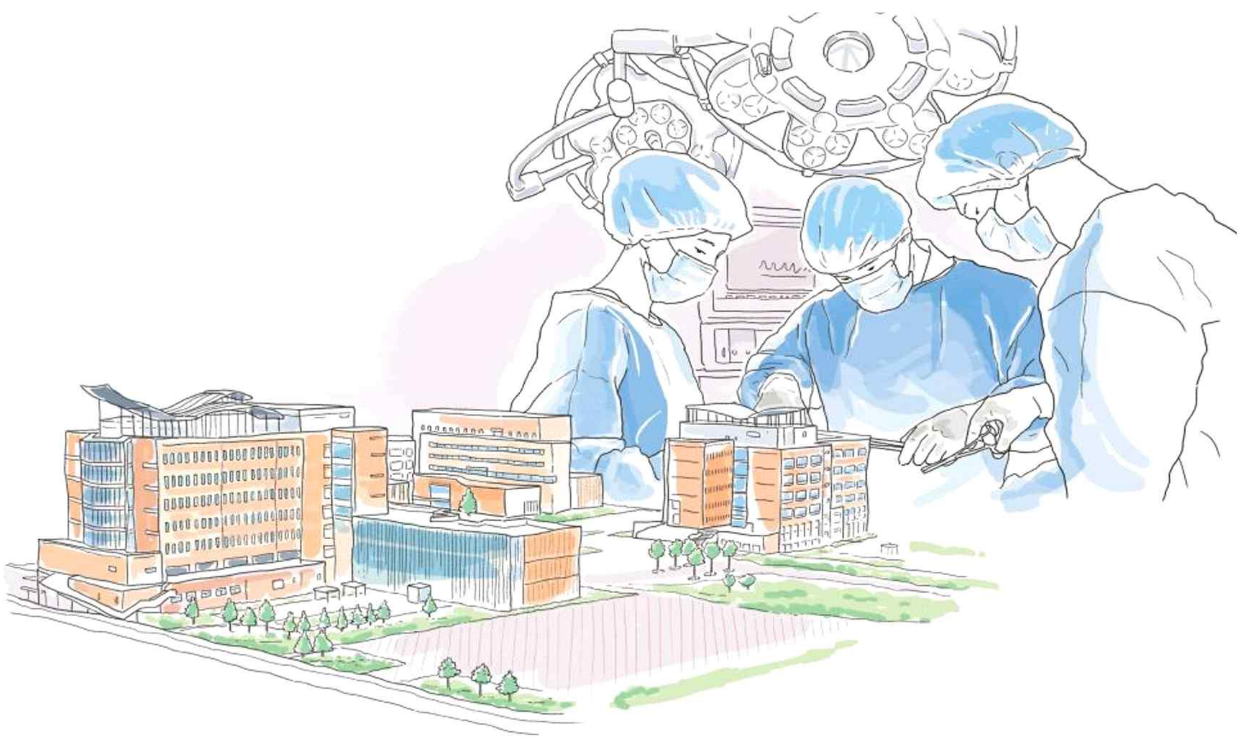
2024학년도 수시모집 논술고사
채점 기준 및 예시 답안
- 의·약학계 -



문항 번호	의·약학계 1번

• 출제 의도

본 문항에서는 도함수의 성질을 부등식에 적용하여 함수들 사이의 대소 관계를 계산하고 부채꼴의 넓이를 라디안 각으로 표현하여 주어진 규칙을 가지는 도형의 넓이를 계산한다. 정의된 수열의 규칙성을 이해하여 이 수열이 만족시키는 여러 가지 조건들을 창의적으로 구성하고 그 결과를 증명하는 과정을 논리적으로 서술할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 부등식의 증명을 위해 여러 가지 도함수의 성질을 활용할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 정의된 수열의 일반항의 규칙성을 이해하고 부채꼴의 넓이와 수열의 일반항들 사이의 관계와 증명된 부등식을 활용하여 제시된 부등식과 같은 결과를 만족하는 부등식을 논리적으로 서술할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 도함수의 성질을 부등식에 활용하여 함수들 사이의 대소 관계를 계산하고 부채꼴의 넓이를 라디안 각으로 표현하고 주어진 규칙을 가지는 도형의 넓이를 계산과 정의된 수열의 규칙성을 활용하여 만족시키는 부등식을 주어진 부등식으로 구성해나가는 과정을 논리적으로 바르게 서술할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	열린구간 $(0, 1)$에서 부등식 $x - \sin x > 0$임을 보일 수 있다.	2
	열린구간 $(0, 1)$에서 부등식 $\frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x > 0$임을 보일 수 있다.	2
	열린구간 $(0, 1)$에서 부등식 $\frac{1}{6}x^3 - x + \sin x > 0$임을 보일 수 있다.	1
[1-2]	모든 자연수 n에 대하여 부등식 $S_n = 2^n\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = 2^{n-1}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$임을 보일 수 있다.	2
	모든 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $a_n = S_n - S_{n-1}$이고 $a_1 = S_1 = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)$임을 보일 수 있다.	2

[1-2]	$b_n = 2S_1 + 4(S_2 - S_1) + 8(S_3 - S_2) + \cdots + 2^n(S_n - S_{n-1})$로 표현할 수 있다.	3
	$b_n = 2^n S_n - \left(2S_1 + 4S_2 + \cdots + 2^{n-1}S_{n-1}\right)$로 표현할 수 있다.	10
	$S_n < \frac{1}{2}$임을 보일 수 있다.	2
	$\frac{1}{2^n} - \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^n}\right)^3$을 이용하여 $-2^k S_k < \frac{1}{12}\left(\frac{2^k}{4^k}\right) - \left(\frac{2^k}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2^k}\right) - 2^{k-1}$임을 보일 수 있다.	3
	$b_n < 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2^k}\right) - 2^{k-1}\right)$임을 보일 수 있다.	1
	등비수열의 합을 이용하여 $b_n < 2^{n-1} + \frac{1}{12}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right) - (2^{n-1}-1) < 1 + \frac{1}{12} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{12}$임을 보일 수 있다.	2

• 예시 답안

[1-1]

$f(x) = x - \sin x$라 두고 $f(x) > 0$임을 보이자. 구간 $(0,1)$에서 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$이고 $f(0) = 0$이므로 $f(x) > 0$이다.

다음으로 $g(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x$라 두고 $g(x) > 0$임을 보이자. 구간 $(0,1)$에서 $g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x$이고 $g''(x) = x - \sin x > 0$이다. 구간 $(0,1)$에서 $g''(x) > 0$이고 $g'(0) = 0$이므로 $g'(x) > 0$이다. 또한 $g(0) = 0$이므로 구간 $(0,1)$에서 $g(x) > 0$이다.

[1-2]

$S_n = 2^n\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = 2^{n-1}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$은 부채꼴 OAB의 내부에 있으므로 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n < \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ① \text{ 이다.}$$

그리고 [1-1]에서 $x - \sin x < \frac{1}{6}x^3$이므로 x에 $\frac{1}{2^n}$을 대입하면 $\frac{1}{2^n} - \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^n}\right)^3$이고

양변에 2^{n-1}을 곱하면 $\frac{1}{2}\left(1 - 2^n\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4^n}\right)$이다.

한편 $\frac{1}{2} - S_n = \frac{1}{2}\left(1 - 2^n\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$이므로 $\frac{1}{2} - S_n < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4^n}\right)$ $\cdots\cdots$② 이다.

②를 이용하여 $-2^k S_k$을 정리하면

$$-2^kS_k < \frac{1}{12}\left(\frac{2^k}{4^k}\right)-\left(\frac{2^k}{2}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2^k}\right)-2^{k-1}\cdots\cdots③$$ 이다.

b_n을 S_k에 대한 식으로 정리하면

$$\begin{aligned}b_n &= 2^1a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n\\ &= 2S_1+4(S_2-S_1)+8(S_3-S_2)+\cdots+2^n(S_n-S_{n-1})\\ &= 2^nS_n-\left((4-2)S_1+(8-4)S_2+\cdots+(2^n-2^{n-1})S_{n-1}\right)\\ &= 2^nS_n-\left(2S_1+4S_2+\cdots+2^{n-1}S_{n-1}\right)\end{aligned}$$

이다.

①에서 $b_n < 2^n\left(\frac{1}{2}\right)-\left(2S_1+4S_2+\cdots+2^{n-1}S_{n-1}\right)$ 이다.

③에서

$$\begin{aligned}b_n &< 2^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2^k}\right)-2^{k-1}\right)\\ &= 2^{n-1}+\frac{1}{12}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right)-(2^{n-1}-1)\\ &< 1+\frac{1}{12}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{13}{12}\end{aligned}$$

이다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $b_n < \frac{13}{12}$이다.

(다른 풀이)

$S_n = 2^n\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)=2^{n-1}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$은 부채꼴 OAB의 내부에 있으므로 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n < \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots①$$ 이다.

그리고 [1-1]에서 $x-\sin x < \frac{1}{6}x^3$이므로 x에 $\frac{1}{2^n}$을 대입하면

$\frac{1}{2^n}-\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^n}\right)^3$이고 양변에 2^{n-1}을 곱하면 $\frac{1}{2}\left(1-2^n\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4^n}\right)$이다.

한편 $\frac{1}{2}-S_n = \frac{1}{2}\left(1-2^n\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$이므로

$$\frac{1}{2}-S_n < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \cdots\cdots②$$ 이다. 이제 ①과 ②를 이용하여 b_n을 정리하자.

$$\begin{aligned}b_n &= 2^1a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n\\ &= 2^1(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(2^2-2^1)(a_2+a_3+\cdots+a_n)+\cdots+(2^n-2^{n-1})a_n\\ &= 2^1S_n+(2^2-2^1)(S_n-S_1)+\cdots+(2^n-2^{n-1})(S_n-S_{n-1})\end{aligned}$$ 이다.

①에서

$$b_n < 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - S_1\right) + 4\left(\frac{1}{2} - S_2\right) + \cdots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2} - S_{n-1}\right)$$ 이다.

②에서

$$\begin{aligned} b_n &< 1 + \frac{1}{12}\left(2\frac{1}{4} + 2^2\frac{1}{4^2} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{4^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{1}{2}}\right) < 1 + \frac{1}{12} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$ 이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $b_n < \frac{13}{12}$이다.

문항 번호	의·약학계 2번

• 출제 의도

본 문항에서는 매개변수로 나타낸 함수, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이해하고 함수의 극한값 및 치환적분법을 이용한 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[2-1] 주어진 조건을 만족시키는 도형 위를 움직이는 점의 좌표를 매개변수로 나타내는 문항이다.

[2-2] 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후 주어진 선분의 길이를 매개변수로 나타내어 함수의 극한값을 구하는 문항이다.

[2-3] 주어진 조건을 활용하여 치환적분법을 이용하여 정적분 값을 구하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 매개변수로 나타낸 함수, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이해하고 함수의 극한값 및 치환적분법을 이용한 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	접선의 기울기를 이용하여 $f(t)$, $g(t)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3
	주어진 거리를 이용하여 $f(t)$, $g(t)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	2
	$f(t)$, $g(t)$를 각각 t에 관한 식으로 나타낼 수 있다.	5
[2-2]	두 점 A, B의 x좌표를 미지수로 하는 이차방정식을 구할 수 있다.	6
	$l(t)$를 t에 관한 식으로 나타낼 수 있다.	7
	함수의 극한값을 구할 수 있다.	2
[2-3]	치환적분법을 이용할 수 있는 꼴로 함수를 정리할 수 있다.	4
	정적분의 값을 구할 수 있다.	6

- **예시 답안**

[2-1]

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{t^2}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 t이므로

$t(\neq 0)$에 대하여 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이다.

그러므로 $\dfrac{g(t)-\frac{t^2}{2}}{f(t)-t}=-\frac{1}{t}$. …… ①

또한 선분 PQ의 길이가 1이므로

$\{f(t)-t\}^2+\left\{g(t)-\frac{t^2}{2}\right\}^2=1$. …… ②

①과 ②를 연립하면

$\left\{g(t)-\frac{t^2}{2}\right\}^2=\frac{1}{t^2+1}$이므로 $g(t)=\frac{t^2}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

조건 (ⅱ)에 의하여 $g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이고, 이를 ①에 대입하면 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ 이다.

또한, $t=0$일 때, $f(0)=0,\ g(0)=1$이므로

모든 실수 t에 대하여 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\ g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

[다른 풀이]

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{t^2}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 t이므로

점 P에서의 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 접선의 방정식은 $y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2$ … ①

점 Q는 위의 접선에 수직인 직선 위에 있으므로 $t(\neq 0)$에 대하여 $g(t)=-\frac{1}{t}\{f(t)-t\}+\frac{1}{2}t^2$ … ②

또한 점 Q는 ①의 직선과의 거리가 1이므로 $\dfrac{\left|tf(t)-g(t)-\frac{1}{2}t^2\right|}{\sqrt{t^2+1}}=1$ … ③

②와 ③을 연립하면 $f(t)=t\pm\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이고, 이를 ②에 대입하면 $g(t)=\frac{1}{2}t^2\mp\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 이다.

조건 (ⅱ)에 의하여 $g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이므로 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ 이다.

또한 $t=0$일 때, $f(0)=0,\ g(0)=1$이므로

모든 실수 t에 대하여 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\ g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 이다.

[2-2]

점 $\mathrm{Q}(x,\ y)$에서의 곡선 D의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t-\frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}}{1-\frac{\sqrt{t^2+1}-\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}}=\frac{t\left\{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}-1\right\}}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}-1}=t \text{ 이다.}$$

따라서 점 $\mathrm{Q}(x,\ y)$에서의 곡선 D의 접선의 방정식은 $y-\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)=t\left\{x-\left(t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\right\}$이다.

$y=\frac{x^2}{2}$과 연립하여 정리하면

$x^2-2tx+t^2-2\sqrt{t^2+1}=0$ …… ① 이다.

①의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha,\ \beta$는 두 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$의 x좌표이다.

$l(t)$는 밑변의 길이와 높이가 각각 $|\alpha-\beta|$와 $|t(\alpha-\beta)|$인 직각삼각형의 빗변의 길이다.

피타고라스의 정리에 의하여 $l(t)=\sqrt{t^2+1}\,|\alpha-\beta|$이다.

식①의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면 $x=t\pm\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}$이므로 두 근 의 차

$|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}$이다.

그러므로 $l(t)=\sqrt{t^2+1}\times 2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}=2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{3}{4}}$ 따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{t\sqrt{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\sqrt[4]{(t^2+1)^3}}{\sqrt[4]{t^6}}=2\sqrt{2}$$

[2-3]

$\frac{g'(t)}{f'(t)}=t$에서 $\frac{g'(t)}{t}=f'(t)$이다.

그러므로 $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{t}f(t)g'(t)dt=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}f(t)f'(t)dt=\left[\frac{1}{2}\{f(t)\}^2\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}$

$$=\frac{\{f(2\sqrt{2})\}^2-\{f(\sqrt{3})\}^2}{2}=\frac{\frac{32}{9}-\frac{3}{4}}{2}=\frac{101}{72}$$

문항 번호	의·약학계 3번

- **출제 의도**

본 문항에서는 공간 도형 위의 여러 가지 선분들의 길이를 찾고 공간에서 주어진 길이들을 계산하고 한 평면위에 놓이지 않은 도형의 넓이가 일정함을 찾기 위해 정사영에서의 계산 결과에 대한 논리적 추론이 가능한가를 평가하고자 하였다.

[3-1] 삼각기둥에서 선분들의 길이를 찾고 코사인법칙을 이용하여 주어진 길이를 찾을 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-2] 공간에서 주어진 삼각형의 넓이가 일정함을 만족시키는 점들의 조건을 찾기 위해 그 점들의 정사영에서의 길이들을 계산하여 반원이 됨을 찾고 각각의 도형을 포함하는 두 평면(삼각형)의 넓이를 계산하여 두 평면(삼각형)이 이루는 각의 크기를 구하고 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

- **문항 해설**

본 문항은 삼각기둥에서 선분들의 길이를 찾고 코사인 법칙을 이용하여 주어진 길이를 찾을 수 있는지를 평가한다. 공간에서 주어진 삼각형의 넓이가 일정함을 만족시키는 점들의 조건을 찾기 위해 그 점들의 정사영에서의 길이들을 계산하여 반원이 됨을 찾고 각각의 도형을 포함하는 두 평면(삼각형)의 넓이를 계산하여 두 평면(삼각형)이 이루는 각의 크기를 구하고 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

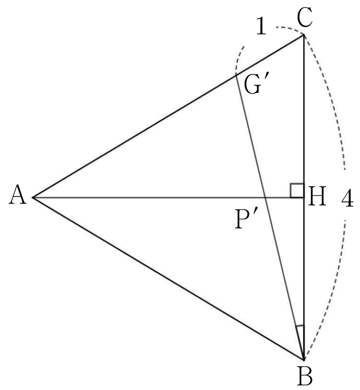
- **채점 기준**

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	점 $\mathrm{G, P}$에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{G', P'}$이라 할 때, 점 $\mathrm{P'}$은 선분 $\mathrm{BG'}$과 선분 AH의 교점임을 보일 수 있다.	2
	삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AP'}}$ 또는 $\overline{\mathrm{P'H}}$의 길이를 구할 수 있다.	4
	선분 AI의 길이를 구할 수 있다.	4
3-2	넓이 조건으로부터 점 R가 삼각기둥 $\mathrm{DEG-ABG'}$에서 위치할 수 있는 영역을 나타낼 수 있다.	6
	점 R가 나타내는 도형의 평면 ABC 위로의 정사영은 평면 ABC에서 중심이 $\mathrm{P'}$이고 반지름의 길이가 각각 1과 $\frac{\sqrt{7}}{2}$인 두 원으로 둘러싸인 영역 중 삼각형 $\mathrm{ABG'}$ 내부에 있는 영역이다.	6
	평면 ABC와 평면 EGI가 이루는 이면각의 크기 θ에 대한 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	8
	정사영을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.	5

• 예시 답안

[3-1]

점 G에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{G'}$이라 하자. 점 $\mathrm{G'}$은 선분 AC 위의 점이고 선분 BG의 평면 ABC 위로의 정사영은 선분 $\mathrm{BG'}$이므로 점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{P'}$라 하면 점 $\mathrm{P'}$는 선분 $\mathrm{BG'}$ 위의 점이다.
선분 HI의 평면 ABC 위로의 정사영은 선분 AH이고 점 Q에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 $\mathrm{P'}$이므로 점 $\mathrm{P'}$는 선분 AH 위의 점이다. 즉 점 $\mathrm{P'}$은 선분 $\mathrm{BG'}$과 선분 AH의 교점이다.



삼각형 $\mathrm{BCG'}$에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{BG'}}$은

$\overline{\mathrm{BG'}}^2 = 4^2+1^2-2\times4\times1\times\cos60^\circ = 16+1-4=13$

이므로 $\overline{\mathrm{BG'}}=\sqrt{13}$이다.

$\overline{\mathrm{AP'}}:\overline{\mathrm{P'H}}=t:1\ (t>0)$, $\overline{\mathrm{G'P'}}:\overline{\mathrm{P'B}}=m:1\ (m>0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{BG'}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{P'H}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{t+1}$, $\overline{\mathrm{P'B}}=\dfrac{\sqrt{13}}{m+1}$

삼각형 $\mathrm{BHP'}$은 $\angle\mathrm{BHP'}=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\cos(\angle\mathrm{P'BH})=\frac{2}{\overline{\mathrm{P'B}}}=\frac{2}{\dfrac{\sqrt{13}}{m+1}}=\frac{2\sqrt{13}(m+1)}{13}$$

삼각형 $\mathrm{BCG'}$에서 $\overline{\mathrm{BG'}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CG'}}=1$ 이므로 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle\mathrm{G'BC})=\dfrac{(\sqrt{13})^2+4^2-1^2}{2\times\sqrt{13}\times4}=\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$ 이다.

$\cos(\angle\mathrm{P'BH})=\cos(\angle\mathrm{G'BC})$이므로 $\dfrac{2\sqrt{13}(m+1)}{13}=\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$에서

$m=\dfrac{3}{4}$이고 $\cos(\angle\mathrm{P'BH})=\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$이다.

$$\sin(\angle\mathrm{P'BH})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{P'BH})}=\sqrt{1-\left(\frac{7\sqrt{13}}{26}\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{26}$$

삼각형 BHP′은 $\angle \mathrm{BHP}' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\sin(\angle \mathrm{P'BH}) = \frac{\overline{\mathrm{P'H}}}{\overline{\mathrm{P'B}}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{t+1}}{\frac{4\sqrt{13}}{7}} = \frac{7\sqrt{39}}{26(t+1)}$$

이므로 $\frac{\sqrt{39}}{26} = \frac{7\sqrt{39}}{26(t+1)}$ 에서 $t=6$이다.

삼각형 PBP′와 삼각형 GBG′는 서로 닮음이고 닮음비는 $4:7$이므로 $\overline{\mathrm{PP'}} = 8 \times \frac{4}{7} = \frac{32}{7}$이고

삼각형 QHP′와 삼각형 IHA는 서로 닮음이고 닮음비는 $1:7$이므로 $\overline{\mathrm{QP'}} = \frac{1}{7}\overline{\mathrm{AI}}$이다.

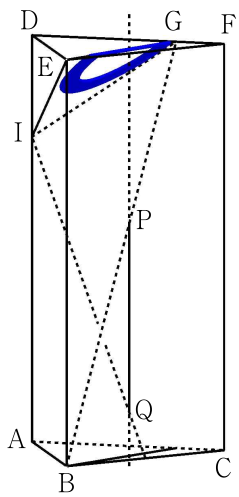
$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PP'}} - \overline{\mathrm{QP'}} = \frac{1}{7}(32 - \overline{\mathrm{AI}}) = \frac{26}{7}$이므로 $\overline{\mathrm{AI}} = 6$이다.

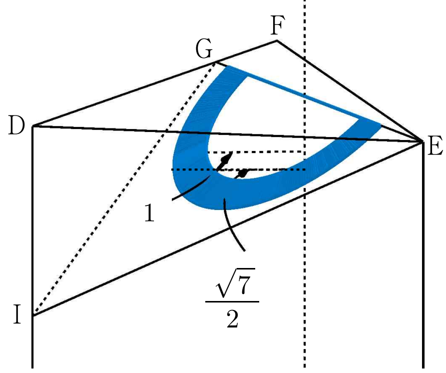
[3-2]

직선 PQ와 평면 EGI의 교점을 K라 하면 점 K는 직선 EG 위에 있으므로 삼각형 EGI와 그 내부의 점 중 점 K가 아닌 점들은 직선 PQ 위의 점이 아니다.

점 K가 아닌 삼각형 EGI와 그 내부의 점 R에서 직선 PQ까지의 거리를 $r\,(r>0)$이라 하면 삼각형 PQR는 밑변의 길이가 $\overline{\mathrm{PQ}} = \frac{26}{7}$이고 높이가 r인 삼각형이다. 즉, 삼각형 PQR의 넓이 T는 $\frac{26}{7} \times r \times \frac{1}{2} = \frac{13}{7}r$이고 $\frac{13}{7} \le \frac{13}{7}r \le \frac{13\sqrt{7}}{14}$ 에서 $1 \le r \le \frac{\sqrt{7}}{2}$

점 R가 나타내는 영역은 삼각형 EGI와 그 내부의 점 중에서 직선 PQ까지의 거리 r가 $1 \le r \le \frac{\sqrt{7}}{2}$ 인 점들이 나타내는 영역이다.



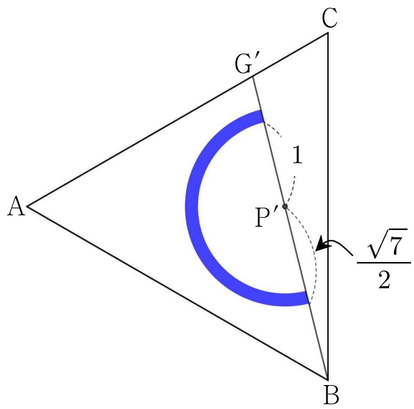


한편 $\overline{\mathrm{AP'}} : \overline{\mathrm{P'H}} = 6:1$이므로 $\overline{\mathrm{AP'}} = \frac{6}{7} \times 2\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{7}$이다.

점 P′에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\angle \mathrm{P'AJ} = 30^\circ$이고 직선 AP′은 $\angle \mathrm{CAB}$의 이등분선이므로 점 P′에서 두 직선 AB, AC까지의 거리는 모두 선분 P′J의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{P'J}}=\overline{\mathrm{AP'}}\times\sin 30^\circ=\frac{12\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$

$\frac{6\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{432}}{14}>\frac{\sqrt{343}}{14}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 이므로 삼각형 EGI와 그 내부의 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 넓이 T가 $\frac{13}{7}\leq T\leq\frac{13\sqrt{7}}{14}$ 이 되도록 하는 모든 점 R가 나타내는 영역의 평면 ABC 위로의 정사영은 아래 그림과 같이 평면 ABC에서 중심이 P′이고 반지름의 길이가 각각 1과 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 인 두 원으로 둘러싸인 영역 중 삼각형 ABG′ 내부에 있는 영역이다.



도형 D의 넓이를 S라 하고, 평면 EGI와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ)$라 하면 $S\times\cos\theta=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-1^2\right\}=\frac{3}{8}\pi$ 이다.

한편 삼각형 EGI에서 $\overline{\mathrm{GI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DG}}^2+\overline{\mathrm{DI}}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$,

$\overline{\mathrm{EI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DE}}^2+\overline{\mathrm{DI}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{GE}}=\sqrt{13}$ 이므로 삼각형 EGI는 $\overline{\mathrm{GI}}=\overline{\mathrm{GE}}=\sqrt{13}$ 인 이등변삼각형이고 선분 EI를 밑변이라 하면 높이는 $\sqrt{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$ 이므로

삼각형 EGI의 넓이는 $2\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{10}$ 이다.

삼각형 EGI의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 BG′A이고 그 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2\times\frac{3}{4}=3\sqrt{3}$

이므로 $2\sqrt{10}\times\cos\theta=3\sqrt{3}$ 에서 $\cos\theta=\frac{3\sqrt{30}}{20}$ 이다.

따라서 $S\times\frac{3\sqrt{30}}{20}=\frac{3}{8}\pi$ 에서 $S=\frac{\sqrt{30}}{12}\pi$ 이다.