_n \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$이 성립한다.

(3-3) (3-2)와 동일한 방법으로 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \le a_n \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

이 성립하고, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$이다.

한편,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)}\,dx = \int_0^1 \left(\ln(1+e^x)\right)'\,dx = \ln(1+e) - \ln 2$$ 이므로

구하는 값은 $\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$ 이다. ($\frac{1}{2}(\ln(1+e) - \ln 2)$, $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ 모두 정답)