# <문항카드 7>

## 1. 일반 정보

| 유형 | ☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | |
|---|---|---|
| 전형명 | 논술우수자 전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열(B형) / 문제 1 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학Ⅱ, 미적분 |
| | 핵심 개념 및 용어 | 도함수, 정적분, 극값, 증가, 감소 |
| 예상 소요 시간 | 25분 | |

## 2. 문항 및 제시문

**[문제 1]** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 아래 조건을 만족한다.

< 조건 >

(가) $f(0)=1$

(나) $0 \le x \le t$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $f(t)-2e^{-t}+1$이다.

다음 물음에 각각 답하시오.

**(1-1)** 함수 $f(x)$를 구하시오. (70점)

**(1-2)** 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $b$를 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선 $\ell$과 직선 $y=b$, 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (80점)

**(1-3)** $x$축 위를 움직이는 어떤 점의 시각 $t$에서의 위치가 $x(t) = -t^2+4t+1$이다. $x(t)$가 최댓값을 갖게 되는 $x$축 위의 점을 A라 하자. 점 A를 지나는 임의의 직선 $\ell$에 대하여 점 $(0,1)$에서 직선 $\ell$까지의 거리를 $\mathrm{d}(\ell)$이라 할 때, $\mathrm{d}(\ell)$이 최대가 되는 직선 $\ell$의 방정식을 구하시오. (80점)

## 3. 출제 의도

적분과 미분의 관계, 곡선의 길이, 함수의 극값, 접선, 넓이에 대한 이해도를 평가한다.

## 4. 출제 근거

### 가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| 자연계열A-문제 2 | 수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용<br>[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.<br>[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.<br>수학Ⅱ (3) 적분 ② 정적분<br>[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.<br>미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용<br>[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.<br>미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법<br>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.<br>미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용<br>[12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.<br>[12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. |

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

### 나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학Ⅱ | 박교식 외 | 동아출판 | 2020.3.1 | pp. 71-96, 126-132 |
| | 미적분 | 이준열 외 | 천재교육 | 2020.3.1 | pp. 102-111, 138-180 |
| 기타 | 해당 사항 없음 | | | | |

## 5. 문항 해설

미지의 함수의 곡선의 길이로부터 함수를 구하고, 그 함수와 관련된 최솟값, 접선을 구하고, 넓이를 구한다.

## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (1-1) | ■ $\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = f(x)-2e^{-x}+1$를 구하면 (+20점)<br>■ $f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$를 구하면 (+20점)<br>■ $f(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}-\frac{1}{4}$를 구하면 (+30점) | 70 |

| | | |
|---|---|---|
| (1–2) | ■ $f(x)$의 최솟값이 $f(\ln 2)=\frac{3}{4}$ 임을 보이면 (+20점)<br>■ 접선 $\ell$이 $y=-\frac{3}{4}x+1$임을 (또는 다른 필요한 과정을) 보이면 (+30점)<br>■ 두 직선 $y=b$와 $\ell$의 교점의 $x$좌표 $\frac{1}{3}$을 구하면 (+10점)<br>■ 구하는 넓이가 $\frac{17}{24}-\ln 2$임을 보이면 (+20점) | 80 |
| (1–3) | ■ $\mathrm{A}=(5,0)$임을 보이면 (+20점) (이 단계가 틀리면, 이하 부분점수 각각 +0점)<br>■$\mathrm{d}(\ell)$이 최대가 되는 직선 $\ell$은 두 점 $(0,1)$과 $\mathrm{A}$를 지나는 직선에 수직임을 (또는 다른 필요한 과정을) 언급하면 (+30점)<br>■ 직선 $\ell$의 방정식 $y=5(x-5)$을 구하면 (+30점) | 80 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

(1-1) $\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt=f(x)-2e^{-x}+1$이다. 양변을 $x$에 대해 미분하면

$\sqrt{1+(f'(x))^2}=f'(x)+2e^{-x}$이고 양변을 제곱하여 정리하면 $f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$이다. 양변을 $x$에 대해 적분하면 $f(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}+c$ 이다. $f(0)=1$이므로, $c=-\frac{1}{4}$이 되어서, 함수 $f(x)$는 다음과 같다. $f(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}-\frac{1}{4}$

(1-2) $f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$이므로, $x=\ln 2$일 때만 $f'(x)=0$이다.

$f''(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}$이므로, 모든 실수 $x$에 대해 $f''(x)>0$이다. 따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f(\ln 2)=\frac{3}{4}$이고, $a=\ln 2$, $b=\frac{3}{4}$ 이다.

$f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$로부터, $f'(0)=-\frac{3}{4}$ 이다. 따라서, 점 $(0,1)$에서의 접선 $\ell$의 방정식은 $y-1=f'(0)(x-0)$으로부터 $y=-\frac{3}{4}x+1$이다.

직선 $y=b$와 접선 $\ell$의 교점의 $x$좌표는 $-\frac{3}{4}x+1=\frac{3}{4}$로부터 $x=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 영역의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}e^x+e^{-x}+\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}\right)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^x+e^{-x}-1\right)dx=\frac{17}{24}-\ln 2$$

**[1-2 별해]** (1-2)의 풀이에서 영역의 넓이를 구할 때, 도형의 넓이를 이용하여 $\frac{17}{24}-\ln 2$를 구할 수도 있다.

**(1-3)** $-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$ 이므로 $\mathrm{A}=(5,0)$이다.

$\mathrm{d}(\ell)$ 이 최대가 되는 직선 $\ell$은 두 점 $(0,1)$과 A를 지나는 직선에 수직이다.

따라서 $\ell$의 기울기는 5이고 구하는 직선의 방정식은 $y=5(x-5)$이다.

# <문항카드 8>

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | |
| 전형명 | 논술우수자 전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열(B형) / 문제 2 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 확률과 통계 |
| | 핵심 개념 및 용어 | 기댓값, 표준편차, 배반사건, 경우의 수, 조건부 확률, 확률의 곱셈 정리, 중복조합 |
| 예상 소요 시간 | 30분 | |

## 2. 문항 및 제시문

**[문제 2]** 상자 안에 '+1'이 적힌 공 10개와 '-1'이 적힌 공 10개가 들어 있다.
다음 물음에 각각 답하시오.

**(2-1)** 상자에서 임의로 공을 한 개 꺼내 나온 수를 기록하고 다시 넣는 시행을 반복하였다. 10번을 반복할 때 공에 적힌 수의 분산이 0.2 이상 0.4 이하였다면, '+1'이 몇 번 나왔는지 가능한 횟수를 모두 구하시오. (70점)

**(2-2)** 상자에서 $A$가 5개의 공을 임의로 꺼낸 후, $B$가 5개의 공을 임의로 꺼내고, $C$는 나머지 공을 가진다. $A$, $B$, $C$가 가진 공 중에서 '+1'이 적힌 공의 개수를 각각 $a, b, c$라 하자. $a > b > c$일 확률을 $\frac{q}{p}$로 나타낼 때 $q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) (80점)

**(2-3)** 공 20개를 잘 섞어서 일렬로 나열하였다. 이때 같은 수끼리 연속되어 있는 부분을 하나의 묶음이라 하자. 예를 들어 '+1 +1 -1 -1 +1'에는 묶음이 3개있고, '-1 +1 -1 +1 +1'에는 묶음이 4개있다. 묶음이 5개가 되도록 공 20개를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하시오. (80점)

## 3. 출제 의도

- 반복시행에서 확률을 구하여 확률변수의 기댓값과 표준편차를 구할 수 있는지 평가한다.
- 경우의 수와 중복조합의 수를 이해하는지 평가한다.

## 4. 출제 근거

### 가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| 자연계열A-문제 2 | 확률과 통계 (1) 경우의 수 ⊡ 순열과 조합<br>[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.<br>확률과 통계 (2)확률 ⊡ 확률의 뜻과 활용<br>[12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.<br>[12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>확률과 통계 (3)통계 ⊡ 확률분포<br>[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값과 표준편차를 구할 수 있다. |

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정

**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

### 나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 확률과 통계 | 박교식 외 | 동아출판 | 2019 | pp. 20, 44, 51, 88 |
| | 확률과 통계 | 김원경 외 | 좋은책신사고 | 2019 | pp. 25, 45, 50, 84 |
| 기타 | 해당 사항 없음 | | | | |

## 5. 문항 해설

1) 반복시행에서 구한 이산형확률변수의 평균과 분산을 계산한다.
2) 경우의 수를 통하여 확률을 구한다.
3) 중복조합을 이용한 배열할 수 있는 경우의 수를 계산한다.

## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (2-1) | 확률변수를 정의하고<br>■ 합과 제곱합을 알면 (각각 +10점씩)<br>■ 분산의 식을 세우면 (+20점)<br>■ 부등식을 풀어 $X$의 값을 정확하게 구하면 (+30점) | 70 |
| (2-2) | ■ $(a,b,c)$의 가능한 경우가 $(5,4,1)$, $(5,3,2)$임을 보이면 (+20점)<br>■ 각 경우의 확률식을 옳게 구하면 (각각 +20점 씩)<br>■ 답을 정확히 구하면 (+20점) | 80 |

| | | |
|---|---|---|
| (2-3) | ▪ 묶음의 수가 5인 경우가 2가지 임을 알면 (+20점)<br>▪ 묶음의 수가 $k=2,3$인 경우의 방법의 수를 각각 구하면 (각각 +20점)<br>($_9C_2$를 계산하는 부분과 $_9C_1$을 계산하는 부분이 있는지를 각각 확인)<br>▪ 답: $2\times36\times9$ 또는 $648$가지를 구하면 (+20점) | 80 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

**[문제 2]**

**(2-1)** '+1' 이 나온 횟수를 $X$라 하면 평균은 $m=\dfrac{X-(10-X)}{10}=\dfrac{2X-10}{10}$이고 적힌 수의 제곱의 합은 $10$이므로 분산은 $V(X)=\dfrac{10}{10}-\left(\dfrac{2X-10}{10}\right)^2=1-\left(\dfrac{X}{5}-1\right)^2$이다. 조건으로부터

$$0.2\le V(X)\le 0.4 \Leftrightarrow 0.6\le\left(\frac{X}{5}-1\right)^2\le 0.8 \Leftrightarrow 15\le(X-5)^2\le 20$$

이므로 $(X-5)^2=16$이고 $X=1$ 또는 $9$이다.

**[2-1 별해]** 10개의 수를 $x_1,x_2\cdots,x_{10}$이라 하면 평균은 $m=\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{i=1}^{10}x_i$, 제곱합은

$\displaystyle\sum_{i=1}^{10}x_i^2=10$이고 분산은 $\displaystyle\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-m)^2=\frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10m^2\right)=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2-m^2=1-m^2$이다.

10개의 수 중에서 '+1'이 나온 횟수를 $X$라 하면 $X$는 $0, 1, \cdots, 10$을 가질 수 있고

$\displaystyle\sum_{i=1}^{10}x_i=X-(10-X)=2X-10$, $m=\dfrac{X}{5}-1$이다.

$m$은 $-1, -0.8, -0.6, \cdots, 0.8, 1$의 값을 가질 수 있으므로

$0.2\le 1-m^2\le 0.4$를 만족하는 $m$은 $\pm0.8$이고 $X$는 $1$ 또는 $9$이다.

**(2-2)** $a>b>c$를 만족하는 $(a,b,c)$는 $(5,4,1)$ 또는 $(5,3,2)$ 뿐이다. 그러므로 $A, B, C$가 '+1'이 적힌 공을 각각 $a,b,c$개씩 가질 확률은 아래와 같다.

| $a$ | $b$ | $c$ | 확률 |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 1 | $\dfrac{_{10}C_5}{_{20}C_5}\times\dfrac{_5C_4\times{_{10}C_1}}{_{15}C_5}\times\dfrac{_1C_1\times{_9C_9}}{_{10}C_{10}}$ |
| 5 | 3 | 2 | $\dfrac{_{10}C_5}{_{20}C_5}\times\dfrac{_5C_3\times{_{10}C_2}}{_{15}C_5}\times\dfrac{_2C_2\times{_8C_8}}{_{10}C_{10}}$ |

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5^3}{11\cdot13\cdot17\cdot19}$이므로 구하는 답은 $125$이다.

**(2-3)** (단계 1) 묶음의 수가 5개가 될 방법은 '+1'의 묶음으로 시작하거나 '-1'의 묶음으로 시작하는 두 가지 경우가 있으며, 두 경우에 따른 방법의 수는 동일하다.

(단계 2) '+1'의 묶음으로 시작하여 5개의 묶음이 된다면 '+1'로 구성된 묶음의 수 3개, '-1'로 구성된 묶음의 수가 2개이어야 한다.

(단계 3) (단계 2)에서 같은 수가 적힌 10개의 공을 $k(k=3$ 또는 $k=2)$개의 묶음으로 구성하는 방법의 수는 10개의 동일한 공을 서로 다른 $k$개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법의 수와 동일하고, $X_1+X_2+\cdots+X_k=10$을 만족하는 양의 정수해의 개수와 같다. 그러므로 방법의 수는 ${}_k\mathrm{H}_{10-\mathrm{k}}={}_9\mathrm{C}_{k-1}$이다.

(단계 4) '+1'이 적힌 10개의 공을 3개의 묶음으로, '-1'이 적힌 10개의 공은 2개의 묶음으로 나누는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{H}_7\times{}_2\mathrm{H}_8={}_9\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_1=36\times9=324$이다.

(단계 5) 전체 묶음의 수가 5개가 되는 방법의 수는 $2\times36\times9=648$이다.

## <문항카드 9>

### 1. 일반 정보

| 유형 | ☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 | |
|---|---|---|
| 전형명 | 논술우수자 전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열(B형) / 문제 3 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학Ⅱ, 미적분 |
| | 핵심 개념 및 용어 | 미분가능, 평균값 정리, 이계도함수, 극솟값 |
| 예상 소요 시간 | 40분 | |

### 2. 문항 및 제시문

**[문제 3]** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 집합 $A_f$를 다음과 같이 정의하자.

$$A_f = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{모든 실수 } x\text{에 대하여 } f(x) \geq f(0) + mx\text{가 성립한다.}\}$$

예를 들어, $f(x) = |x|$에 대하여 집합 $A_f$는 $A_f = \{m \mid -1 \leq m \leq 1\}$이다.
다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $f(x) = x^3$에 대하여 $A_f$는 공집합이 됨을 보이시오. (80점)

(3-2) 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f''(x) \geq 0$을 만족하면, $f'(0) \in A_f$가 성립함을 보이시오. (단, 그림을 이용한 직관적인 설명은 허용하지 않습니다.) (80점)

(3-3) 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f''(x) \geq 0$을 만족하면, 실제로 $A_f = \{f'(0)\}$가 됨을 보이시오. (단, 그림을 이용한 직관적인 설명은 허용하지 않습니다.) (80점)

### 3. 출제 의도

- 미분계수의 정의와 기하학적 의미와 이해하고, 평균값 정리를 활용할 수 있는지를 평가한다.

## 4. 출제 근거

### 가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| 자연계열A-문제 2 | 수학Ⅱ (2)미분 ① 미분계수<br>[12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.<br>수학Ⅱ (2)미분 ③ 도함수의 활용<br>[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.<br>[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.<br>미적분 (2)미분법 ② 여러 가지 미분법<br>[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. |

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

### 나) 자료 출처

| 참고자료 | | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | | 수학Ⅱ | 황선욱 외 | 미래엔 | 2018.3.1 | pp. 73-80 |
| | | 미적분 | 김원경 외 | 비상교육 | 2019.3.1 | pp. 96-101 |
| 기타 | 해당 사항 없음 | | | | | |

## 5. 문항 해설

이계도함수의 부호가 항상 $0$ 이상인 경우에는 미분계수의 정의, 평균값 정리와 함수의 증가, 감소, 최솟값 등을 활용하여 주어진 부등식을 만족하는 직선이 접선 밖에 없음을 보인다.

## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (3-1) | ▪ $m \le 0$일 때 해집합 맞게 구하면 (+30점)<br>▪ $m > 0$일 때 해집합 맞게 구하면 (+30점)<br>▪ $A_f = \varnothing$임을 논리적으로 설명하면 (+20점) | 80 |
| | [별해 1]<br>▪ $m > 0$인 경우 그래프 개형이 맞으면 (+20점)<br>▪ $m = 0$인 경우 그래프 개형이 맞으면 (+20점)<br>▪ $m < 0$인 경우 그래프 개형이 맞으면 (+20점)<br>▪ $A_f = \varnothing$임을 논리적으로 설명하면 (+20점) | |

| | | |
|---|---|---|
| | [별해 2]<br>■ 귀류법을 쓰기위해 모든 실수 $x$에 대해 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 $m$이 존재한다고 가정하면 (+10점)<br>■ $x=1$일 때 $m \leq 1$임을 보이면 (+20점)<br>■ $x=-1$일 때 $m \geq 1$임을 보이면 (+20점)<br>■ $m=1$일 때 모순이 됨을 보이면 (+30점) | |
| (3-2) | ■ $g(0)=0$을 언급하면 (+10점) ■ $g''(x) \geq 0$을 이용하여 $g'(x)$가 증가함수임을 보이면 (+30점)<br>■ $g(x)$의 최솟값이 0임을 보이면 (+30점)<br>■ 결론 $f'(0) \in A_f$을 논리적으로 도출하면 (+10점) | 80 |
| | [별해 1]<br>■ $x=0$일 때 등식 성립함을 보이면 (+10점)<br>■ $x \neq 0$일 때 평균값 정리를 두 번 적용한 (식 *)을 맞게 구하면 (+30점)<br>■ $x \neq 0$일 때 조건 $f''(t_2) \geq 0$과 (식 **)로부터 결론을 도출하면 (+40점) | |
| | [별해 2]<br>■ $x=0$일 때 등식 성립함을 보이면 (+10점)<br>■ $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수가 됨을 언급하면 (+10점)<br>■ $x \neq 0$일 때 평균값 정리를 적용하여 (식 3)을 보이면 (+20점)<br>■ $x>0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$을 보이면 (+20점)<br>■ $x<0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$을 보이면 (+20점) | |
| (3-3) | ■ $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq m$임을 보이면 (+30점)<br>■ $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq m$임을 보이면 (+30점)<br>■ $f'(0)=m$임을 보이면 (+20점) | 80 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

**[문제 3]**

(3-1) 모든 실수 $x$에 대하여 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 $m$이 존재하지 않음을 보이면 된다. $m$의 조건에 따라 부등식 $x^3 - mx = x(x^2 - m) \geq 0$을 풀면,

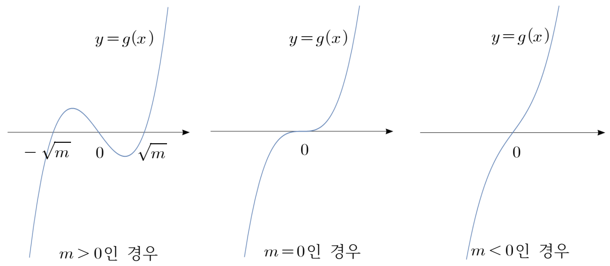
(i) $m \leq 0$일 때 해집합은 $\{x \mid x \geq 0\}$

(ii) $m > 0$일 때 해집합은 $\{x \mid -\sqrt{m} \leq x \leq 0$ 또는 $x \geq \sqrt{m}\}$

이므로 모든 실수 $x$에 대해 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 $m$은 존재하지 않는다.

따라서 $A_f = \varnothing$이다.

**[3-1 별해 1]** $m>0$, $m=0$, $m<0$인 경우를 나누어 $g(x)=x^3-mx$의 그래프의 개형을 그리면,




이므로, 모든 실수 $x$에 대하여 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 $m$은 존재하지 않는다.

**[3-1 별해 2]** 모든 실수 $x$에 대하여 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 $m$이 존재하면 모순임을 보이자. 모든 실수 $x$에 대하여 부등식이 성립한다면 $x=1$일 때 $m \leq 1$이 성립하고, $x=-1$일 때 $m \geq 1$이 성립하므로 $m=1$이어야 한다. 이때 부등식 $x^3 \geq x$의 해집합은 $\{x| -1 \leq x \leq 0$ 또는 $x \geq 1\}$이므로 모든 실수 $x$에 대해 부등식이 성립한다는 가정에 모순이다.

**(3-2)** $g(x)=f(x)-f(0)-f'(0)x$라 할 때, $g(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다. $g'(x)=f'(x)-f'(0)$의 도함수에 대해 $g''(x)=f''(x) \geq 0$가 성립하므로 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다.
즉 $g'(x)$는 $g'(0)=0$인 증가함수이므로 $x<0$에 대하여 $g'(x) \leq 0$이 성립하고, $x>0$에 대하여 $g'(x) \geq 0$이 성립한다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $g(0)=0$을 갖는다.
즉, 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$이 성립하므로 $f'(0) \in A_f$이다.

**[3-2 별해 1]** $x=0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x=0$이 성립한다.
$x \neq 0$일 때 평균값 정리를 반복하여 적용하면,

$$f(x)-f(0)-f'(0)x=f'(t_1)x-f'(0)x=(f'(t_1)-f'(0))x=f''(t_2)t_1x$$

를 만족시키는 실수 $t_1$, $t_2$가 존재한다.
(단, (i) $x>0$일 때 $0<t_2<t_1<x$, (ii) $x<0$일 때 $x<t_1<t_2<0$)
이때, 이계도함수에 대한 조건으로부터 $f''(t_2) \geq 0$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$이 성립하고, $f'(0) \in A_f$이다.

**[3-2 별해 2]** $x=0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x=0$이 성립한다. $x \neq 0$일 때 평균값 정리를 적용하면
$f(x)-f(0)-f'(0)x=f'(t_1)x-f'(0)x=(f'(t_1)-f'(0))x$ (식 1)
를 만족시키는 실수 $t_1$이 존재한다. (단, (i) $x>0$일 때 $0<t_1<x$, (ii) $x<0$일 때 $x<t_1<0$)
한편, 이계도함수에 대한 조건으로부터 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다.

따라서

$x>0$일 때 (식 1)에서 $f'(t_1)-f'(0)\geq 0$, $x>0$이 되어 $f(x)-f(0)-f'(0)x\geq 0$이 성립하고,

$x<0$일 때 (식 1)에서 $f'(t_1)-f'(0)\leq 0$, $x<0$이 되어 $f(x)-f(0)-f'(0)x\geq 0$이 성립한다.

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)-f(0)-f'(0)x\geq 0$이 성립하므로 $f'(0)\in A_f$이다.

**(3-3)** (3-2)에 의해 $m\in A_f$이면 $m=f'(0)$임을 보이면 된다.

$m\in A_f$라 하면, 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq f(0)+mx$이므로

(i) $x>0$일 때, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq m$로부터 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq m$이 성립하고

(ii) $x<0$일 때, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\leq m$로부터 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\leq m$이 성립한다.

따라서 $m\in A_f$인 임의의 $m$에 대해 $m=f'(0)$이 성립하므로 $A_f=\{f'(0)\}$이다.