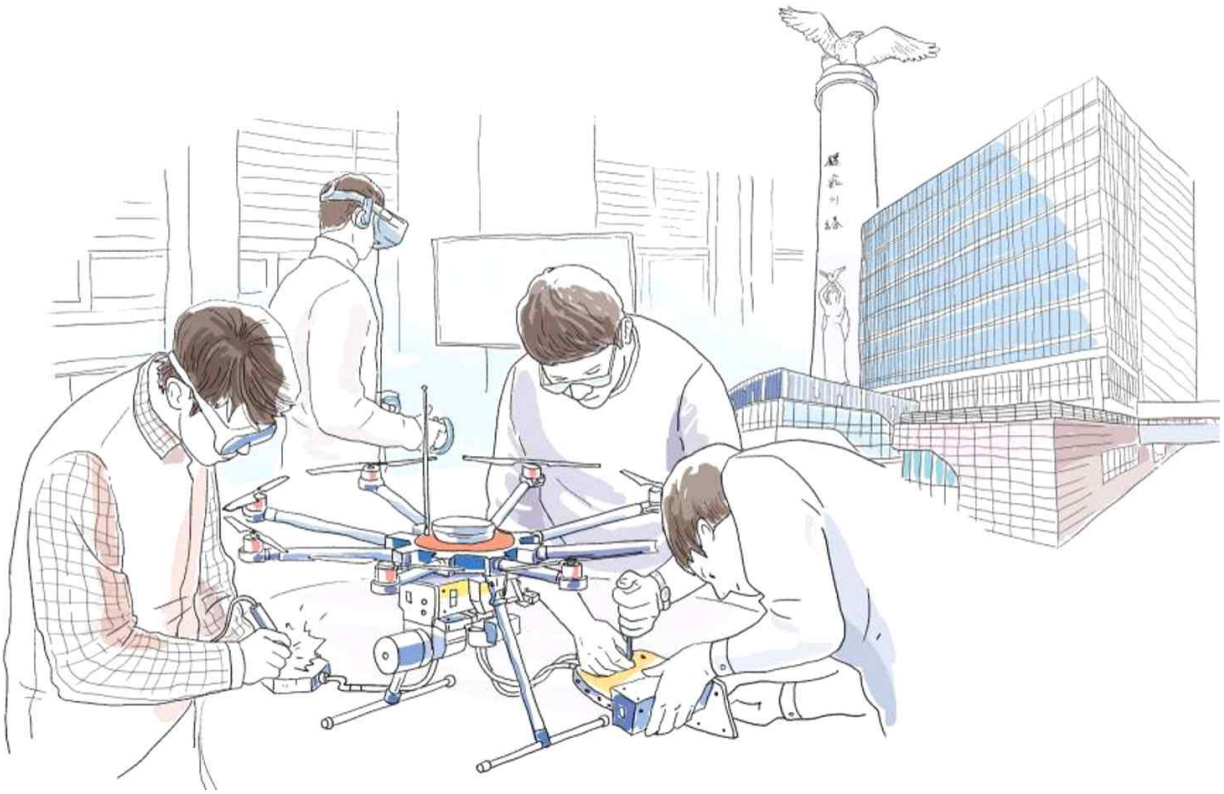
2024학년도 수시모집 논술고사
채점 기준 및 예시 답안
- 자연계 -



문항 번호	자연계 1번

• 출제 의도

본 문항에서는 역함수가 $y=x$에 대해 대칭이라는 사실을 활용하여 조건을 만족하는 함수를 찾을 수 있는지를 평가한다. 특히 증가함수와 감소함수에서 역함수의 특징을 파악할 수 있는지를 확인한다.

[1-1] 역함수와 주어진 함숫값과 미분계수를 활용하여 함수의 관계식을 간단히 하고, 증가함수에서 주어진 조건을 만족하는 함수가 $y=x$에 접한다는 사실을 파악하여 원하는 함수를 구하는 문항이다.

[1-2] 감소함수에서 역함수의 대칭성을 활용한다. f와 f^{-1}의 교점이 $y=x$ 위에 있는 경우와 $y=x$ 위에 있지 않는 경우를 구분하여 접선의 특징을 활용하여 조건을 만족하는 함수를 구하는 문항이다. 또한 사잇값의 정리를 활용하여 주어진 방정식의 근의 위치를 파악하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 역함수를 활용하여 주어진 조건에 맞는 삼차함수를 구할 수 있는지를 평가한다. 특히 역함수의 그래프가 $y=x$에 대칭이라는 성질을 확장하여 역함수의 기울기에도 적용한다. 또한 주어진 조건으로 구한 함수가 나머지 조건을 만족하는지의 여부를 확인하기 위하여 사잇값의 정리를 활용할 수 있는지의 여부를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(x)=a(x-1)^3$으로 나타낼 수 있다.	4
	$y=f(x)$ 그래프와 직선 $y=x$가 접한다는 사실을 확인할 수 있다.	4
	$f(x)=\frac{4}{27}(x-1)^3$을 구할 수 있다.	7
[1-2]	$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점에서 접선의 기울기가 -1임을 구할 수 있다.	3
	$f(x)=-\frac{16}{27}(x-1)^3$을 구할 수 있다.	3
	사잇값의 정리를 사용하여 $x\neq\frac{1}{4}$인 실근이 있음을 확인할 수 있다.	5
	직선 $y=x$에 대한 대칭을 이용하여 다른 하나의 실근이 있음을 확인하여 적어도 3개의 서로 다른 실근을 가짐을 보일 수 있다.	4

- **예시 답안**

[1-1]

삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=f'(1)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$에서 x축에 접하므로 $f(x)=(x-1)^2(ax+b)$의 형태가 된다. 또한 $f(x)$가 일대일대응이므로 $f(x)=a(x-1)^3$이다.

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 서로 다른 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$y=f(x)$가 증가함수이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있다.

조건 (ⅱ)에 의해 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 두 점 중 한 점은 접점이다.

접점의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면 $f(t)=t$이고 $f'(t)=1$이다.

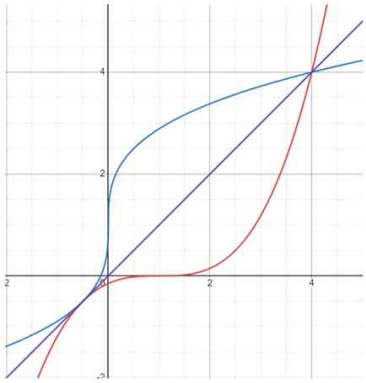
$f(t)=t$에서 $a(t-1)^3=t$ ⋯ ①

$f'(t)=1$에서 $3a(t-1)^2=1$ ⋯ ②

①, ②에서 $\frac{1}{3}(t-1)=t$이고 $t=-\frac{1}{2}$이다. 그러므로 $a=\frac{4}{27}$이다.

따라서 $f(x)=\frac{4}{27}(x-1)^3$이다.

[1-1] 해답함수 $f(x)=\frac{4}{27}(x-1)^3$ 의 그래프와 역함수 $f^{-1}(x)=\left(\frac{27x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+1$ 의 그래프



[1-2]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 (t,t)라 하자.

$x=t$에서 $y=f(x)$의 접선의 기울기를 m_1이라 하면 접선의 방정식은 $y=m_1(x-t)+t$이다.

$x=t$에서 $y=f^{-1}(x)$의 접선의 기울기를 m_2라 하면 접선의 방정식은 $y=m_2(x-t)+t$이다.

조건 (ⅱ)에 의해 $m_1=m_2$ … ①

f와 f^{-1}가 $y=x$에 대해 대칭이므로 $y=m_1(x-t)+t$를 $y=x$에 대해 대칭하면 $x=m_1(y-t)+t$에서 $y=\frac{1}{m_1}(x-t)+t$이다. 이 직선의 방정식이 $y=m_2(x-t)+t$와 일치하므로 $\frac{1}{m_1}=m_2$이고

$m_1\times m_2=1$ … ② 이다.

①, ②에 의해 ${m_1}^2=1$이고 $m_1=\pm 1$이다. 함수 f가 감소함수이므로 $m_1=m_2=-1$이다.

[1-1]에서 $f(x)=a(x-1)^3$이고, (t,t)를 지나므로 $f(t)=t$에서 $a(t-1)^3=t$ … ③

$x=t$에서 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(t)=-1$에서 $3a(t-1)^2=-1$ … ④

③, ④에 의해서 $-\frac{1}{3}(t-1)=t$이고 $t=\frac{1}{4}$이다. 그러므로 $a=-\frac{16}{27}$이다.

따라서 $f(x)=-\frac{16}{27}(x-1)^3$이다.

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$가 적어도 3개의 서로 다른 실근을 가짐을 보이자.

조건 (ⅰ)에 의해 $y=f(x)$는 감소함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 1이고 이 점의 x좌표가 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근과 일치하므로 $x=\frac{1}{4}$이 $f(x)=f^{-1}(x)$의 하나의 실근이 된다.

$g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$라 하면, $g(x)$는 실수 전체에서 연속이다.

$g(-1)=f(-1)-f^{-1}(-1)=\frac{128}{27}-\left(1+\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right)>0$이고, $g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=\frac{16}{27}-1<0$이다.

따라서 제시문 (다)에 의해서 $(-1,0)$에서 $g(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f(c)=f^{-1}(c)$이므로 c가 $f(x)=f^{-1}(x)$의 하나의 실근이 된다.

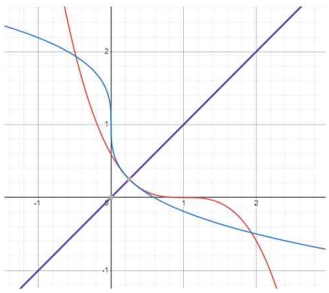
$f(c)=q$라 하면 $f^{-1}(c)=q$이고, f와 f^{-1}가 $y=x$에 대해 대칭이므로 $f^{-1}(q)=c$, $f(q)=c$이다.

$f(q)=c=f^{-1}(q)$가 되어 q가 $f(x)=f^{-1}(x)$의 하나의 실근이 된다.

$y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 개수는 1이라는 사실에 의해 $c\neq q$이다.

따라서 $\frac{1}{4}$, c, q가 $f(x)=f^{-1}(x)$의 서로 다른 세 실근이다.

[1-2] 해답함수 $f(x)=-\frac{16}{27}(x-1)^3$ 의 그래프와 역함수 $f^{-1}(x)=-\left(\frac{27}{16}x\right)^{\frac{1}{3}}+1$의 그래프



문항 번호	자연계 2번

• 출제 의도

본 문항에서는 매개변수로 나타낸 함수, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이해하고 함수의 극한값 및 치환적분법을 이용한 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[2-1] 주어진 조건을 만족시키는 도형 위를 움직이는 점의 좌표를 매개변수로 나타내는 문항이다.

[2-2] 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후 주어진 선분의 길이를 매개변수로 나타내어 함수의 극한값을 구하는 문항이다.

[2-3] 주어진 조건을 활용하여 치환적분법을 이용하여 정적분 값을 구하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 매개변수로 나타낸 함수, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이해하고 함수의 극한값 및 치환적분법을 이용한 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	접선의 기울기를 이용하여 $f(t)$, $g(t)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3
	주어진 거리를 이용하여 $f(t)$, $g(t)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	2
	$f(t)$, $g(t)$를 각각 t에 관한 식으로 나타낼 수 있다.	5
[2-2]	두 점 A, B의 x좌표를 미지수로 하는 이차방정식을 구할 수 있다.	6
	$l(t)$를 t에 관한 식으로 나타낼 수 있다.	7
	함수의 극한값을 구할 수 있다.	2
[2-3]	치환적분법을 이용할 수 있는 꼴로 함수를 정리할 수 있다.	4
	정적분의 값을 구할 수 있다.	6

- **예시 답안**

[2-1]

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{t^2}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 t이므로

점 P에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이다.

그러므로 $\dfrac{g(t)-\frac{t^2}{2}}{f(t)-t} = -\frac{1}{t}$ …… ①

또한 선분 PQ의 길이가 1이므로

$\{f(t)-t\}^2+\left\{g(t)-\frac{t^2}{2}\right\}^2=1$ …… ②

①과 ②를 연립하면

$\left\{g(t)-\frac{t^2}{2}\right\}^2=\frac{1}{t^2+1}$이므로 $g(t)=\frac{t^2}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이고

조건 (ⅱ)에 의하여 $g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

이를 ①에 대입하면 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

따라서 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

[다른 풀이]

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{t^2}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 t이므로

점 P에서의 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 접선의 방정식은 $y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2$ …… ①

점 Q는 위의 접선에 수직인 직선 위에 있으므로 $g(t)=-\frac{1}{t}\{f(t)-t\}+\frac{1}{2}t^2$ … ②

또한 점 Q는 ①의 직선과의 거리가 1이므로 $\dfrac{\left|tf(t)-g(t)-\frac{1}{2}t^2\right|}{\sqrt{t^2+1}}=1$… ③

②와 ③을 연립하면 $f(t)=t\pm\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

이를 ②에 대입하면 $g(t)=\frac{1}{2}t^2\mp\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

조건 (ⅱ)에 의하여 $g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이므로 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

따라서 $f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

[2-2]

점 $\mathrm{Q}(x,\ y)$에서의 곡선 D의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t-\frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}}{1-\frac{\sqrt{t^2+1}-\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}}=\frac{t\left\{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}-1\right\}}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}-1}=t$$ 이다.

점 $\mathrm{Q}(x,\ y)$에서의 곡선 D의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)=t\left\{x-\left(t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\right\}$이다.

$y=\frac{x^2}{2}$ 과 연립하여 정리하면 $x^2-2tx+t^2-2\sqrt{t^2+1}=0$ …… ① 이다.

①의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha,\ \beta$는 두 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$의 x좌표이다.

$l(t)$는 밑변의 길이와 높이가 각각 $|\alpha-\beta|$와 $|t(\alpha-\beta)|$인 직각삼각형의 빗변의 길이다.

피타고라스의 정리에 의하여 $l(t)=\sqrt{t^2+1}\,|\alpha-\beta|$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\sqrt{(2t)^2-4(t^2-2\sqrt{t^2+1})}\\&=2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

그러므로 $l(t)=\sqrt{t^2+1}\times 2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}$

$$=2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{3}{4}}$$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{t\sqrt{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\sqrt[4]{(t^2+1)^3}}{\sqrt[4]{t^6}}=2\sqrt{2}$

[다른 풀이] - ①을 이용하여 $l(t)$를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

$x^2-2tx+t^2-2\sqrt{t^2+1}=0$의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=t\pm\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}$이다.

$\alpha=t+\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}},\ \beta=t-\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}$이라 하면 $l(t)$는

$$\begin{aligned}l(t)&=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2}\right)^2}\\&=(\alpha-\beta)\sqrt{1+\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2}\\&=2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{4}\times 4t^2}\\&=2\sqrt{2}(t^2+1)^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

이다.

[2-3]

$\frac{g'(t)}{f'(t)}=t$ 에서 $\frac{g'(t)}{t}=f'(t)$ 이다.

그러므로 $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{t}f(t)g'(t)dt=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}f(t)f'(t)dt$

$f(t)=u$ 으로 치환하면 $f'(t)=\frac{du}{dt}$ 이고

$f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

$f(\sqrt{3})=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}f(t)f'(t)dt=\int_{f(\sqrt{3})}^{f(2\sqrt{2})}udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{f(\sqrt{3})}^{f(2\sqrt{2})}$

$$=\frac{\{f(2\sqrt{2})\}^2-\{f(\sqrt{3})\}^2}{2}=\frac{\frac{32}{9}-\frac{3}{4}}{2}=\frac{101}{72}$$

[다른 풀이]

$f(t)=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $g'(t)=t-t(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$ 이므로

$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{t}f(t)g'(t)dt=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}t\left(1-(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}-(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}+(t^2+1)^{-2}\right)dt$ 이다.

$u=t^2+1$ 으로 치환하면 $\frac{du}{dt}=2t$ 이고

따라서 $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{t}f(t)g'(t)dt=\frac{1}{2}\int_4^9\left(1-u^{-\frac{1}{2}}-u^{-\frac{3}{2}}+u^{-2}\right)du$

$$=\frac{1}{2}\left[u-2\sqrt{u}+\frac{2}{\sqrt{u}}-\frac{1}{u}\right]_4^9$$

$$=\frac{101}{72}$$

문항 번호	자연계 3번

• 출제 의도

본 문항에서는 공간 도형 위의 여러 가지 선분들의 길이를 찾고 공간에서 주어진 길이들을 계산하고 한 평면위에 놓이지 않은 도형의 넓이가 일정함을 찾기 위해 정사영에서의 계산 결과에 대한 논리적 추론이 가능한가를 평가하고자 하였다.
[3-1] 삼각기둥에서 선분들의 길이를 찾고 코사인 법칙을 이용하여 주어진 길이를 찾을 수 있는지를 평가하는 문항이다.
[3-2] 공간에서 주어진 삼각형의 넓이가 일정함을 만족시키는 점들의 조건을 찾기 위해 그 점들의 정사영에서의 길이들을 계산하여 반원이 됨을 찾고 각각의 도형을 포함하는 두 평면(삼각형)의 넓이를 계산하여 두 평면(삼각형)이 이루는 각의 크기를 구하고 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 삼각기둥에서 선분들의 길이를 찾고 코사인 법칙을 이용하여 주어진 길이를 찾을 수 있는지를 평가한다. 공간에서 주어진 삼각형의 넓이가 일정함을 만족시키는 점들의 조건을 찾기 위해 그 점들의 정사영에서의 길이들을 계산하여 반원이 됨을 찾고 각각의 도형을 포함하는 두 평면(삼각형)의 넓이를 계산하여야 하며 이때 두 평면(삼각형)이 이루는 각의 크기를 구하고 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

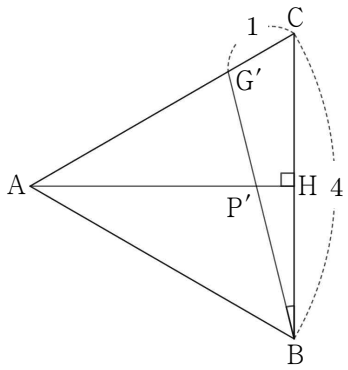
• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	점 G에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 선분 AC 위에 있음을 서술할 수 있다.	2
	삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AP'}}$ 또는 $\overline{\mathrm{P'H}}$의 길이를 구할 수 있다.	6
	$\overline{\mathrm{AP'}}:\overline{\mathrm{P'H}}$의 비율을 구할 수 있다.	2
[3-2]	넓이 조건으로부터 점 R은 직선 PQ를 축으로 하고 축과의 거리가 1인 원기둥 위에 있어야 함을 서술할 수 있다.	6
	점 R이 나타내는 도형의 평면 ABC 위로의 정사영은 중심이 점 $\mathrm{P'}$이고 삼각형 $\mathrm{ABG'}$ 내부에 있는 반지름의 길이가 1인 반원임을 서술할 수 있다.	6
	평면 ABC와 평면 EGI가 이루는 이면각 θ에 대한 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	8
	정사영을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.	5

- **예시 답안**

[3-1]

점 G에서 평면 ABC에 내린 수선의 발 $\mathrm{G'}$는 선분 AC 위의 점이다.



삼각형 $\mathrm{BCG'}$에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{BG'}}$는

$\overline{\mathrm{BG'}}^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \times 4 \times 1 \times \cos 60^\circ = 16 + 1 - 4 = 13$

이므로 $\overline{\mathrm{BG'}} = \sqrt{13}$이다.

$\overline{\mathrm{AP'}} : \overline{\mathrm{P'H}} = t : 1 \ (t > 0)$, $\overline{\mathrm{G'P'}} : \overline{\mathrm{P'B}} = m : 1 \ (m > 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{BG'}} = \sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{P'H}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{t+1}$, $\overline{\mathrm{P'B}} = \dfrac{\sqrt{13}}{m+1}$

삼각형 $\mathrm{BHP'}$은 $\angle \mathrm{BHP'} = 90^\circ$ 인

직각삼각형이므로 $\cos(\angle \mathrm{P'BH}) = \dfrac{2}{\overline{\mathrm{P'B}}} = \dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{13}}{m+1}} = \dfrac{2\sqrt{13}(m+1)}{13}$

삼각형 $\mathrm{BCG'}$에서 $\overline{\mathrm{BG'}} = \sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 4$, $\overline{\mathrm{CG'}} = 1$이므로 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle \mathrm{G'BC}) = \dfrac{(\sqrt{13})^2 + 4^2 - 1^2}{2 \times \sqrt{13} \times 4} = \dfrac{7\sqrt{13}}{26}$ 이다.

$\cos(\angle \mathrm{P'BH}) = \cos(\angle \mathrm{G'BC})$이므로 $\dfrac{2\sqrt{13}(m+1)}{13} = \dfrac{7\sqrt{13}}{26}$ 에서

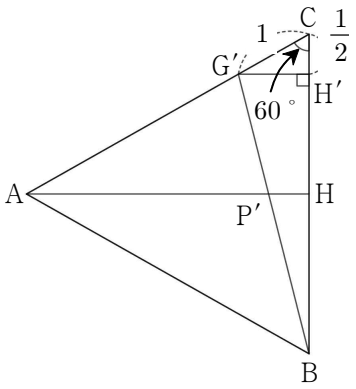
$m = \dfrac{3}{4}$ 이고 $\cos(\angle \mathrm{P'BH}) = \dfrac{7\sqrt{13}}{26}$이다.

$\sin(\angle \mathrm{P'BH}) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle \mathrm{P'BH})} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7\sqrt{13}}{26}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{39}}{26}$

삼각형 $\mathrm{BHP'}$은 $\angle \mathrm{BHP'} = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 $\sin(\angle \mathrm{P'BH}) = \dfrac{\overline{\mathrm{P'H}}}{\overline{\mathrm{P'B}}} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{t+1}}{\dfrac{4\sqrt{13}}{7}} = \dfrac{7\sqrt{39}}{26(t+1)}$

이므로 $\dfrac{\sqrt{39}}{26} = \dfrac{7\sqrt{39}}{26(t+1)}$ 에서 $t = 6$이다.

[다른 풀이]



점 G에서 평면 ABC에 내린 수선의 발 G′는 선분 AC 위의 점이다.

점 G′에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H′라 하자. $\overline{CH'}=\overline{CG'}\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

즉, $\overline{BH'}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$이고, $\overline{BH}=2$이므로 $\overline{G'H'}:\overline{P'H}=\overline{BH'}:\overline{BH}=\frac{7}{2}:2=7:4$

$\overline{G'H'}=\overline{CG'}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\overline{P'H}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$

$\overline{AP'}=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{7}=\frac{12\sqrt{3}}{7}$이므로 $\overline{AP'}:\overline{P'H}=\frac{12\sqrt{3}}{7}:\frac{2\sqrt{3}}{7}=6:1$

따라서 $t=6$이다.

[3-2]

두 점 P, Q는 각각 선분 BG, 선분 HI 위의 점이므로 두 점 P, Q에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 점 P′이다.

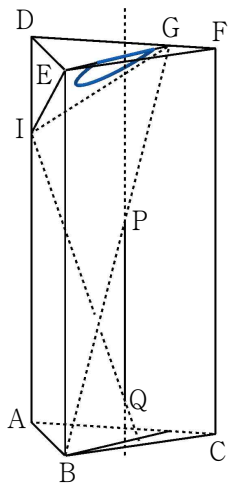
즉, 직선 PQ와 평면 EGI의 교점은 선분 EG 위에 있으므로 삼각형 EGI 내부의 점 R은 직선 PQ 위의 점이 아니다.

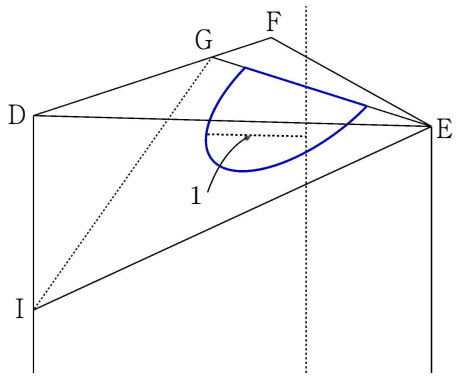
삼각형 EGI 내부의 점 R에서 직선 PQ까지의 거리를 $r\,(r>0)$라 하면 삼각형 PQR은 밑변의 길이가 $\overline{PQ}=\frac{26}{7}$이고

높이가 r인 삼각형이다. 즉, 삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{26}{7}\times r\times\frac{1}{2}=\frac{13}{7}r$이고 $\frac{13}{7}r=\frac{13}{7}$에서

$r=1$

점 R이 나타내는 도형은 삼각형 EGI 내부의 점 중에서 직선 PQ까지의 거리가 1인 점들이 나타내는 도형이다.

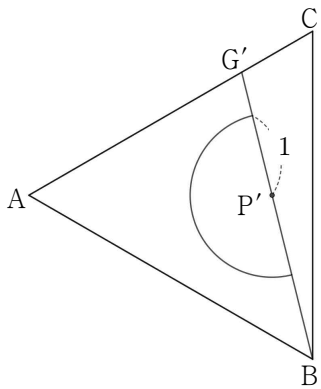




한편 $\overline{AP'}:\overline{P'H}=6:1$이므로 $\overline{AP'}=\frac{6}{7}\times 2\sqrt{3}=\frac{12\sqrt{3}}{7}$이다.

점 P'에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\angle P'AJ=30^\circ$이고 직선 AP'는 $\angle CAB$의 이등분선이므로 점 P'에서 두 직선 AB, AC까지의 거리는 모두 선분 $P'J$의 길이와 같다.

$\overline{P'J}=\overline{AP'}\times \sin 30^\circ=\frac{12\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$이고 $\frac{6\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{108}}{7}>\frac{\sqrt{49}}{7}=1$이므로 삼각형 EGI 내부의 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 넓이가 $\frac{13}{7}$이 되도록 하는 모든 점 R이 나타내는 도형을 D라 하면 도형 D의 평면 ABC 위로의 정사영은 중심이 P'이고 반지름의 길이가 1이며 삼각형 ABG' 내부에 있는 반원이다.



도형 D와 선분 EG로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하고, 평면 EGI와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 하면 $S\times\cos\theta=\frac{\pi}{2}$이다.

한편 삼각형 PBP'와 삼각형 GBG'는 서로 닮음이고 닮음비는 $4:7$이므로 $\overline{PP'}=8\times\frac{4}{7}=\frac{32}{7}$이고

삼각형 QHP'와 삼각형 IHA는 서로 닮음이고 닮음비는 $1:7$이므로 $\overline{QP'}=\frac{1}{7}\overline{AI}$이다.

$\overline{PQ}=\overline{PP'}-\overline{QP'}=\frac{1}{7}(32-\overline{AI})=\frac{26}{7}$이므로 $\overline{AI}=6$이다.

삼각형 EGI에서 $\overline{\mathrm{GI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DG}}^2+\overline{\mathrm{DI}}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{EI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DE}}^2+\overline{\mathrm{DI}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{GE}}=\sqrt{13}$ 이므로 삼각형 EGI는 $\overline{\mathrm{GI}}=\overline{\mathrm{GE}}=\sqrt{13}$인 이등변삼각형이고 선분 EI를 밑변이라 하면

높이는 $\sqrt{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 EGI의 넓이는 $2\sqrt{5}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{10}$이다.

삼각형 EGI의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 BG′A이고 그 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\times\frac{3}{4}=3\sqrt{3}$ 이므로

$2\sqrt{10}\times\cos\theta=3\sqrt{3}$ 에서 $\cos\theta=\frac{3\sqrt{30}}{20}$

따라서 $S\times\frac{3\sqrt{30}}{20}=\frac{\pi}{2}$ 에서 $S=\frac{\sqrt{30}\pi}{9}$이다.