2019학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 기출문제지(자연계열 A형)

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

(1-1) 동전을 던질 때 앞면이 나오는 비율이 p인 구부러진 동전이 있다. 이 동전을 72번 던져 앞면이 24번 나왔을 때, 앞면이 나오는 비율 p에 대하여 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $s \le p \le t$이다. s와 t를 분수로 나타내시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) (60점)

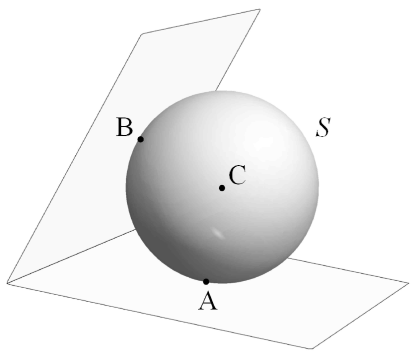
(1-2)와 **(1-3)**은 다음을 읽고 답하시오.

> 상자 안에 1부터 $n\ (n \ge 4)$까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n장의 카드가 있다. 이 상자에서 카드 4장을 임의추출할 때, 뽑힌 카드에 적힌 숫자들 중에서
> 제일 큰 수를 확률변수 X라 하고 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 a라 하자.

(1-2) X의 확률질량함수를 구하시오. (60점)

(1-3) n장의 카드가 담겨 있는 이 상자에 $n+1$이 적힌 카드 한 장을 추가한 후 카드 4장을 임의추출한다. 이때 뽑힌 카드에 적힌 숫자들 중 제일 큰 수를 확률변수 Y라 하고 기댓값 $\mathrm{E}(Y)$를 b라 하자. b를 a의 식으로 나타내시오. (60점)

[문제 2] 좌표공간에서 중심이 C인 구 S가 점 $\mathrm{A}(1,1,2)$에서 평면 $-x+y+z=2$에 접하고, 점 B에서 평면 $x-y+z=4$에 접하고 있다. (단, C의 x좌표는 양수이다.)



(2-1) 중심 C의 좌표를 구하시오. (60점)

(2-2) 점 B의 좌표를 구하시오. (60점)

(2-3) 내적 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값이 최대가 되는 구 S 위의 점 P의 좌표를 구하시오. (60점)

[문제 3] 자연수 n과 실수 a에 대하여 정의역이 $(0,\ \infty)$인 함수 $f(x)=x^n(a+\ln x)$와 $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$는 다음 조건을 만족시킨다. (단, $a>0$)

(가) $F(e)=\dfrac{(an+n+a)e^{n+1}}{(n+1)^2}$ (나) 구간 $[1,\infty)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 2a+1$이다.

(3-1) 조건 (가)를 이용하여 a를 n의 식으로 나타내시오. (60점)

(3-2) 조건 (나)를 이용하여 자연수 n의 범위를 구하시오. (60점)

(3-3) $F''(1)$의 최솟값을 구하시오. (60점)

(3-4) 실수 m과 b에 대하여 $g(x)=mx+b$라 정의하자. $x\geq 1$에서 $g(x)\leq F(x)$가 성립하는 $g(x)$에 대하여 $g(e)$가 최댓값으로 $\dfrac{e^4}{4}$을 가질 때 m과 b를 구하시오. (60점)

2019학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 출제기준표(자연계열 A형)

1번 문항 출제 의도

표본비율을 이용하여 모비율의 구간 추정을 할 수 있는지, 확률변수와 기댓값 개념을 이해하는지를 평가한다.

1번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김창동 외	교학사	2016	29-33, 114-121, 160-162
	확률과 통계	이강섭 외	미래엔	2016	30-33, 99-101, 133-137

2번 문항 출제 의도

평면과 구의 방정식을 이해하고 벡터의 분해를 이용하여 내적을 계산할 수 있는 지를 평가한다.

2번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	161-191
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	186-214

3번 문항 출제 의도

부분적분법과 미적분의 기본 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

3번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분II	김원경 외	비상교육	2016	146-149
	미적분II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	145-147

2019학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 채점기준표(자연계열 A형)

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	• 옳은 풀이과정이 있고 답 $s=\frac{101}{450}$, $t=\frac{199}{450}$가 맞으면 (60점) • $\frac{24}{72}\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{72}}\times 1.96$ (45점) • 다음 중 하나라도 쓰면 (20점, 단 72대신 정의없이 n을 사용하면 10점) 1) $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{72}}}$는 표준정규분포 2) X가 이항분포 $B(72,p)$ 3) $\hat{p}$은 $N(p,\frac{p(1-p)}{72})$를 따른다. 4) 루트 안이 틀렸지만 $\frac{24}{72}\pm 1.96\sqrt{\cdots}$ 의 구조가 있으면	60
1-2	• $\frac{{}_{k-1}C_3}{{}_nC_4}$또는 $\frac{4(k-1)(k-2)(k-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$ (+45점) • $(k=4,5,\cdots,n)$ (+15점)	60
1-3	• 옳은 풀이과정이 있고 $b=\frac{n-3}{n+1}a+4$가 맞으면 (60점) • $\mathrm{P}(Y=k)=\frac{{}_{k-1}C_3}{{}_{n+1}C_4}$ (+10점) • $4\le k\le n$일 때 $\mathrm{P}(Y=k)=\mathrm{P}(X=k)\times\frac{n-3}{n+1}$ (+20점) • $b=\sum_{k=4}^{n+1}k\mathrm{P}(Y=k)$ (+10점, 단 k의 범위가 틀리면 +5점) (별해) • 옳은 풀이과정이 있고 $b=\frac{n-3}{n+1}a+4$가 맞으면 (60점) • 두 가지 경우로 나누면 (+20점) • 경우1에서 $n+1$이 나오면 (+10점) $\mathrm{P}(경우1)=\frac{{}_nC_3}{{}_{n+1}C_4}$ (+10점) • 경우2에서 a가 나오면 (+10점)	60

	$$\mathrm{P}(\text{경우}2) = \frac{{}_{n}C_4}{{}_{n+1}C_4}$$ (+10점) (별해) • $b = a + \frac{4}{5}$ (15점)	

※ *하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.*

※ *채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.*

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	• C의 좌표를 $(1-t, 1+t, 2+t)$라 두면 (+10점) • $\lvert\overrightarrow{\mathrm{CA}}\rvert^2 = 3t^2$ (+15점) • $\lvert\overrightarrow{\mathrm{CB}}\rvert^2 = \frac{(2+t)^2}{3}$ (+15점) • $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (+20점)	60
2-2	• B의 좌표를 $\left(\frac{3}{2}+t, \frac{1}{2}-t, \frac{3}{2}+t\right)$로 두면 (+20점) • $t = \frac{1}{2}$ (+20점) • $\mathrm{B}(2, 0, 2)$를 구하면 (+20점)	60
2-3	• 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$와 $(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})$가 같은 방향의 벡터임을 언급하면 (+20점) • $\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0, 0, 1)$ (+10점) • $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (+20점) • 답 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$를 구하면 (+10점)	60

※ *하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.*

※ *채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.*

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	• 옳은 풀이과정이 있고 답이 맞으면 (60점) • $\int_1^e f(t)\,dt = \left[(\ln t + a)\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^n}{n+1}\,dt$ (+20점)	60
3-2	• $f'(1)$의 값을 이용하여 $n \neq 1$임을 보이면 (+20점) • $f'(x) = (n\ln x + an + 1)x^{n-1}$을 계산하면 (+10점) • $f'(x)$가 증가함수임을 보이면 (+20점) • 답 $n \geq 2$을 얻으면 (+10점)	60

3-3	• $F'(x)=f(x)=\left(\ln x+\dfrac{1}{n+1}\right)x^n$ (+20점) • $F''(x)=f'(x)=x^{n-1}\left(1+n\ln x+\dfrac{n}{n+1}\right)$ (+20점) • 답 $\dfrac{5}{3}$ 를 구하면 (+20점)	60
3-4	• $F''(x)=x^{n-1}\left(1+n\ln x+\dfrac{n}{n+1}\right)>0$ (+10점) • 그래프가 아래로 볼록임을 언급하면 (+10점) • $F(e)=\dfrac{e^{n+1}}{n+1}=\dfrac{e^4}{4}$ (+10점) • $n=3$임을 보이면 (+10점) • $m=\dfrac{5}{4}e^3$ 을 구하면 (+15점) • $b=-e^4$ 을 구하면 (+5점)	60

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

2019학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 답안 예시(자연계열 A형)

[문제 1]

(1-1) 동전을 72번 던질 때 앞면이 나온 횟수를 X라 하면 X는 이항분포 $B(72, p)$를 따른다. $\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{72}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르고 $\hat{p}=\dfrac{24}{72}=\dfrac{1}{3}$이다.

p의 95%의 신뢰구간 : $\dfrac{24}{72}\pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{72}}\times 1.96=\dfrac{1}{3}\pm 1.96\times\dfrac{1}{18}$ **==>** $\dfrac{101}{450}\le p\le\dfrac{199}{450}$

그러므로 $s=\dfrac{101}{450}$, $t=\dfrac{199}{450}$이다.

(1-2) $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{{}_{k-1}C_3}{{}_nC_4}=\dfrac{4(k-1)(k-2)(k-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$ $(k=4,5,\cdots,n)$

(1-3) $\mathrm{P}(Y=k)=\dfrac{{}_{k-1}C_3}{{}_{n+1}C_4}$ $(k=4,5,\cdots,n+1)$이고 $4\le k\le n$일 때

$\mathrm{P}(Y=k)=\mathrm{P}(X=k)\times\dfrac{n-3}{n+1}$이다.

$$\begin{aligned} b&=\sum_{k=4}^{n+1}k\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{k=4}^{n}k\mathrm{P}(Y=k)+(n+1)\mathrm{P}(Y=n+1)\\ &=\sum_{k=4}^{n}k\mathrm{P}(X=k)\frac{n-3}{n+1}+(n+1)\frac{4}{n+1}=\frac{n-3}{n+1}a+4 \end{aligned}$$

(별해) 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어서 생각하자.

경우1. 4장 중 $n+1$이 포함된 경우

경우2. 4장 중 $n+1$이 포함이 안 된 경우

경우1에서 나올 제일 큰 값은 $n+1$이고 $\mathrm{P}(\text{경우}1)=\dfrac{{}_nC_3}{{}_{n+1}C_4}$

경우2에서 나올 제일 큰 값의 기댓값은 a이고 $\mathrm{P}(\text{경우}2)=\dfrac{{}_nC_4}{{}_{n+1}C_4}$

그러므로 $b=(n+1)\dfrac{{}_nC_3}{{}_{n+1}C_4}+a\dfrac{{}_nC_4}{{}_{n+1}C_4}=4+a\dfrac{n-3}{n+1}$이다.

(별해) 불완전한 해답 : 몇 개의 n에 대하여 값을 계산하여 $b=a+\dfrac{4}{5}$라고 답을 한다.

[문제 2]

(2-1) 중심 C는 $(1,1,2)$를 지나고 방향벡터가 $(-1,1,1)$인 직선 위에 있으므로 C의 좌표를 $(1-t, 1+t, 2+t)$라 두자.

점과 평면 사이의 거리 공식으로부터 $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2 = \dfrac{(2+t)^2}{3}$ 이고, 두 점 사이의 거리로부터 $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = 3t^2$ 이다. $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2$ 이며 C의 x좌표가 양수이므로 $t = -\dfrac{1}{2}$ 이고 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

(2-2) 점 B 는 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$를 지나고 방향벡터가 $(1, -1, 1)$인 직선 위에 있으므로 B의 좌표를 $\left(\dfrac{3}{2}+t, \dfrac{1}{2}-t, \dfrac{3}{2}+t\right)$로 두자.

점 B 는 평면 $x-y+z=4$위에 있으므로, $t = \dfrac{1}{2}$ 이고 $\mathrm{B}(2,0,2)$이다.

(2-3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = (\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})$=상수+$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$와 $(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})$가 같은 방향의 벡터일 때이다.

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,0,1)$이다.

구의 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \left(0, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 P의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

[문제 3]

(3-1) 부분적분법을 이용하여 계산하면

$$\int_1^e f(t)\,dt = \left[(\ln t + a)\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^n}{n+1}\,dt = \frac{an+n+a}{(n+1)^2}\, e^{n+1} - \frac{(n+1)a-1}{(n+1)^2}$$

이고 이 식을 조건 (가)와 비교하면 $\dfrac{(n+1)a-1}{(n+1)^2} = 0$ 이다. 따라서 $a = \dfrac{1}{n+1}$ 이다.

(3-2) 도함수를 구하면 $f'(x) = (n\ln x + an + 1)x^{n-1}$ 이다. $n=1$ 이면 $f'(1) = a+1 < 2a+1$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$n \ge 2$ 이면 $f'(1) = an+1 \ge 2a+1$ 이다. 또한 구간 $[1, \infty)$ 에서 함수 $n\ln x + an + 1$과 x^{n-1} 은 모두 양수인 함숫값을 갖는 증가함수이므로 이들의 곱인 $f'(x) = (n\ln x + an+1)x^{n-1}$ 는 증가함수이다. 따라서 구간 $[1, \infty)$ 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) \ge 2a+1$ 이다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키는 자연수 n 의 범위는 $n \ge 2$ 이다.

(3-3) 미적분의 기본 정리에 의하여 $F'(x) = f(x) = \left(\ln x + \dfrac{1}{n+1}\right)x^n$ 이고

$F''(x) = f'(x) = x^{n-1}\left(1 + n\ln x + \dfrac{n}{n+1}\right)$ 이므로

$F''(1) = 1 + \dfrac{n}{n+1} = 2 - \dfrac{1}{n+1}\ (n \geq 2)$ 이다. 따라서 $F''(1)$은 $n=2$일 때 최솟값 $\dfrac{5}{3}$를 갖는다.

(3-4) $x \geq 1$일 때 $F'(x) = f(x) = \left(\ln x + \dfrac{1}{n+1}\right)x^n$ 이고

$F''(x) = f'(x) = x^{n-1}\left(1 + n\ln x + \dfrac{n}{n+1}\right) > 0$ 이므로 곡선 $y = F(x)$의 그래프는 구간 $[1, \infty)$에서 아래로 볼록하다. 따라서 $g(e) = me + b$의 최댓값은 직선 $y = g(x)$가 $x = e$인 점에서 곡선 $y = F(x)$에 접할 때이다. (아래 그림 참조) 그러므로 $g(e)$의 최댓값은

$$F(e) = \frac{e^{n+1}}{n+1} = \frac{e^4}{4} \qquad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

이다. 식 (1)을 만족하는 2이상의 자연수 n을 구하면 되는데, 우선 $n=3$일 때 이 식이 성립하며, $h(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x+1}\ (x \geq 2)$이라 할 때 $h'(x) = \dfrac{xe^{x+1}}{(x+1)} > 0$ 이므로 $h(x)$는 $x \geq 2$에서 증가함수이다. 따라서 식 (1)을 만족하는 2이상의 자연수 n은 3뿐이다.

m은 $x = e$일 때 곡선 $y = F(x)$에 접하는 직선의 기울기이므로

$m = F'(e) = f(e) = \dfrac{5}{4}e^3$ 이다.

그러므로 $g(x) = \dfrac{5}{4}e^3(x - e) + \dfrac{e^4}{4} = \dfrac{5}{4}e^3x - e^4$에서 $b = -e^4$이다.