<문항카드 4>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	경우의 수, 기댓값, 여사건의 확률, 이항분포, 표준정규분포, 중복조합
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 어느 과수원에서 해마다 사과, 배, 감을 수확하여 일부는 소비자에게 직접 팔기도 한다. 생산하는 사과의 무게는 평균 250g, 표준편차 15g인 정규분포를 따른다고 한다.
다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 구별이 되지 않는 바구니에 사과, 배, 감을 각각 2개 이상씩, 모두 9개의 과일을 담아 주문 제작하는 상점이 있다. 이 상점에서 4개의 과일바구니를 주문하는 방법의 수를 구하시오. (단, 동일한 구성의 바구니를 중복해서 주문할 수 있다.) (70점)

(1-2) 사과 9개를 담아 판매용 포장을 할 때, 사과 9개의 표본평균이 240g 이하이면 재포장을 한다. 16개가 들어있는 판매용 포장을 하는 경우에도 9개가 들어있는 포장 때와 같은
재포장률을 유지하려고 한다. 16개 사과의 표본평균이 얼마 이하가 되어야 하는지 구하시오. (80점)

(1-3) 판매용 사과가 상해 있을 확률은 0.1이고, 사과 9개가 들어있는 한 상자를 9000원에 판매하는데 이 중 3600원이 수익이라고 한다. 한 상자에서 상한 사과가 3개 이상 나오면
사과는 돌려받지 않고 받은 돈을 환불한다는 조건으로 판매할 때, 한 상자 당 예상 수익은 $0.9^9 \times a+b$원이다. 정수 a와 b의 값을 각각 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

1. 정규분포의 성질을 이해하고 확률을 구하는지 평가한다.
2. 이항분포를 이해하고 이항분포의 평균과 표준편차를 구하는지 평가한다.
3. 중복조합을 이해하고 중복조합의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 1	확률과 통계 (3) 통계 ㉮ 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. 확률과 통계 (1) 경우의 수 ㉮ 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2020	pp. 99, 109, 114-117, 27
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2020	pp. 91, 100, 105-107, 22
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

정규분포에서 확률을 구한다. 이항분포에서 평균과 분산을 구하여 이산형 확률변수의 기댓값과 표준편차를 구한다. 중복조합의 수를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪ 과일바구니 1개를 구성하는 방법의 관계식을 세우면 (+30점) ▪ 1개를 구성하는 방법의 수 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$ 중 한 가지를 쓰면 (+10점) ▪ 1개를 구성하는 방법의 수가 k일 때 과일바구니 4개를 만드는 방법의 수의 관계식을 구하면 (+20점) ▪ ${}_k\mathrm{H}_4={}_{\mathrm{k}+3}\mathrm{C}_4$를 구하면 (+10점) (이 문제에서는 $k=10$이므로 ${}_{10}\mathrm{H}_4={}_{13}\mathrm{C}_4=\dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2}=715$)	70
(1-2)	▪ $\overline{X_n}$의 분포를 알면 (+20점) ▪ $\mathrm{P}(\overline{X_9}\le 240)=\mathrm{P}(\overline{X_{16}}\le a)$의 관계식을 바로 세우면 (+30점) ▪ 풀이와 함께 답을 구하면 (+30점)	80
(1-3)	▪ 사과 1 상자 중 상한 사과의 수의 분포를 알면 (+20점) ▪ 사과 1상자를 환불할 확률 $1-\dfrac{22}{9}A$를 알면 (+20점) ▪ 수익에 대한 분포를 알면 (+20점) ▪ 기댓값을 구하여 $a=22000$, $b=-5400$를 쓰면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

(1-1) 바구니에 들어간 사과, 배, 감의 수를 각각 a, b, c라 하면, 사과, 배, 감이 각각 적어도 2개씩, 모두 9개가 되도록 바구니를 구성하는 방법의 수는 다음 방정식을 만족하는 정수해의 개수와 같다.

$a+b+c=9$ (단, $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 2$)

이 방정식을 만족하는 정수해의 개수는 $x+y+z=3$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$가지이다.

가능한 10가지의 과일바구니 중 중복을 허용하여 4개를 고르는 방법의 수는

${}_{10}\mathrm{H}_4={}_{13}\mathrm{C}_4=\dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2}=13 \cdot 11 \cdot 5=715$이다.

(1-2) 사과 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(250, 225)$을 따르고, 사과 n개의 표본평균 $\overline{X_n}$는 정규분포 $N\left(250, \dfrac{225}{n}\right)$을 따른다. 따라서 $\mathrm{P}(\overline{X_9} \leq 240)=\mathrm{P}(\overline{X_{16}} \leq a)$를 만족하는 a를 구하면 된다.

$\mathrm{P}(\overline{X_9} \leq 240)=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{240-250}{15/3}\right)=\mathrm{P}(Z \leq -2)$이고 $\mathrm{P}(\overline{X_{16}} \leq a)=\mathrm{P}(Z \leq \dfrac{a-250}{15/4})$이므로

$a=242.5$이다. 따라서 16개 사과 포장의 평균이 242.5g 이하일 때 재포장을 해야 한다.

(1-3) $A=0.9^9$라 하자. 포장된 사과 중 상한 사과의 수를 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(9, 0.1)$을 따르고, 환불할 확률은

$$\mathrm{P}(X \geq 3)=1-\mathrm{P}(X \leq 2)=1-0.9^9-{}_9\mathrm{C}_1 \times 0.9^8 \times 0.1-{}_9\mathrm{C}_2 \times 0.9^7 \times 0.1^2=1-\frac{22}{9}\mathrm{A}$$

이다.

확률변수 Y를 사과 한 상자 판매할 때의 수익이라고 하면 Y의 확률분포표는 다음과 같다.

y	-5400	3600
$\mathrm{P}(Y=y)$	$1-\dfrac{22}{9}A$	$\dfrac{22}{9}A$

그러므로 $\mathrm{E}(Y)=-5400 \times (1-\dfrac{22}{9}A)+3600 \times \dfrac{22}{9}A=-5400+22000A$이다.

따라서 $a=22000$이고 $b=-5400$이다.

<문항카드 5>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	거리, 합성함수 미분, 치환적분법
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 이계도함수는 연속함수이고, 아래 조건을 모두 만족한다. 다음 물음에 각각 답하시오.

< 조건 >

(가) $f(0)=1$

(나) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

(다) $0\le x\le t$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 $\ell(t)$라 할 때,

모든 양의 실수 t에 대하여 $\ell(t)=\int_0^t f(x)\,dx$가 성립한다.

(2-1) $f'(0)$을 구하시오. (70점)

(2-2) $g(x)=f(x)+f'(x)$라 할 때, $x>0$에 대하여 $g(x)$를 구하시오. (80점)

(2-3) $x>0$에 대하여 $f(x)$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

곡선의 길이를 적분으로 표현하고 치환적분과 합성함수 미분을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료		도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서		미적분	김원경 외	비상교육	2020	pp. 80, 129, 155
		미적분	이준열 외	천재교육	2020	pp. 89, 150, 179
기타		해당 사항 없음				

5. 문항 해설

미지의 함수로 정의된 곡선의 길이를 적분으로 표현하고 합성함수 미분과 치환적분을 활용하여 미지의 함수를 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	■ 적분 등식을 쓰면 (+30점) ■ $\sqrt{1+f'(t)^2}=f(t)$를 쓰면 (+30점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+10점)	70
(2-2)	■ $2f'(t)f''(t)=2f(t)f'(t)$를 구하면 (+20점) ■ $f''(t)=f(t)$를 구하면 (+20점) ■ $g'(x)=g(x)$를 구하면 (+20점) ■ 앞의 과정이 맞고 $g(x)=e^x$를 구하면 (+20점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)	80
(2-3)	■ 인수분해하고 $f(x)-f'(x)=e^{-x}$를 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+40점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)	80

	[별해 1] ■ $f'(x)=e^x-f(x)$를 구하고 방정식 $1=-e^{2x}+2e^x f(x)$를 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+40점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)	
	[별해 2] ■ $f(x)-f'(x)=e^{-x}$를 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+40점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)	
	[별해 3] ■ $g(x)=f(x)+f'(x)=e^x$의 양변에 e^x를 곱하면 (+20점) ■ 적분하여 $e^x f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$를 구하면 (+50점) ■ 답을 얻으면 (+10점)	

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2]

(2-1) $\int_0^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^t f(x)dx$가 성립하므로 미분하면 모든 실수 $t\geq 0$에 대하여 $\sqrt{1+f'(t)^2}=f(t)$가 성립한다. 따라서 $t=0$을 대입하면 $f'(0)=0$이다.

(2-2) $\sqrt{1+f'(t)^2}=f(t)$에서 $1+f'(t)^2=f(t)^2$이다.
미분하면 $2f'(t)f''(t)=2f(t)f'(t)$이고 $f'(t)>0$이므로 $f''(t)=f(t)$이다.
그러므로 $g'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+f(x)=g(x)$이다.
조건 (나)에 의해 $g(x)>0$이므로 $\frac{g'(x)}{g(x)}=1$이고, 양변을 적분하면 $\ln g(x)=x+c$이다.
조건 (가)와 (2-1)의 결과로부터 $g(0)=f(0)+f'(0)=1$이므로 $c=0$이다. 그러므로 $g(x)=e^x$이다.

(2-3) $1=f(x)^2-f'(x)^2=(f(x)+f'(x))(f(x)-f'(x))$이므로 $f(x)-f'(x)=\frac{1}{g(x)}=e^{-x}$이다.
한편, (2-2)에 의해 $g(x)=f(x)+f'(x)=e^x$이므로 앞의 식과 연립하여 풀면 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$이다.

[2-3 별해 1] $g(x)=f(x)+f'(x)=e^x$이므로 $f'(x)=e^x-f(x)$이다.
따라서 $1=f(x)^2-f'(x)^2=f(x)^2-(e^x-f(x))^2=-e^{2x}+2e^x f(x)$이다.
그러므로 $2e^x f(x)=e^{2x}+1$이고 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$이다.

[2-3 별해 2] $h(x)=f(x)-f'(x)$라 할 때, $h'(x)=-f(x)+f'(x)=-h(x)$이므로

$h(x)=e^{-x}$가 됨을 (2-2)와 같은 과정을 통해 보이고, $f(x)=\dfrac{g(x)+h(x)}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$와

같이 구할 수도 있다.

[2-3 별해 3]

$g(x)=f(x)+f'(x)=e^x$의 양변에 e^x를 곱하면 $e^x(f(x)+f'(x))=e^{2x}$를 얻는다.

이 식을 적분하면 $e^x f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$를 얻는다. $x=0$을 대입하면 $f(0)=\dfrac{1}{2}+C=1$이므로

$C=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $e^x f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}$이고 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$이다.

<문항카드 6>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	이계도함수, 여러 가지 미분법
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 함수 $f(x)=\begin{cases} x-\ln x\,, & x>1 \\ x, & x\le 1\end{cases}$에 대하여, $x(1)=e$인 이계도함수가 연속인 함수 $x(t)$는 모든 실수 $t>\dfrac{1}{e-1}$에 대하여 $f(x(t))=(e-1)t-\ln t$를 만족한다. 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $t>\dfrac{1}{e-1}$인 모든 t에 대하여 $x(t)>1$임을 보이시오. (80점)

(3-2) $x'(1), x''(1)$의 값을 각각 구하시오. (80점)

(3-3) $t>\dfrac{1}{e-1}$인 모든 t에 대하여 $x''(t)>0$임을 보이시오. (80점)

3. 출제 의도

합성함수의 이계도 함수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2020	pp. 88-105
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	pp. 85-92
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

미분을 이용하여 문제의 조건을 만족하는 관계식을 구하고 합성함수의 이계도 함수를 계산하여 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪ $g'(t)=e-1-\frac{1}{t}$를 구하면 (+20점) ▪ 최솟값 $1+\ln(e-1)(>1)$를 구하면 (+30점) ▪ $x(t)>1$를 논리적으로 설명하면 (+30점)	80
(3-2)	▪ 식 (*)를 구하면(+20점) ▪ $x'(1)=\frac{e^2-2e}{e-1}$를 구하면 (+20점) ▪ 식 (**)를 구하면(+20점) ▪ $x''(1)=\frac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$를 구하면 (+20점)	80
(3-3)	▪ [단계 1]에서 $x'(t)>0$ 을 보이면(+10점) ▪ [단계 2]에서 $\frac{1}{a}=\frac{x'(a)}{x(a)}$임을 보이면 (+10점) ▪ $x(a)=(e-1)a$임을 보이면 (+10점) ▪ $a=(e-1)a$가 되어 모순임을 보이면 (+20점)	80

	▪ [단계 3]에서 $x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$〉0 (+10점) ▪ [단계 4]에서 사잇값 정리 이용하여 증명 (+20점)	
	▪ $x''(t)$를 계산하고 $x''(a)\le 0$을 가정하여 $x(a)\le(e-1)a$임을 보이면(+30점) ▪ $a\ge x(a)$임을 보이면 (+20점) ▪ $a\ge(e-1)a$를 보여 모순임을 보이면 (+30점)	
	▪ [단계 1]에서 $x''(t)$를 계산하여 $x''(a)=0$을 가정하여 $x(a)=(e-1)a$임을 보이면 (+30점) ▪ [단계 1]에서 $a=(e-1)a$가 되어 모순임을 보이면 (+20점) ▪ [단계 2]에서 $x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$〉0 (+10점) ▪ [단계 3]에서 사잇값 정리를 이용하여 증명하면(+20점)	
	[별해 3] ▪ $g(x)=f(x)+f'(x)=e^x$의 양변에 e^x를 곱하면 (+20점) ▪ 적분하여 $e^x f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$를 구하면 (+50점) ▪ 답을 얻으면 (+10점)	

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 3]

(3-1) $g(t)=(e-1)t-\ln t$라 할 때, $g'(t)=e-1-\dfrac{1}{t}$이므로 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{e-1}$일 때 최솟값 $1+\ln(e-1)(>1)$을 갖는다. 따라서 $f(x(t))>1$이고 $x\le 1$에서 $f(x)\le 1$이므로 $x(t)>1$이다.

(3-2) (3-1)에 의해 주어진 조건식은 아래 식 (1)과 같다.

$(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)\ \cdots(1)$

식 (1)을 미분하면 $(e-1)-\dfrac{1}{t}=x'(t)-\dfrac{x'(t)}{x(t)}$이고, $t=1$을 대입하면

$x'(1)=\dfrac{e^2-2e}{e-1}$이다.

식 (1)을 두 번 미분하면 $\dfrac{1}{t^2}=x''(t)-\dfrac{x''(t)x(t)-x'(t)^2}{x(t)^2}$이고, $t=1$을 대입하면

$x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$이다.

(3-3) (단계 1) (3-2)에서 구한 식 $e-1-\dfrac{1}{t}=x'(t)-\dfrac{x'(t)}{x(t)}=x'(t)\left(1-\dfrac{1}{x(t)}\right)$에서

$t>\dfrac{1}{e-1}$이면 $x'(t)>0$ 이다.

(단계 2) $f(x(t))=(e-1)t-\ln t$를 한 번 미분한 식과 두 번 미분한 식을 정리하면 각각 다음과 같다.

$(e-1)-\frac{1}{t}=x'(t)-\frac{x'(t)}{x(t)}$ $\cdots(1)$

$\frac{1}{t^2}=x''(t)-\frac{x''(t)x(t)-x'(t)^2}{x(t)^2}$ $\cdots(2)$

$a>\frac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)=0$이면, 식 (2)에서 $\frac{1}{a^2}=\left(\frac{x'(a)}{x(a)}\right)^2$이고,

$x(a), x'(a)>0$이므로 $\frac{1}{a}=\frac{x'(a)}{x(a)}$이다. 또한 식 (1)에서 $x'(a)=e-1$이고, 따라서

$x(a)=(e-1)a$이다.

이때, $(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)$로부터,

$(e-1)a-\ln a=x(a)-\ln x(a)=(e-1)a-\ln(e-1)a$

이므로 $a=(e-1)a$가 성립되어 모순이다. 따라서 $t>\frac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)\neq 0$이 성립한다.

(단계 3) (3-2)의 결과로부터 $x''(1)=\frac{2e^2-3e}{(e-1)^3}>0$이다.

(단계 4) $a>\frac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)<0$인 점이 존재하면 (단계 3)과 사잇값 정리에 의하여 $x''(b)=0$인 b가 존재하지만 (단계 2)에 모순이다. 따라서 $t>\frac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)>0$이 성립한다.

[3-3 별해 1] $a>\frac{1}{e-1}$인 어떤 a에 대하여 $x''(a)\leq 0$가 성립한다고 가정하고 모순이 생김을 보이자. $g(t)=(e-1)t-\ln t$에 대하여 $f(x(t))=g(t)$이므로 $f'(x(t))x'(t)=g'(t)$와 $f''(x(t))(x'(t))^2+f'(x(t))x''(t)=g''(t)$가 성립하므로

$x''(t)=\frac{g''(t)f'(x(t))-g'(t)f''(x(t))x'(t)}{f'(x(t))^2}$이다.

이로부터 $x''(a)\leq 0$이면 $g''(a)(f'(x(a)))^2\leq(g'(a))^2f''(x(a))$를 얻는다.

위 부등식을 계산하여 정리하면 $x(a)>1$이므로 $x(a)-1\leq a(e-1)-1$, 즉

$x(a)\leq(e-1)a$를 얻는다. $(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)$으로부터,

$(e-1)a-\ln a=x(a)-\ln x(a)\leq(e-1)a-\ln x(a)$이므로 $a\geq x(a)=f^{-1}(g(a))$이고

$a-\ln a=f(a)\geq g(a)=(e-1)a-\ln a$이다. 따라서 $a\geq(e-1)a$가 성립하여 모순이 생긴다.

따라서 $t>\frac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)>0$이 성립한다.

[3-3 별해 2] (단계 1) $a>\frac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)=0$이 성립한다고 가정하고 모순이 생김을 보이자. $g(t)=(e-1)t-\ln t$에 대하여 $f(x(t))=g(t)$를 두 번 미분하고 정리한 식

$x''(t)=\frac{g''(t)f'(x(t))-g'(t)f''(x(t))x'(t)}{f'(x(t))^2}$

로부터 $x''(a)=0$이면 $g''(a)(f'(x(a)))^2=(g'(a))^2f''(x(a))$를 얻는다. 이 식을 계산하여

정리하면 $x(a)>1$이므로 $x(a)-1=a(e-1)-1$, 즉 $x(a)=(e-1)a$를 얻는다.

$(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)$ 로부터 $(e-1)a-\ln a=x(a)-\ln x(a)=(e-1)a-\ln(e-1)a$

이므로 $a=(e-1)a$가 성립되어 모순이다.

따라서 $t>\dfrac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)\neq 0$이 성립한다.

(단계 2) (3-2)의 결과로부터 $x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}>0$이다.

(단계 3) $a>\dfrac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)<0$인 점이 존재하면 (단계 2)와 사잇값 정리에 의하여 $x''(b)=0$인 b가 존재하지만 (단계 1)에 모순이다. 따라서 $t>\dfrac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)>0$이 성립한다.