

2020학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 문제지(자연계열 A형)

[문제 1] 함수 $f(x)$ 는 양의 실수에서 정의되고 두 번 미분가능하다. 임의의 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 l 은 y 축과 $(0, g(t))$ 에서 만나고 x 축과 $(h(t), 0)$ 에서 만난다. 이 경우 $g(t) = \frac{2}{t} - \ln t$ 이고 $h(1) = \frac{2}{3}$ 이다.

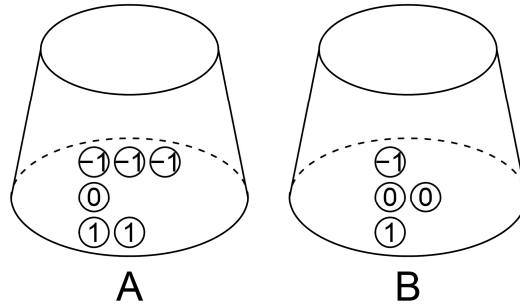
(1-1) $f(1)$ 을 구하시오. (70점)

(1-2) $f''(t)$ 를 구하시오. (80점)

(1-3) $f(t)$ 를 구하시오. (80점)

[문제 2] 다음과 같은 실험을 한다.

아래 그림과 같이 상자 **A**와 상자 **B**가 있고, 각 공에는 숫자 -1, 0 또는 1이 표시되어 있다.
 (가) 상자 **A**에는 ③의 공 세 개, ①의 공 한 개, ①의 공 두 개가 들어있다.
 (나) 상자 **B**에는 ③의 공 한 개, ①의 공 두 개, ①의 공 한 개가 들어있다.
 상자 **A**에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내 숫자가 같으면 이 두 개의 공을 상자 **B**로 옮기고, 숫자가 다르면 **B**로 옮기지 않는다.
 그다음에 상자 **B**에서 임의로 한 개의 공을 꺼내 표시된 숫자를 확인한다. 이 수를 확률변수 X 라고 하자. 그리고 공들을 처음 상태로 되돌린다.

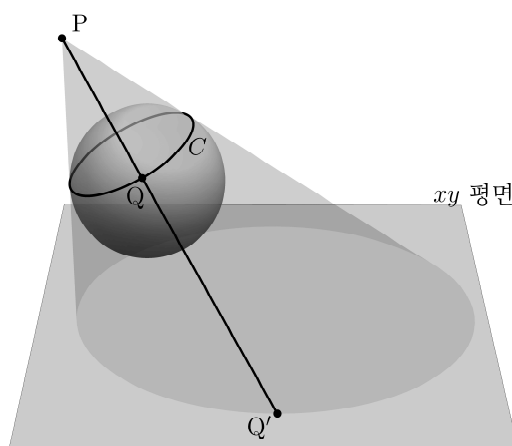


(2-1) 확률 $P(X=1)$ 을 구하시오. (80점)

(2-2) $X=1$ 일 때 상자 **A**에서 꺼냈던 두 개의 공이 서로 같은 숫자일 확률을 구하시오. (70점)

(2-3) 위의 실험을 3회 독립 시행하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하자. 확률 $P(\bar{X} \leq 0.7)$ 을 구하시오. (80점)

[문제 3] 좌표공간의 점 $P(1,0,4)$ 를 지나는 직선이 구 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ 과 접하는 점들의 집합을 곡선 C 라 하자. 점 P 를 지나는 직선이 C 위의 한 점 Q 를 지나 xy 평면과 만나는 점을 Q' 라 하자.



(3-1) 점 $Q(a,b,c)$ 에 대응되는 Q' 의 y 좌표를 a, b, c 로 나타내시오. (80점)

(3-2) 곡선 C 를 포함하는 평면의 방정식을 구하시오. (80점)

(3-3) 점 Q' 의 y 좌표가 최대가 되는 점 Q 의 좌표를 구하시오. (80점)

2020학년도 세종대학교 수시모집 논술고사 자연계열(A형) 채점기준표

문항 번호	풀이	배점 및 참고사항
1-1	곡선 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선은 두 점 $(0, g(1)) = (0, 2)$ 와 $(h(1), 0) = (\frac{2}{3}, 0)$ 을 지나므로 기울기 $f'(1) = -\frac{2}{2/3} = -3$ 이다. 따라서 $f(1) = -1$ 이다.	• 기울기 -3을 구하면 30점 • 답 $f(1) = -1$을 구하면 70점
1-2	점 $(t, f(t))$ 에서 접선의 방정식은 $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ 이므로 y 절편은 $f(t) - tf'(t)$ 이다. 즉 $g(t) = \frac{2}{t} - \ln t = f(t) - tf'(t)$ 이다. 양변을 t 에 대하여 미분하면 $-\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t} = f'(t) - (f'(t) + tf''(t)) = -tf''(t)$ 가 된다. 따라서 $f''(t) = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2}$ 이다.	• $g(t) = \frac{2}{t} - \ln t = f(t) - tf'(t)$을 구하면 30점 • 답 $f''(t) = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2}$을 구하면 80점
1-3	$f''(t)$ 를 적분하면 $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + C$ 를 얻는다. $f'(1) = -3$ 이므로 $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1$ 이다. 따라서 $f(t) = \frac{1}{t} - \ln t - t - 1$ 이다.	• $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + C$을 구하면 30점 • $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1$을 구하면 50점 • $f(t) = \frac{1}{t} - \ln t - t - 1$을 구하면 80점
2-1	A_m : 상자 A에서 ①의 공 2개를 꺼낼 사건 A_p : 상자 A에서 ①의 공 2개를 꺼낼 사건 A_d : 상자 A에서 숫자가 다른 2개의 공을 꺼낼 사건 $P(A_m) = \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, $P(A_p) = \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$, $P(A_d) = 1 - P(A_p) - P(A_m) = \frac{11}{15}$ B_1 : 상자 B에서 ①의 공을 꺼내는 사건 $P(X=1) = P(B_1)$ $= P(A_m \cap B_1) + P(A_p \cap B_1) + P(A_d \cap B_1)$ $= P(A_m)P(B_1 A_m) + P(A_p)P(B_1 A_p) + P(A_d)P(B_1 A_d)$ $= \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \times \frac{3}{6} + \frac{11}{15} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.	• $P(B_1 A_m) = \frac{1}{6}$, $P(B_1 A_p) = \frac{1}{2}$, $P(B_1 A_d) = \frac{1}{4}$을 구하면 40점. • 답 $\frac{1}{4}$을 구하면 80점
2-2	$X=1$ 일 경우, 상자 A에서 꺼낸 두 개의 공이 서로 같은 숫자일 확률은 다음과 같다. $P(A_m B_1) + P(A_p B_1) = \frac{P(A_m)P(B_1 A_m) + P(A_p)P(B_1 A_p)}{P(B_1)}$ $= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \times \frac{3}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1/15}{1/4} = \frac{4}{15}$	• $P(A_m)P(B_1 A_m) + P(A_p)P(B_1 A_p) = \frac{1}{15}$을 구하면 40점 • 답 $\frac{4}{15}$을 구하면 70점
2-3	여사건의 확률을 이용하여 $P(\overline{X} \leq 0.7) = 1 - P(\overline{X} > 0.7)$ 이다. $\{\overline{X} > 0.7\}$ 인 사건은 $\{\overline{X} = 1\}$ 인 사건과 같으며, $\overline{X} = 1$ 이 되기 위해서는 3회 시행의 결과는 모두 1이어야 한다. 각각의 시행은 다른 시행의 결과에 영향을 받지 않으므로 $P(\overline{X} = 1) = (P(X=1))^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ 이다. 답은 $P(\overline{X} \leq 0.7) = 1 - P(\overline{X} > 0.7) = 1 - P(\overline{X} = 1) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}$	• $P(\overline{X} > 0.7) = P(\overline{X} = 1) = \{P(X=1)\}^3$이 답에 있으면 40점 • 답 $\frac{63}{64}$을 구하면 80점

2020학년도 세종대학교 수시모집 논술고사 자연계열(A형) 채점기준표

3-1	두 점 P, Q를 잇는 직선의 방정식은 $(1, 0, 4) + t(a-1, b, c-4)$이고 Q'의 z-좌표는 0이므로 $t = \frac{4}{4-c}$이고 y좌표는 $\frac{4b}{4-c}$이다.	• 직선의 방정식 $(1, 0, 4) + t(a-1, b, c-4)$을 구하면 40점 • 답 $\frac{4b}{4-c}$을 구하면 80점
3-2	곡선 C는 구 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$위에 있고 $(x, y, z-2) \cdot (x-1, y, z-4) = 0$을 만족하므로 두 방정식을 풀면 $x+2z=5$를 얻는다.	• $(x, y, z-2) \cdot (x-1, y, z-4) = 0$ 또는 $x^2 - x + y^2 + z^2 - 6z + 8 = 0$을 구하면 50점 • 답 $x+2z=5$을 구하면 80점
3-3	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$과 $x+2z=5$로부터 $(5-2z)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$을 얻고 이 식을 풀면 $y = \sqrt{-5z^2 + 24z - 28}$이다. 따라서 Q'의 y좌표는 $\frac{4\sqrt{-5z^2 + 24z - 28}}{4-z}$이다. 이 식을 미분하여 정리하면 $\frac{4(-8z+20)}{(4-z)^2\sqrt{-5z^2 + 24z - 28}}$이므로 $z = \frac{5}{2}$일 때, Q'의 y좌표의 최댓값을 얻는다. 따라서 답은 $Q\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ [별해] 곡선 C를 xy평면에 정사영한 곡선을 $\overline{C}$라 하자. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$과 $x+2z=5$에서 $\overline{C}$의 방정식 $5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 4y^2 = \frac{16}{5}$을 얻는다. 따라서 $x = \frac{4}{5}\cos t + \frac{1}{5}, y = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin t$라 하면 $z = \frac{-2}{5}\cos t + \frac{12}{5}$이다. (3-1)로부터 Q'의 y좌표는 $y = \frac{4b}{4-c} = \frac{4\sqrt{5}\sin t}{4+\cos t}$이다. $\frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{5}(4\cos t + 1)}{(4+\cos t)^2} = 0$으로부터 $\cos t = -\frac{1}{4}, \sin t = \frac{\sqrt{15}}{4}$이다. 따라서 Q'의 y좌표의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{3}}$이고 $Q\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$이다.	• Q'의 y좌표는 $\frac{4\sqrt{-5z^2 + 24z - 28}}{4-z}$을 구하면 30점 • $z = \frac{5}{2}$을 구했으면 60점 • 답 $Q\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$을 구하면 80점 [별해] • $5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 4y^2 = \frac{16}{5}$ 20점 • $x = \frac{4}{5}\cos t + \frac{1}{5}, y = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin t, z = \frac{-2}{5}\cos t + \frac{12}{5}$ 각 매개화에 대하여 +10점씩 • $\cos t = -\frac{1}{4}$을 구하면 +10점 • 답 $Q\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$을 구하면 80점

2020학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 자연계열(A형) 모범답안

[문제 1]

(1-1) 곡선 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선은 두 점 $(0, g(1)) = (0, 2)$ 와 $(h(1), 0) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ 을 지나므로 기울기 $f'(1) = -\frac{2}{2/3} = -3$ 이다. 따라서 $f(1) = -1$ 이다.

(1-2) 점 $(t, f(t))$ 에서 접선의 방정식은 $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ 이므로 y 절편은 $f(t) - tf'(t)$ 이다. 즉 $g(t) = \frac{2}{t} - \ln t = f(t) - tf'(t)$ 이다. 양변을 t 에 대하여 미분하면 $-\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t} = f'(t) - (f'(t) + tf''(t)) = -tf''(t)$ 가 된다. 따라서 $f''(t) = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2}$ 이다.

(1-3) $f''(t)$ 를 적분하면 $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + C$ 를 얻는다. $f'(1) = -3$ 이므로 $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1$ 이다. 따라서 $f(t) = \frac{1}{t} - \ln t - t - 1$ 이다.

2020학년도 세종대학교 수시모집 논술고사 자연계열(A형) 모범답안

[문제 2]

(2-1) 상자 A에서 ①의 공 2개를 꺼낼 사건을 A_m , 상자 A에서 ①의 공 2개를 꺼낼 사건을 A_p , 상자 A에서 숫자가 다른 2개의 공을 꺼낼 사건을 A_d 라고 하자. 그러면 $P(A_m) = \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, $P(A_p) = \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$, $P(A_d) = 1 - P(A_p) - P(A_m) = \frac{11}{15}$ 이다.

$X=1$ 인 사건은 상자 B에서 ①의 공을 꺼내는 사건이며 이 사건을 B_1 이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(B_1) = P(A_m \cap B_1) + P(A_p \cap B_1) + P(A_d \cap B_1) \\ &= P(A_m)P(B_1|A_m) + P(A_p)P(B_1|A_p) + P(A_d)P(B_1|A_d) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \times \frac{3}{6} + \frac{11}{15} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

[주의] 사건 A_d 의 확률 $\frac{11}{15}$ 은 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다: 사건 A_d 를 “①의 공 1개와 ②의 공 1개”, “①의 공 1개와 ③의 공 1개”, “②의 공 1개와 ③의 공 1개”의 사건으로 분할하여 산출하면 $P(A_d) = \frac{{}_3C_1}{{}_6C_2} + \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} + \frac{{}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{11}{15}$ 이다.

(2-2) $X=1$ 인 사건은 상자 B에서 ①의 공을 꺼내는 사건이며 이 사건을 B_1 이라 하자. $X=1$ 일 경우, 상자 A에서 꺼낸 두 개의 공이 서로 같은 숫자일 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(A_m|B_1) + P(A_p|B_1) &= \frac{P(A_m \cap B_1) + P(A_p \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_m)P(B_1|A_m) + P(A_p)P(B_1|A_p)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \times \frac{3}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1/15}{1/4} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

[별해] $P(A_d|B_1) = \frac{P(A_d \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_d)P(B_1|A_d)}{P(B_1)} = \frac{\frac{11}{15} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{11}{15}$ 이므로 답은

$$1 - P(A_d|B_1) = \frac{4}{15} \text{ 이다.}$$

(2-3) 여사건의 확률을 이용하여 $P(\overline{X} \leq 0.7) = 1 - P(\overline{X} > 0.7)$ 이다. $\{\overline{X} > 0.7\}$ 인 사건은 $\{\overline{X} = 1\}$ 인 사건과 같으며, $\overline{X} = 1$ 이 되기 위해서는 3회 시행의 결과는 모두 1 이어야 한다. 각각의 시행은 다른 시행의 결과에 영향을 받지 않으므로 $P(\overline{X} = 1) = (P(X=1))^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ 이다.

그러므로 답은 $P(\overline{X} \leq 0.7) = 1 - P(\overline{X} > 0.7) = 1 - P(\overline{X} = 1) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}$ 이다.

[별해] 3회 시행의 결과를 i, j, k 라고 하자. 여기서 i, j, k 는 $-1, 0$ 또는 1 이다. i, j, k 가 모두 1 인 경우를 제외하고, 확률 $P(X=i) \times P(X=j) \times P(X=k)$ 를 합하여 답 $\frac{63}{64}$ 을 산출할 수 있다.

$-1, 0$ 또는 1 을 관찰한 경우의 확률은 $P(X=-1) = \frac{53}{180}, P(X=0) = \frac{41}{90}, P(X=1) = \frac{1}{4}$ 이다.

2020학년도 세종대학교 수시모집 논술고사 자연계열(A형) 모범답안

[문제 3]

(3-1) 두 점 P, Q 를 잇는 직선의 방정식은 $(1, 0, 4) + t(a-1, b, c-4)$ 이고

Q' 의 z -좌표는 0이므로 $t = \frac{4}{4-c}$ 이고 y 좌표는 $\frac{4b}{4-c}$ 이다.

(3-2) 곡선 C 는 구 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ 위에 있고 $(x, y, z-2) \cdot (x-1, y, z-4) = 0$ 을 만족하므로 두 방정식을 풀면 $x + 2z = 5$ 를 얻는다.

(3-3) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ 과 $x + 2z = 5$ 로부터 $(5-2z)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ 을 얻고 이 식을 풀면

$y = \sqrt{-5z^2 + 24z - 28}$ 이다. 따라서 Q' 의 y 좌표는 $\frac{4\sqrt{-5z^2 + 24z - 28}}{4-z}$ 이다. 이 식을 미분하여

정리하면 $\frac{4(-8z+20)}{(4-z)^2\sqrt{-5z^2+24z-28}}$ 이므로 $z = \frac{5}{2}$ 일 때, Q' 의 y 좌표의 최댓값을 얻는다. 따라서

답은 $Q\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이다.

[별해]

곡선 C 를 xy 평면에 정사영한 곡선을 $\overline{C}$ 라 하자. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ 과 $x + 2z = 5$ 에서 $\overline{C}$ 의

방정식 $5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 4y^2 = \frac{16}{5}$ 을 얻는다. 따라서 $x = \frac{4}{5}\cos t + \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin t$ 라 하면

$z = \frac{-2}{5}\cos t + \frac{12}{5}$ 이다. (3-1)로부터 Q' 의 y 좌표는 $y = \frac{4b}{4-c} = \frac{4\sqrt{5}\sin t}{4+\cos t}$ 이다.

$\frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{5}(4\cos t + 1)}{(4+\cos t)^2} = 0$ 으로부터 $\cos t = \frac{-1}{4}$, $\sin t = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다. 따라서 Q' 의 y 좌표의 최댓값은

$\frac{4}{\sqrt{3}}$ 이고 $Q\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이다.