모의논술고사 문제 및 해설

2019

자연계

1. 문항 및 제시문

[문제 1] 두 어린이 A와 B가 가위바위보 게임을 한다. 그런데 매 게임마다 A는 가위와 바위, B는 바위와 보 중에 임의로 내며, 게임의 횟수를 셀 때는 비긴 게임도 포함한다.

(1-1) 5번 게임을 하면서 A는 '가위, 바위, 가위, 바위, 가위'를 냈는데 2번 이기고 2번 지고, 1번 비겼다. 이런 결과가 나올 수 있도록 B가 낼 수 있는 방법의 수를 구하시오. (60점)

(1-2) A와 B가 게임을 하는데 A가 적어도 1번 이상 이길 확률이 0.5 이상 되기 위해서는 게임을 몇 번 이상 하여야 하는지 구하시오. (60점)

(1-3) 게임을 n번 하였을 때 A가 이긴 횟수 k에 대하여, A가 받는 상금 9^k(원)을 확률변수 X라 하자. 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하시오. (60점)

2. 출제 의도

이항분포를 이해하고 이항정리를 활용하여 기댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 출제 근거

가) 교육과정 출제근거 (성취기준)

문항 및 제시문		관련 성취기준
1-1	교육과정	확률과 통계
	성취기준·성취수준	확통1111
1-2	교육과정	확률과 통계
	성취기준·성취수준	확통1213/1214/1223/1312-1
1-3	교육과정	확률과 통계
	성취기준·성취수준	확통1223/1312-1

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	신항균 외	지학사	2015	46-48, 113-116
	확률과 통계	황선욱 외	신사고	2016	38-41, 107-109

4. 문항 해설

(1-1) A가 낸 가위바위보를 이용하여 B가 낼 수 있는 경우를 논리적으로 찾는 문제이다.

(1-2) ‘적어도’에서 유추하여 여확률을 구하는 문제이다.

(1-3) 이항분포에서 확률을 구하고 이항정리를 이용하여 기댓값을 구하는 문제이다.

5. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	· A와 B가 비길 경우를 기술하면 (+10점) · A가 B를 이기는 방법을 기술하면 (+10점) · A가 B에게 지는 방법을 기술하면 (+10점) · 위 경우를 정확히 알고 답을 정확히 구하면 (+30점)	60
1-2	· A가 B를 이길 확률이 $\frac{1}{4}$ 임을 기술하면 (+20점) · 부등식 $1-(\frac{3}{4})^n \geq 0.5$를 구하면 (+30점) · 답 (3번 이상)을 구하면 (+10점)	60
1-3	· 확률 $\mathrm{P}(X=9^k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$ 를 구하면 (+20점) · 기댓값의 식 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}9^k\times{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$ 를 쓰면 (+20점) · 답 3^n을 구하면 (+20점)	60

6. 예시 답안

(1-1) A와 B가 가위바위보 게임에서 낸 것을 (A, B)와 같이 순서쌍으로 나타내자. A가 B와 비기기 위해서는 (바위, 바위)가 되어야 한다. A가 B를 이기기 위해서는 (가위,보)가 되어야 한다. A가 B에 지는 방법은 (가위, 바위)와 (바위, 보) 이렇게 두 가지가 있다. A가 낸 것을 윗줄에 쓰고 B가 낸 것을 밑에 줄에 쓴다고 생각하자.

A	가위 바위 가위 바위 가위
B	

한 번 비겨야 하므로 A의 한 '바위' 밑 B의 자리에 '바위'를 써야 한다. A가 두 번 이겨야 하므로 A의 두 개의 '가위' 밑 B의 자리에 '보'를 써야 한다. 따라서 A의 나머지 한 '바위' 밑 B의 자리에 '보'를 A의 나머지 한 '가위' 밑 B의 자리에는 '바위'를 써야 한다. 순서를 고려하지 않으면

(바위, 바위), (가위, 보), (가위, 보), (바위, 보), (가위, 바위)

이렇게 다섯 개의 순서쌍을 가져야 한다. 그러므로 가능한 방법의 수는 2×3 즉 6개이다.

(1-2) 조건에 의해서 (가위,보), (바위,바위), (가위,바위), (바위,보) 중 A가 B를 이긴 경우는 (가위,보)이므로

A가 B를 이길 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다. 따라서, 게임을 n번 했을 때 A가 1번 이상 이길 확률은 n번 모두 이기지 못하는 확률의 여확률이므로 $1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$이 된다. 그러므로 $1-\left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0.5$를 풀면 $n\geq 3$이므로 3번 이상 게임을 해야 한다.

(1-3) $X=9^k$일 확률은 $\mathrm{P}(X=9^k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$ 이므로

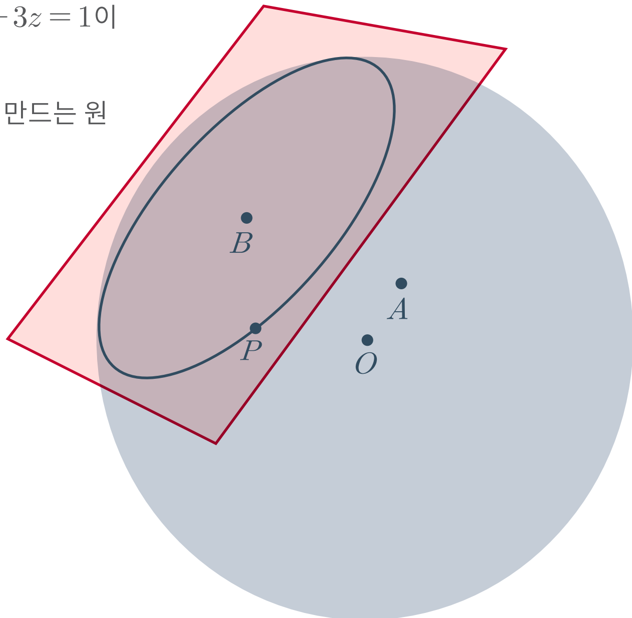
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}9^k\times{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{9}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}=\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)^n=3^n \text{ 이다.}$$

(위의 계산에서 $\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{9}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}=\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)^n$는 이항정리를 이용하여 전개한 식이다.)

1. 문항 및 제시문

[문제 2] 구 $x^2+y^2+z^2=1$와 평면 $-x+2y+3z=1$이 만나서 만드는 원의 중심을 A라 하자.
구 $x^2+y^2+z^2=1$와 평면 $x+z=1$ 이 만나서 만드는 원 D의 중심을 B라 하자.

(2-1) A를 구하시오. (60점)
(2-2) $\cos(\angle AOB)$를 구하시오. (60점)
(2-3) D위의 임의의 점을 P라 할 때,
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$의 최솟값을 구하시오. (60점)



2. 출제 의도

평면과 구의 방정식의 의미를 알고 활용하여 내적을 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 출제 근거

가) 교육과정 출제근거 (성취기준)

문항 및 제시문		관련 성취기준
2-1	교육과정	기하와 벡터
	성취기준·성취수준	기벡1331/1334
2-2	교육과정	기하와 벡터
	성취기준·성취수준	기벡1331/1332/1334
2-3	교육과정	기하와 벡터
	성취기준·성취수준	기벡1331/1332/1334

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	204-212
	기하와 벡터	신항균 외	지학사	2015	174-177

4. 문항 해설

(2-1) 외부의 한 점에서 평면에 내린 수선의 발을 구하는 문제이다.

(2-2) 내적을 이용하여 두 벡터 사이의 각도의 $\cos$값을 구하는 문제이다.

(2-3) 크기는 일정하지만 움직이는 두 벡터의 내적은 두 벡터 사이의 각도의 함수임을 알고 그 최솟값을 구하는 문제이다.

5. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	· $\overrightarrow{OA}$와 $(-1,2,3)$이 평행함를 알면 (+20점) · $\overrightarrow{OA}=(-t,2t,3t)$라 놓으면 (+20점) · 최종적으로 A를 구하면 (+20점)	60
2-2	· (2-1)과 같은 방법으로 B를 구하면 (+30점) · 내적을 이용하여 $\cos(\angle AOB)$를 구하면 (+30점) · (별해) $\overrightarrow{OA}$ 대신에 $(-1,2,3)$을 $\overrightarrow{OB}$대신에 $(1,0,1)$을 이용하여 계산하여 답을 구하는데 벡터의 방향에 대한 언급이 없으면 (30점)	60
2-3	· $\angle POB=\dfrac{\pi}{4}$임을 계산하면 (+10점) · $\angle POA$ 의 최댓값이 $\alpha+\dfrac{\pi}{4}$임을 보이면 (+20점) · $\cos(\angle POA)$의 최솟값은 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$임을 기술하면 (+10점) · 최종적으로 올바른 답을 구하면 (+20점)	60

6. 예시 답안

(2-1) $\overrightarrow{OA}$가 평면 $-x+2y+3z=1$에 수직이므로 $\overrightarrow{OA}$와 $(-1,2,3)$는 평행하다. 그러므로 $\overrightarrow{OA}=(-t,2t,3t)$ 이고 A는 평면 $-x+2y+3z=1$ 위에 있으므로 $t+4t+9t=1$이다. 따라서 $t=\frac{1}{14}$ 이고 $A(-\frac{1}{14},\frac{1}{7},\frac{3}{14})$ 이다.

(2-2) $\overrightarrow{OB}$ 가 평면 $x+z=1$에 수직이므로 $\overrightarrow{OB}$와 $(1,0,1)$은 평행하다. 그러므로 $\overrightarrow{OB}=(t,0,t)$이고 B는 평면 $x+z=1$ 위에 있으므로 $t+t=1$ 이다. 따라서 $t=\frac{1}{2}$이고 $B(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$이다. $\angle AOB=\alpha$라 하고 내적을 계산하면 $-\frac{1}{28}+\frac{3}{28}=\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$가 되어 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$ 이다.

(2-3) $\angle POB=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle POA$의 최댓값은 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 이다. 따라서 $\cos(\angle POA)$의 최솟값은 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 이다. 그러므로 내적 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$의 최솟값은 $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=1\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4})$ $=\frac{1}{\sqrt{14}}(\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1-\sqrt{6}}{14}$ 이다.

1. 문항 및 제시문

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 a에 대하여 다음 식을 만족시킨다.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2 + a\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)\int_0^1 tf'(t)\,dt$$

(3-1) 함수 $f(x)$와 실수 a를 구하시오. (60점)

(3-2) 양의 실수 h와 r에 대하여 원 $x^2 + (y-h)^2 = r^2$이 곡선 $y = f(x)$와 한 점에서 만날 때, r의 최댓값을 구하시오. (60점)

(3-3) 곡선 $y = f(x)$위의 한 점 P와 원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 위의 한 점 Q에 대하여 선분 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구하시오. (60점)

(3-4) 곡선 $y = f(x)$위의 점 P에서의 접선과 평행한 직선이 곡선 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{4}$ 와 점 R에서 접할 때, 선분 $\overline{PR}$의 길이의 최솟값을 구하시오. (60점)

2. 출제 의도

주어진 상황에 적합한 함수를 구하고 미분을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 출제 근거

가) 교육과정 출제근거 (성취기준)

문항 및 제시문		관련 성취기준
3-1	교육과정	미적분I
	성취기준·성취수준	미적1331/1332/1422/1423
3-2	교육과정	수학I
	성취기준·성취수준	수학1212/1213/1231/1331
3-3	교육과정	수학I/미적분I
	성취기준·성취수준	수학1311/1331, 미적1333
3-4	교육과정	수학I/미적분I
	성취기준·성취수준	수학1231, 미적1333

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	이준열 외	천재교육	2016	188-189
	미적분I	신항균 외	지학사	2015	127-129

4. 문항 해설

(3-1) 미적분의 기본정리와 성질 $\int_a^a f(t)\,dt = 0$를 이용하여 푸는 문제이다.

(3-2) 주어진 포물선과 원이 y축 대칭이므로 그 대칭축 이 외의 점에서 만나면 반드시 y축 대칭이 되는 점에서도 만난다는 사실을 이용하여 포물선과 원은 y축 위에서 만난다는 것을 유추하는 문제이다.

(3-3) 곡선 위의 점과 원 위의 점 사이의 거리의 최솟값을 구할 때, 곡선 위의 점과 원의 중심 사이의 거리를 이용하여 푸는 문제이다.

(3-4) 두 직선이 평행하면 기울기가 같음을 이용하여 두 점 사이의 거리의 최솟값을 한 변수로 표현하여 푸는 문제이다.

5. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	· $x=0$을 대입하여 필요한 식 $\int_0^1 tf'(t)\,dt = -\frac{2}{a}$을 구하면 (+20점) · $\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{3}x^3$을 구하여 $f(x)=x^2$임을 보이면 (+30점) · $a=-3$임을 보이면 (+10점)	60
3-2	· 두 그래프가 원점 이외의 점에서 만나면 반드시 다른 만나는 점이 또 있음을 기술하여 두 그래프가 원점에 만나야 한다고 기술하면 (+20점) · $h=r$임을 구하여 $x^2=2r-1$를 얻으면 (+20점) · r의 최댓값이 $\frac{1}{2}$임을 보이면 (+20점)	60

3-3	· 원의 중심이 $(3,0)$임을 구하면 (+10점) · $(3,0)$과 포물선 $y=x^2$위의 임의의 점 사이의 거리를 구하여 식 $g(t)=t^4+t^2-6t+9$(또는 $\sqrt{g(t)}$) 를 구하면 (+10점) · $g(t)$의 최솟값은 $t=1$에서 얻어지고 최솟값이 5임을 보이면 (+30점) · 최종적으로 답 $\sqrt{5}-1$을 구하면 (+10점)	60
3-3	· P와 R에서 접선의 기울기가 같음을 알고 R의 좌표를 P를 이용하여 표현하면 (+20점) · $\overline{PR}^2=9t^4+\frac{15}{2}t^2-12t+\frac{65}{16}$를 구하면 (+10점) · 미분하여 최솟값이 $t=\frac{1}{2}$에 나온다는 것을 풀면 (+20점) · 최종적으로 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 구하면 (+10점)	60

6. 예시 답안

(3-1) $x=0$을 대입하면 $2+a\int_0^1 tf'(t)\,dt=0$이므로 $\int_0^1 tf'(t)\,dt=-\frac{2}{a}$이다. 따라서

$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3+x^2+2+a\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\cdot\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{3}x^3$이다. 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2$이다. $0=2+a\int_0^1 tf'(t)\,dt=2+a\int_0^1 2t^2\,dt=2+\frac{2}{3}a$ 이므로 $a=-3$이다.

(3-2) 만나는 점을 (b, b^2)이라 하면 $b^2 + (b^2 - h)^2 = r^2$이므로 $(-b, b^2)$도 역시 만나는 점이 된다.

따라서 $b = -b$가 되어 $b = 0$이다. 즉 원점에서 만나고 그 외의 점에서는 만나면 안 된다. $x^2 + (y-h)^2 = r^2$가

원점을 지나므로 $h = r$이다. 따라서 $x^2 + (y-r)^2 = r^2$와 $y = x^2$은 원점에서만 만나야 한다. 연립하여 풀면

$x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$이 되어 $x^2 + x^4 - 2rx^2 = 0$이다. $x = 0$은 이 방정식의 해이고 $x = 0$이외의 값은

해가 될 수 없다. 즉 $1 + x^2 - 2r = 0$은 $x = 0$이외의 해를 가지면 안 된다. 따라서 $x^2 = 2r - 1 \le 0$가

되어야 하고 $r \le \frac{1}{2}$이다. 그러므로 r의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

(3-3) $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$에서 $(x-3)^2 + y^2 = 1$을 얻을 수 있으므로 중심이 $(3, 0)$이고 반지름이 1인

원이다. 곡선 $y = f(x)$위의 점 (t, t^2)과 원의 중심 $(3, 0)$사이의 거리의 제곱을 $g(t)$라 하면,

$g(t) = (t-3)^2 + (t^2 - 0)^2 = t^4 + t^2 - 6t + 9$이다. $g'(t) = 4t^3 + 2t - 6 = 2(t-1)(2t^2 + 2t + 3)$이고

증감을 조사하면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	5	$\nearrow$

따라서 $g(t)$는 $t = 1$에서 최솟값 5를 갖는다. 곡선 $y = f(x)$위의 점과 원의 중심 $(3, 0)$사이의 거리의

최솟값은 $\sqrt{5}$이다. 그러므로 곡선 $y = f(x)$위의 점과 원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$위의 점 사이의 거리의

최솟값은 $\sqrt{5} - 1$이다.

(3-4) 문제의 조건을 만족하기 위해서는 곡선 $y = f(x)$의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선의 기울기와 곡선

$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{4} = h(x)$의 점 $R(s, h(s))$에서의 접선의 기울기가 같아야 한다. 따라서 $2t = 2 - s$이다.

즉 $s = 2 - 2t$가 된다. 이 때, $\overline{PR}^2 = (t - (2-2t))^2 + (t^2 - h(2-2t))^2 = 9t^4 + \frac{15}{2}t^2 - 12t + \frac{65}{16}$

미분하여 인수분해하면 $3(2t-1)(6t^2+3t+4)$이므로 $t=\frac{1}{2}$에서 최솟값을 가진다. 이 때, $s=1$이다.

선분 $\overline{PR}$의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점이 $P(\frac{1}{2},\frac{1}{4}),\ R(1,-\frac{1}{4})$이므로 답은 $\overline{PR}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.