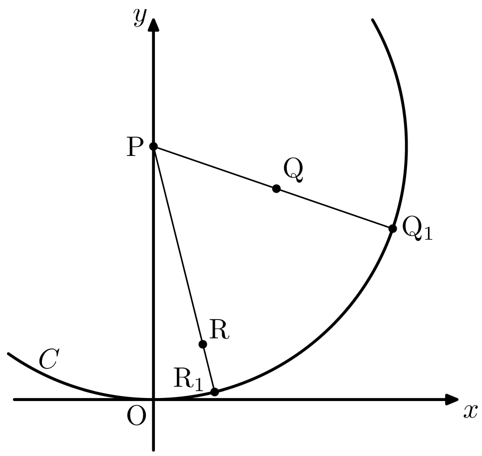
2019학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 기출문제(자연계열 B형)

[문제 1] 좌표평면에 중심이 $\mathrm{P}(0,1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원의 내부에 있고 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$과 $\mathrm{R}(x_2, y_2)$에 대하여
두 점 P와 Q를 지나는 직선이 제1사분면에서 원 C와 만나는 점을 Q_1이라 하고
두 점 P와 R를 지나는 직선이 제1사분면에서 원 C와 만나는 점을 R_1이라 하자.
점 $\mathrm{Q}, \mathrm{Q}_1, \mathrm{R}, \mathrm{R}_1$은 다음 조건을 만족시킨다. (단, $0 < y_2 < y_1 < 1$, $0 < x_1 < \frac{1}{2}$)

(가) $\overline{\mathrm{QQ}_1} = x_1$
(나) $\overline{\mathrm{RR}_1} = x_2$
(다) $\overline{\mathrm{QR}} = x_1 + x_2$

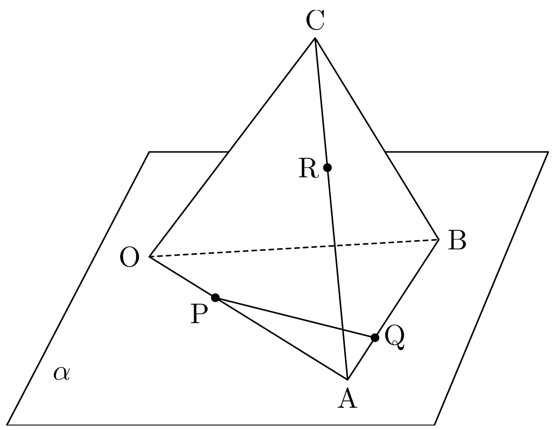


(1-1) y_1을 x_1의 식으로 나타내시오. (60점)

(1-2) 극한 $\displaystyle\lim_{x_1 \to 0+} \frac{y_2}{x_2}$를 구하시오. (60점)

(1-3) 극한 $\displaystyle\lim_{y_1 \to 0+} \frac{y_2}{y_1}$를 구하시오. (60점)

[문제 2] 각 변의 길이가 1인 정사면체의 네 꼭짓점을 O, A, B, C라 하자. 세 점 O, A, B를 포함하는 평면을 α라 하고, 선분 OA를 $1:2$로 내분하는 점을 P,
선분 AB를 $3:7$로 내분하는 점을 Q라 하자. 또한, 평면 α에 수직이고 선분 PQ를 포함하는 평면이 선분 AC와 만나는 점을 R라 하자.



(2-1) 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $\mathrm{C_1}$이라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OC_1}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때, 실수 m, n을 구하시오. (60점)

(2-2) 평면 α 위에 있지 않은 점 S에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $\mathrm{S_1}$이라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{PS}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{PS_1}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$이다. 실수 p, q를 실수 a, b, c의 식으로 나타내시오. (60점)

(2-3) R는 선분 AC를 $(1-t):t$로 내분하는 점이다. 실수 t를 구하시오. (60점)

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x) = f(x^2) - 5x^2$ (나) $f'(x) \geq 5$ (다) $f(1) = a$이고 $f(0) = 5$이다.

(3-1) $x = 1$일 때 $y = f(x)$의 접선의 방정식 $y = h(x)$를 a의 식으로 나타내시오. (60점)

(3-2) $x \geq 0$일 때 $f(x) - 5x$의 최솟값을 구하시오. (60점)

(3-3) $x \geq 0$일 때 $g(x) = f(x) - h(x)$의 최솟값을 구하시오. (60점)

(3-4) $0 \leq x \leq 1$일 때 $g(x)$와 a를 각각 구하시오. (60점)

2019학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 출제기준표(자연계열 B형)

1번 문항 출제 의도

평면에서 주어진 관계를 이용한 방정식을 만들어 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다.

1번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	신항균 외	지학사	2015	50-65
	미적분I	이준열 외	천재교육	2016	58-75

2번 문항 출제 의도

벡터의 내적과 선분의 내분을 이해하고 정사영을 이용하여 선분의 길이를 계산할 수 있는 지를 평가한다.

2번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	125-140
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	140-159

3번 문항 출제 의도

이계도함수를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는 지를 평가한다.

3번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분II	황선욱 외	신사고	2016	113-120
	미적분II	김창동 외	교학사	2016	130-142

2019학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 채점기준표(자연계열 B형)

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	• $y_1 = 1 - \sqrt{1-2x_1}$ (60점) • $x_1^2 + (1-y_1)^2 = (1-x_1)^2$ (30점)	60
1-2	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • 유리화 과정이 있고 답이 틀리면 (30점) • $y_2 = 1 - \sqrt{1-2x_2}$를 쓰면 (10점)	60
1-3	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • 마지막 답을 $3 \pm 2\sqrt{2}$로 하거나 $3+2\sqrt{2}$를 쓰면 (45점) • +- 부호를 결정하는 것에 대한 설명 없이 극한 $3 \pm 2\sqrt{2}$에서 $3-2\sqrt{2}$를 선택한 경우 (45점) • $(y_1^2 - 2y_1 - 1)y_2^2 - 2(y_1^2 - 3y_1)y_2 - y_1^2 = 0$을 얻으면 (30점) • $4x_1x_2 = (y_1 - y_2)^2$를 얻으면 (15점) (별해) • 수렴한다는 증명 없이 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (45점) • $4x_1x_2 = (y_1 - y_2)^2$를 얻으면 (15점)	60

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	• m이 맞으면 (+30점), n이 맞으면 (+30점)	60
2-2	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • $(p-a) + \frac{q-b}{2} - \frac{c}{2} = 0$ (+20점) • $\frac{p-a}{2} + (q-b) - \frac{c}{2} = 0$ (+20점) • $p = \frac{3a+c}{3}$ (+10점) • $q = \frac{3b+c}{3}$ (+10점)	60

	(별해) • 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • $a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ (+40점) • $p=\frac{3a+c}{3}$ (+10점) • $q=\frac{3b+c}{3}$ (+10점)	
2-3	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • $\overrightarrow{\mathrm{PR_1}}=\frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (30점) • $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{11}{30}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (10점) (별해) • 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점)	60

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • $f'(1)=a-5$ (30점)	60
3-2	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • $u'(x)=f'(x)-5\geq 0$ (25점)	60
3-3	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • $g''(x)=2x(f'(x^2)-5)\geq 0$ (+20점) • $g'(1)=f(1)-5-a+5=0$ (+20점) (별해) 위와 채점 기준이 같음	60
3-4	• 옳은 풀이과정이 있고 $g(x)=0$을 구하면 (+30점) • 옳은 풀이과정이 있고 $a=10$을 구하면 (+30점)	60

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

2019학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 답안 예시(자연계열 B형)

[문제 1]

(1-1) $x_1^2+(1-y_1)^2=(1-x_1)^2$이다. 따라서 $y_1^2-2y_1=-2x_1$이고 $y_1<1$이므로 $y_1=1-\sqrt{1-2x_1}$이다.

(1-2) 위와 같은 방법으로 $y_2=1-\sqrt{1-2x_2}$를 얻을 수 있다. $y_2<y_1$이므로 $0<x_2<x_1$이고 $\lim_{x_1\to 0+}x_2=0$이다. 따라서

$$\lim_{x_1\to 0+}\frac{y_2}{x_2}=\lim_{x_2\to 0+}\frac{1-\sqrt{1-2x_2}}{x_2}=\lim_{x_2\to 0+}\frac{(1-\sqrt{1-2x_2})(1+\sqrt{1-2x_2})}{x_2(1+\sqrt{1-2x_2})}$$
$$=\lim_{x_2\to 0+}\frac{2x_2}{x_2(1+\sqrt{1-2x_2})}=1$$

(1-3) $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1+x_2)^2$이므로 $4x_1x_2=(y_1-y_2)^2$이다.

$(-2x_1)(-2x_2)=(y_1-y_2)^2$ ==> $(y_1^2-2y_1)(y_2^2-2y_2)=(y_1-y_2)^2$

이 식을 전개하여 정리하면 $(y_1^2-2y_1-1)y_2^2-2(y_1^2-3y_1)y_2-y_1^2=0$이다. 이 이차식을 풀면

$$y_2=\frac{y_1^2-3y_1\pm\sqrt{(y_1^2-3y_1)^2+(y_1^2-2y_1-1)y_1^2}}{y_1^2-2y_1-1}=\frac{y_1^2-3y_1\pm y_1(y_1-2)\sqrt{2}}{y_1^2-2y_1-1}$$ 이므로

$\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{y_1-3\pm(y_1-2)\sqrt{2}}{y_1^2-2y_1-1}$이다. $0<y_2<y_1$을 이용하면 $\pm\sqrt{2}(2-y_1)<-y_1^2+3y_1-2$이다.

$0<y_1<1$이므로 $-y_1^2+3y_1-2<0$이 되어 +와 - 부호 중에서 - 부호를 택해야 한다.
따라서 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{y_1-3-(y_1-2)\sqrt{2}}{y_1^2-2y_1-1}$이다. 그러므로 $\lim_{y_1\to 0+}\dfrac{y_2}{y_1}=3-2\sqrt{2}$이다.

(별해) 수렴함을 보이지 않고 아래와 같이 답만 찾는 경우 :

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1+x_2)^2$이므로 $4x_1x_2=(y_1-y_2)^2$이다. 양변을 y_1^2으로 나누면
$4\dfrac{x_1x_2}{y_1^2}=\left(1-\dfrac{y_2}{y_1}\right)^2$이다. 양변에서 $y_1\to 0+$일 때의 극한을 구하면

$\lim_{y_1\to 0+}4\dfrac{x_1x_2}{y_1^2}=\lim_{y_1\to 0+}\left(1-\dfrac{y_2}{y_1}\right)^2$ ==> $\lim_{y_1\to 0+}4\dfrac{x_1}{y_1}\dfrac{x_2}{y_2}\dfrac{y_2}{y_1}=\left(1-\lim_{y_1\to 0+}\dfrac{y_2}{y_1}\right)^2$이다.

$\lim_{y_1 \to 0+} \frac{y_2}{y_1} = \alpha$라 하면 등식 $4\alpha = (1-\alpha)^2$을 얻는다. 이 이차방정식을 풀면 $\alpha = 3 \pm 2\sqrt{2}$인데 $\alpha \leq 1$이므로 $\lim_{y_1 \to 0+} \frac{y_2}{y_1} = 3 - 2\sqrt{2}$이다.

[문제 2]

(2-1) C_1은 무게중심이므로 $m = n = \frac{1}{3}$이다.

(2-2) $\overrightarrow{SS_1} = (p-a)\overrightarrow{OA} + (q-b)\overrightarrow{OB} - c\overrightarrow{OC}$ 이고, $\overrightarrow{SS_1} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{SS_1} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 이므로,

두 식 $(p-a) + \frac{q-b}{2} - \frac{c}{2} = 0$, $\frac{p-a}{2} + (q-b) - \frac{c}{2} = 0$을 얻는다. 이로부터
$p = \frac{3a+c}{3}$, $q = \frac{3b+c}{3}$가 된다.

(별해) $\overrightarrow{OA}$의 정사영은 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$의 정사영은 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$의 정사영은 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$이므로
$\overrightarrow{PS}$의 정사영은 $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{3a+c}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{3b+c}{3}\overrightarrow{OB}$이다. 따라서
$p = \frac{3a+c}{3}$, $q = \frac{3b+c}{3}$.

(2-3) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{11}{30}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{10}\overrightarrow{OB}$ 이다.

R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 R_1이라 하자.
$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (t - \frac{1}{3})\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OC}$이고 (2-2)로부터 $\overrightarrow{PR_1} = \frac{2t}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1-t}{3}\overrightarrow{OB}$이고

$\overrightarrow{PQ} = \frac{11}{30}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{10}\overrightarrow{OB}$ 와 평행하므로 $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{1-t}{3}}{\frac{2t}{3}}$이고 이로부터 $t = \frac{11}{29}$이다.

(별해) 좌표를 이용한 풀이 :

$O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$이라 하자.

이때 $P(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $Q(\frac{17}{20}, \frac{3\sqrt{3}}{20}, 0)$이므로 선분 PQ를 포함하고 α에 수직인 평면의 방정식은
$y = \frac{9\sqrt{3}}{31}(x - \frac{1}{3})$이다. $R(t + (1-t)\frac{1}{2}, (1-t)\frac{\sqrt{3}}{6}, (1-t)\frac{\sqrt{6}}{3})$이므로

$(1-t)\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{9\sqrt{3}}{31}(t+(1-t)\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$이다. 따라서 $t=\frac{11}{29}$이다.

[문제 3]

(3-1) $f'(1)=f(1)-5=a-5$이므로 $h(x)=(a-5)(x-1)+a=(a-5)x+5$이다.

(3-2) $u(x)=f(x)-5x$라 하면 $u'(x)=f'(x)-5 \geq 0$이므로 $x \geq 0$이면 $u(x) \geq u(0)$이다.

따라서 $x \geq 0$에서 $u(x)$의 최솟값은 $u(0)=f(0)-0=5$이다.

(3-3) $g(x)=f(x)-(a-5)x-5$이므로 $g'(x)=f'(x)-a+5=f(x^2)-5x^2-a+5$이다.
$g''(x)=2xf'(x^2)-10x=2x(f'(x^2)-5) \geq 0$이므로 $g'(x)$는 감소하지 않는 함수이다.
$g'(1)=f(1)-5-a+5=0$이므로 $x \geq 1$에서 $g'(x) \geq 0$이고 $0 \leq x \leq 1$에서 $g'(x) \leq 0$이다.
따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $g(1)=f(1)-h(1)=a-a=0$을 가진다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	≤ 0	0	≥ 0
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

(별해) $g(x)=f(x)-(a-5)x-5$이므로 $g'(x)=f'(x)-a+5=f(x^2)-5x^2-a+5$이다.
$g'(1)=f'(1)-5-a+5=0$이고 $g(1)=f(1)-h(1)=a-a=0$이다.
$g''(x)=2xf'(x^2)-10x=2x(f'(x^2)-5) \geq 0$이므로 $x \geq 0$에서 $g(x)$는 아래로 볼록하다.

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값은 0을 가진다.

(3-4) $g(x)$는 $0 \leq x \leq 1$에서 증가하지 않는 함수이다. 따라서 $g(0) \geq g(x) \geq g(1)$가 성립한다. 그런데 $g(0)=0$, $g(1)=0$이므로 $g(x)=0$이다. 따라서 $f(x)=(a-5)x+5$이다.
(가)를 이용하면 $a-5=f'(0)=f(0)=5$이므로 $a=10$이다.