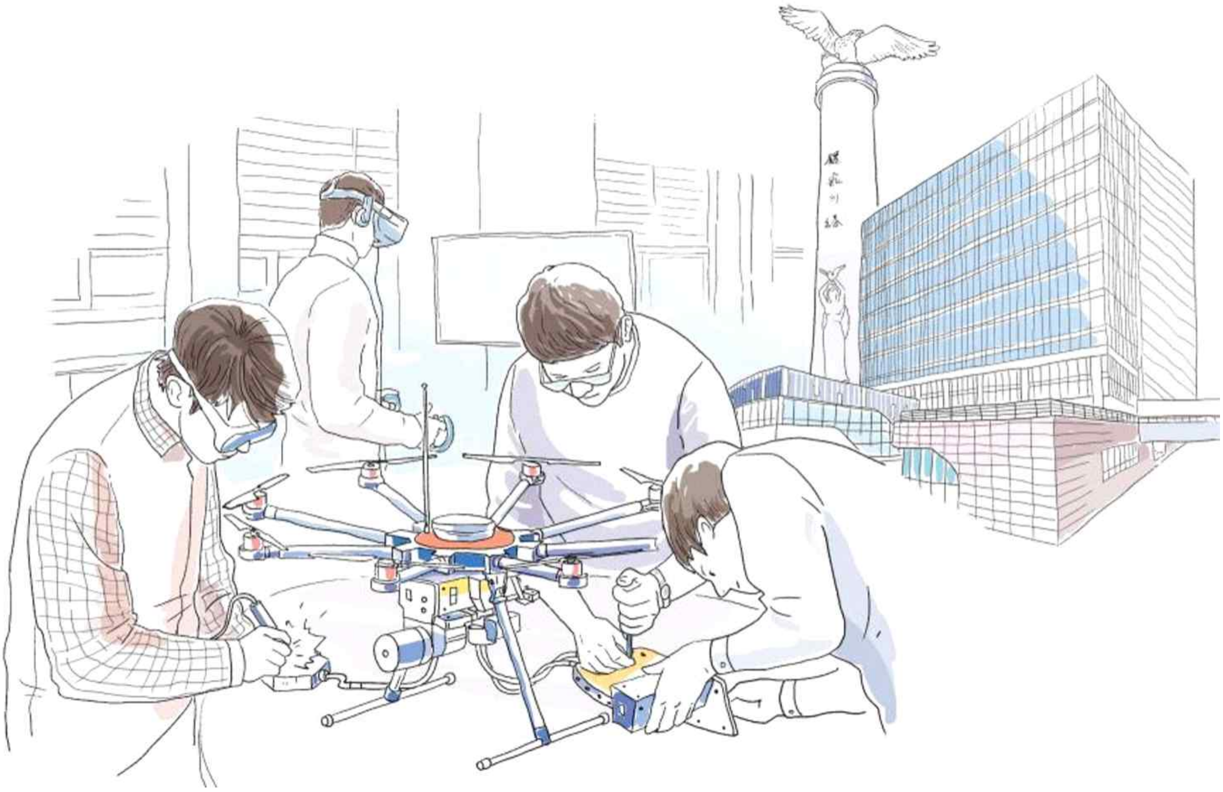
2023학년도 수시모집 논술고사
채점 기준 및 예시 답안
- 자연계 -



문항 번호	자연계 1번

• 출제 의도

본 문항에서는 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀고 근을 판별하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 설명할 수 있는지를 평가한다.

[1-1] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀어 서로 다른 실근의 개수를 판별하고 곡선과 곡선의 교점의 개수를 구하는 문항이다.

[1-2] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 이해하고 교점의 개수를 구하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 주어진 직선의 방정식, 이차함수, 원의 방정식을 연립하여 연립이차방정식을 풀고 실근을 구할 수 있는지를 평가하고, 구한 실근의 개수를 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계, 원과 직선의 위치관계 및 교점의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$0 < r < \sqrt{3}$ 일 때, $N(r) = 0$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r = \sqrt{3}$ 일 때, $N(r) = 2$ 임을 구할 수 있다.	3
	$\sqrt{3} < r < 2$일 때, $N(r) = 4$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r = 2$일 때, $N(r) = 3$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r > 2$일 때, $N(r) = 2$ 임을 구할 수 있다.	3
[1-2]	직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수를 k의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수를 k의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	두 곡선 C_1, C_2와 직선 l이 동시에 지나는 점의 개수를 구할 수 있다.	5
	도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되는 모든 실수 k의 값을 구할 수 있다.	5

• 예시 답안

[1-1]

두 곡선 C_1, C_2 의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 + k - 2 & \cdots ① \\ x^2 + (y-k)^2 = r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수와 같다.

①을 ②에 대입하면

$$x^2 + \left\{\left(\frac{1}{2}x^2 + k - 2\right) - k\right\}^2 = r^2$$

$$x^4 - 4x^2 + 16 - 4r^2 = 0 \quad \cdots ③$$

이다. ①에서 y 는 x 의 값에 따라 유일하게 결정되므로 $N(r)$ 는 ③을 만족하는 x의 개수와 같다.

$X = x^2$ 으로 치환하면 $X^2 - 4X + 16 - 4r^2 = 0$ 이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4 = 4 - (16 - 4r^2) = 4(r^2 - 3)$$

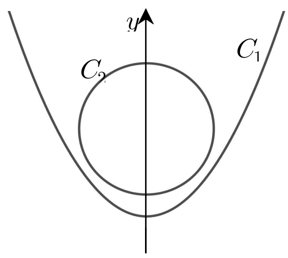
이다. 따라서

$r^2 - 3 < 0$ 일 때 실수 X의 값은 존재하지 않는다. ⋯ ⅰ)

$r^2 - 3 = 0$ 일 때 실수 X의 값은 오직 하나를 갖는다. ⋯ ⅱ)

$r^2 - 3 > 0$ 일 때 실수 X의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. ⋯ ⅲ)

ⅰ) $r^2 - 3 < 0$ 즉, $0 < r < \sqrt{3}$ 이면 $N(r) = 0$

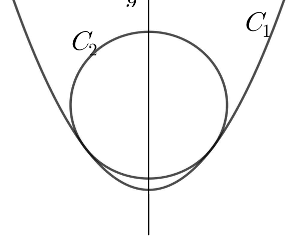


[$0 < r < \sqrt{3}$ 일 때]

ⅱ) $r^2 - 3 = 0$ 즉, $r = \sqrt{3}$ 이면

$X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2 = 0$.

따라서 $X = 2$ 이고 이때의 $x = \pm\sqrt{2}$ 이므로 $N(r) = 2$ ⋯【※】



[$r = \sqrt{3}$ 일 때]

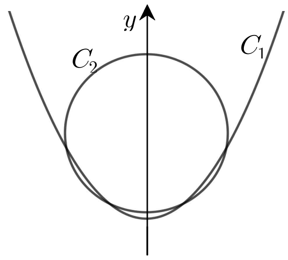
ⅲ) $r^2 - 3 > 0$ 즉, $r > \sqrt{3}$ 일 때

$x^2 = 2 + 2\sqrt{r^2 - 3}$ 또는 $x^2 = 2 - 2\sqrt{r^2-3}$ 이다.

① $0 < r^2 - 3 < 1$ 즉, $\sqrt{3} < r < 2$이면

$2-2\sqrt{r^2-3}>0$ 이 되어 이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 과 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 이 각각 서로 다른 두 개의 실수

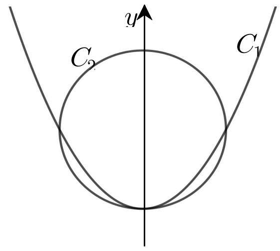
x 의 값을 가지므로 $N(r)=4$



[$\sqrt{3}<r<2$일 때]

② $r^2-3=1$ 즉, $r=2$ 이면

$x^2=4$ 또는 $x^2=0$ 이므로 $x=\pm 2$ 또는 $x=0$이다. 따라서 $N(r)=3$

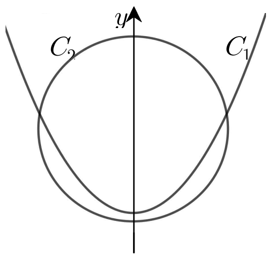


[$r=2$ 일 때]

③ $r^2-3>1$ 즉, $r>2$ 이면

$2-2\sqrt{r^2-3}<0$ 이 되어 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은 존재하지 않고,

이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 은 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=2$



[$r>2$ 일 때]

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<\sqrt{3}) \\ 2 & (r=\sqrt{3} \text{ 또는 } r>2) \\ 3 & (r=2) \\ 4 & (\sqrt{3}<r<2) \end{cases}$

[1-1 별해]

두 곡선 C_1, C_2 의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+k-2 & \cdots ① \\ x^2+(y-k)^2=r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\,y)$ 의 개수와 같다.

①에서 $x^2=2(y-k+2)$ 이므로 이를 ②에 대입하면

$$(y-k)^2+2(y-k+2)=r^2$$

$$y^2-2(k-1)y+k^2-2k+4-r^2=0$$

이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4=(k-1)^2-\left(k^2-2k+4-r^2\right)=r^2-3$$

이다. 따라서

$r^2-3<0$일 때 실수 y의 값은 존재하지 않는다. ⋯ ⅰ)

$r^2-3=0$일 때 실수 y의 값은 오직 하나를 갖는다. ⋯ ⅱ)

$r^2-3>0$일 때 실수 y의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. ⋯ ⅲ)

ⅰ) $r^2-3<0$ 즉, $0<r<\sqrt{3}$이면 $N(r)=0$

ⅱ) $r^2-3=0$ 즉, $r=\sqrt{3}$이면

$y^2-2(k-1)y+(k-1)^2=0$, $\{y-(k-1)\}^2=0$

따라서 $y=k-1$이고 이때의 $x=\pm\sqrt{2}$이므로 $N(r)=2$ ⋯【※】

ⅲ) $r^2-3>0$ 즉, $r>\sqrt{3}$일 때

방정식 $y^2-2(k-1)y+k^2-2k+4-r^2=0$에서

$y=(k-1)\pm\sqrt{r^2-3}$이고 이때의 $x^2=2(y-k+2)=2\left(1\pm\sqrt{r^2-3}\right)$

① $0<r^2-3<1$ 즉, $\sqrt{3}<r<2$이면 $x^2>0$이 되어

$y=(k-1)\pm\sqrt{r^2-3}$일 때 각각 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=4$

② $r^2-3=1$ 즉, $r=2$이면

$y=k$일 때 $x=\pm 2$이고,

$y=k-2$일 때 $x=0$이므로 $N(r)=3$

③ $r^2-3>1$ 즉, $r>2$이면

$y=(k-1)-\sqrt{r^2-3}$일 때 $x^2<0$이므로 실수 x의 값은 존재하지 않고

$y=(k-1)+\sqrt{r^2-3}$일 때 $x^2>0$이 되어 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=2$

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<\sqrt{3}) \\ 2 & (r=\sqrt{3} \text{ 또는 } r>2) \\ 3 & (r=2) \\ 4 & (\sqrt{3}<r<2) \end{cases}$

[1-2]

직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수를 n_1,

직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수를 n_2,

두 곡선 C_1, C_2와 직선 l이 동시에 지나는 점이 개수를 n_3라 하면

도형 C와 직선 l의 교점의 개수는 $n_1+n_2-n_3$와 같다.

ⅰ) 직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+k-2 \\ y=kx+k-6 \end{cases}$ 을 동시에

만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$\frac{1}{2}x^2+k-2=kx+k-6$ 이므로 $x^2-2kx+8=0$이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4=k^2-8$ 이므로

$$n_1=\begin{cases}2 & (k<-\sqrt{8}\text{ 또는 }k>\sqrt{8})\\ 1 & (k=\pm\sqrt{8})\\ 0 & (-\sqrt{8}<k<\sqrt{8})\end{cases}$$

ⅱ) 직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases}x^2+(y-k)^2=3\\ y=kx+k-6\end{cases}$ 을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$x^2+(kx-6)^2=3$ 이므로 $(k^2+1)x^2-12kx+33=0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4=3(k^2-11)$이므로

$$n_2=\begin{cases}2 & (k<-\sqrt{11}\text{ 또는 }k>\sqrt{11})\\ 1 & (k=\pm\sqrt{11})\\ 0 & (-\sqrt{11}<k<\sqrt{11})\end{cases}$$

ⅲ) 【※】에 의해서 두 곡선 C_1, C_2는 두 점 $(\sqrt{2}, k-1)$, $(-\sqrt{2}, k-1)$에서 만난다.

이 점이 직선 $l: y=kx+k-6$ 을 지나면

$k-1=\pm\sqrt{2}k+k-6$

을 만족하므로 $k=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 가 되어

$$n_3=\begin{cases}1 & \left(k=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\\ 0 & \left(k\neq\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $n_1+n_2-n_3=3$ 이 되는 경우는

① $n_1=2$, $n_2=1$, $n_3=0$ 일 때 $k=\pm\sqrt{11}$

② $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=0$ 일 때 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

③ $n_1=2$, $n_2=2$, $n_3=1$ 일 때 $k=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

그러므로 도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되는 k의 값은 $k=\pm\sqrt{11}$, $k=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

[1-2 별해]

직선 $l: kx-y+k-6=0$ 과 원 C_2의 교점의 개수를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

원 C_2의 중심 $(0, k)$와 직선 l과의 거리 d는 $\frac{|k\times 0-k+(k-6)|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{k^2+1}}$이다. 따라서

$d<\sqrt{3}$ 즉, $k<-\sqrt{11}$ 또는 $k>\sqrt{11}$ 이면 $n_2=2$

$d=\sqrt{3}$ 즉, $k=\pm\sqrt{11}$ 이면 $n_2=1$

$d>\sqrt{3}$ 즉, $-\sqrt{11}<k<\sqrt{11}$ 이면 $n_2=0$

문항 번호	자연계 2번

• 출제 의도

본 문항에서는 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 그리고 함수의 최솟값과 접선의 방정식을 구할 수 있는지와 점의 위치에 따라 변하는 값을 함수로 표현하고 연속의 성질을 이용하여 특정 함숫값이 존재함을 보일 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 도함수를 이용하여 곡선 밖에서 그은 접선의 방정식과 최솟값을 구하고 조건에 맞는 원의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 구하려는 값을 함수로 표현하고 사잇값 정리를 적용할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 도함수를 이용하여 다항함수의 최솟값과 접선의 방정식을 구하고 주어진 조건에 맞는 원의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 접선 위의 한 점과 주어진 두 점들을 연결한 삼각형의 넓이의 합을 함수로 정의하고 이 함수가 연속함수임을 판별한 후 특정 값을 함숫값으로 가질 수 있음을 사잇값 정리를 이용하여 설명할 수 있는지를 평가하고자 한다.

• 채점 기준

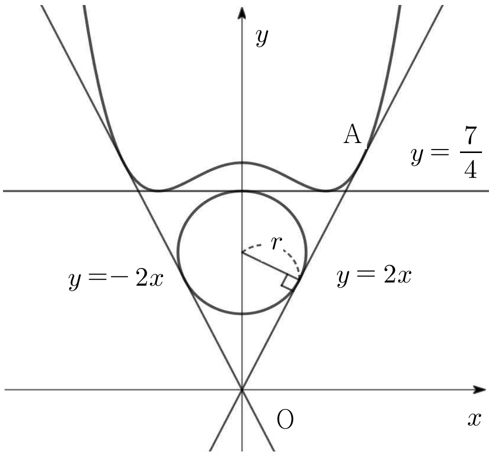
하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	함수의 최솟값을 구할 수 있다.	5
	곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다.	5
	세 직선에 동시에 접하는 원의 반지름을 구할 수 있다.	5
[2-2]	$\sum_{n=1}^{10} S_n$ 을 구할 수 있다.	5
	$\sum_{n=1}^{10} S_n - 1$ 또는 $\sum_{n=1}^{10} S_n$ 을 함수로 나타내고 연속임을 확인할 수 있다.	5
	함숫값을 확인하고 사잇값 정리를 적용할 수 있다.	5
	조건을 만족하는 점 P 가 존재함을 보일 수 있다.	5

• 예시 답안

[2-1]

$f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이므로 함수 $y = f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	2	↘	$\frac{7}{4}$	↗



함수의 최솟값 $k = \frac{7}{4}$

점 $(t, t^4 - t^2 + 2)$에서의 접선의 방정식은 $y = (4t^3 - 2t)(x - t) + t^4 - t^2 + 2$

이 직선이 원점을 지나므로 $t = \pm 1$이고 접선의 방정식은 $y = \pm 2x$이다.

$y = \frac{7}{4}$와 $y = \pm 2x$에 접하는 원 C의 반지름을 r라 하면 원의 중심 $\left(0, \frac{7}{4} - r\right)$와 직선 $y = 2x$ 사이의 거리가 r이므로

$\frac{\left|\frac{7}{4} - r\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = r$ 이고 $r < \frac{7}{4}$이므로

$r = \frac{7(\sqrt{5} - 1)}{16}$

[2-2]

[2-1]에서 $\mathrm{A}(1,2)$임을 알 수 있다.

$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times |b - q_n|$이므로 $\sum_{n=1}^{10} S_n = \sum_{n=1}^{10} \frac{b}{4} |b - q_n| = 1$을 만족시키는 b의 존재성을 살펴보자.

$g(y) = \sum_{n=1}^{10} \frac{y}{4} |y - q_n| - 1$이라 하면, 함수 g는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고

$g(0) = -1$

$q_n < \frac{7}{4}$이므로 $\sum_{n=1}^{10} q_n < \frac{35}{2}$

$g(2) = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2} |2 - q_n| - 1 = 9 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} q_n > 0$

$g(0) < 0$, $g(2) > 0$이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = 0$을 만족하는 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} S_n = 1$을 만족시키는 점 P가 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$ 위에 적어도 하나 존재한다.

[2-2 별해]

[2-1]에서 $\mathrm{A}(1,2)$임을 알 수 있다.

$S_n = \frac{1}{2} \times a \times |2a - q_n|$이므로 $\sum_{n=1}^{10} S_n = \sum_{n=1}^{10} \frac{a}{2} |2a - q_n| = 1$을 만족시키는 a의 존재성을 살펴보자.

$g(x) = \sum_{n=1}^{10} \frac{x}{2} |2x - q_n| - 1$이라 하면, 함수 g는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$g(0) = -1$

$q_n < \frac{7}{4}$이므로 $\sum_{n=1}^{10} q_n < \frac{35}{2}$

$g(1) = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2} |2 - q_n| - 1 = 9 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} q_n > 0$

$g(0) < 0$, $g(1) > 0$이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = 0$을 만족하는 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} S_n = 1$을 만족시키는 점 P가 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$ 위에 적어도 하나 존재한다.

문항 번호	자연계 선택문항 유형1 - 미적분

• 출제 의도

본 문항에서는 곡선의 길이를 정적분으로 표현하고 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다. 또한 정적분의 위 끝이 함수로 표현되어 있을 때 합성함수 미분법을 통해 미분을 할 수 있는지와 구해진 극한값을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다.

[미적분-1] 곡선의 길이를 정적분으로 표현할 수 있는지와 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위와 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하는 문항이다.

[미적분-2] [미적분-1]의 결과와 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하는 문항이다.

[미적분-3] 정적분의 위 끝이 함수로 표현되어 있을 때 합성함수 미분법을 통해 미분을 할 수 있는지와 [미적분-1]과 [미적분-2]의 결과와 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 곡선의 길이를 정적분으로 표현할 수 있는지와 함수의 극한의 대소 관계와 함수의 극한의 기본정리를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다. 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 표현할 수 있는 부등식을 구할 수 있어야 하고, 함수의 극한의 대소 관계를 사용할 수 있도록 적절하게 식을 변형할 수 있어야 한다. 또한 위끝이 함수로 표현된 정적분을 합성함수 미분법을 이용하여 미분할 수 있어야 한다. 구해진 극한값과 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	부등식 $\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2} < \int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx < \{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$ 를 구할 수 있다.	4
	부등식 $\frac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} < p(t)-t < \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$ 를 구할 수 있다.	4
	함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$ 임을 보일 수 있다.	2
[미적분-2]	$\lim_{t\to\infty}\frac{p(t)}{t}=1$ 를 구할 수 있다.	4
	부등식 $\frac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} < t\{p(t)-t\} < \frac{t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 를 구할 수 있다.	2
	함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{t\to\infty} t\{p(t)-t\}=\frac{1}{2}$ 를 구할 수 있다.	4
[미적분-3]	$\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx=1$ 의 양변을 미분하여 $\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$ 를 구할 수 있다.	4
	$t^2\{1-(p'(t))^2\}=\frac{4t^2\{\{p(t)\}^2-t^2\}}{1+\{4p(t)\}^2}$ 로 식을 정리할 수 있다.	2
	$\lim_{t\to\infty} t^2\{1-(p'(t))^2\}=1$ 를 구할 수 있다.	4

- **예시 답안**

[미적분-1]

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 구간 $[t,\ p(t)]$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_t^{p(t)}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx=1 \quad \cdots\cdots \ ①$$

이다.

$\sqrt{1+4x^2}$ 이 구간 $[t,\,p(t)]$에서 증가하는 연속함수이므로 제시문 (다)에 의해

$$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2}<\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx<\{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이다. ①에 의해

$$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2}<1<\{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이고 이 부등식을 정리하면

$$\frac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}<p(t)-t<\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \qquad \cdots\cdots \ ②$$

이다. $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}=0$ 이고, $\lim_{t\to\infty}p(t)=\infty$ 이므로 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}=0$ 이다.

따라서 제시문 (나)에 의해 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$ 이다.

[미적분-1 별해]

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 구간 $[t,\ p(t)]$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_t^{p(t)}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx=1 \quad \cdots\cdots \ ①$$

$\sqrt{1+4x^2}$ 이 구간 $[t,\,p(t)]$에서 증가하는 연속함수이므로 제시문 (다)에 의해

$$\{(p(t)-t)\}\sqrt{1+4t^2}<\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx<\{(p(t)-t)\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이다. 각 변을 $p(t)-t$ 로 나누면

$$\sqrt{1+4t^2}<\frac{\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx}{p(t)-t}<\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이고

사잇값정리에 의해 $\dfrac{\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx}{p(t)-t}=\sqrt{1+4c^2}$ 인 c 가 t 와 $p(t)$ 사이에 존재한다.

즉, $\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx=\{p(t)-t\}\sqrt{1+4c^2}$ 을 만족하는 c 가 $t<c<p(t)$ 에 존재한다.

①에 의해 $\{p(t)-t\}\sqrt{1+4c^2}=1$ 이고 양변을 $\sqrt{1+4c^2}$ 으로 나누면 $p(t)-t=\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

또, $t<c<p(t)$ 이므로 $t\to\infty$ 이면 $c\to\infty$ 이다.

따라서 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=\lim_{c\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}=0$ 이다.

[미적분-2]

[미적분-1]에서 $\lim_{t \to \infty}\{p(t)-t\}=0$ 이고, $\lim_{t \to \infty}p(t)=\infty$ 이므로

$\lim_{t \to \infty}\{p(t)-t\}\dfrac{1}{p(t)}=\lim_{t \to \infty}\left\{1-\dfrac{t}{p(t)}\right\}=0$ 이다. 따라서 $\lim_{t \to \infty}\dfrac{t}{p(t)}=1$ 이고

$$\lim_{t \to \infty}\frac{p(t)}{t}=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

이다.

②의 각 변에 t 를 곱하면, $\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}<t\{p(t)-t\}<\dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 이다.

$\lim_{t \to \infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}=\lim_{t \to \infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4\left\{\dfrac{p(t)}{t}\right\}^2}}=\dfrac{1}{2}$ 이고, $\lim_{t \to \infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}}=\lim_{t \to \infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4}}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

제시문 (나)에 의해 $\lim_{t \to \infty}t\{p(t)-t\}=\dfrac{1}{2}$ 이다.

[미적분-2 별해]

[미적분-1]에서 $\lim_{t \to \infty}\{p(t)-t\}=0$ 이고, $\lim_{t \to \infty}p(t)=\infty$ 이므로

$$\lim_{t \to \infty}\left\{\frac{p(t)}{t}-1\right\}=\lim_{t \to \infty}\frac{1}{t}\{p(t)-t\}=0$$

이다. 따라서

$$\lim_{t \to \infty}\frac{p(t)}{t}=1 \quad \cdots\cdots \ ③$$

이다.

②의 각 변에 t 를 곱하면, $\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}<t\{p(t)-t\}<\dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 이다.

$\lim_{t \to \infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}=\lim_{t \to \infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4\left\{\dfrac{p(t)}{t}\right\}^2}}=\dfrac{1}{2}$ 이고, $\lim_{t \to \infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}}=\lim_{t \to \infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4}}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

제시문 (나)에 의해 $\lim_{t \to \infty}t\{p(t)-t\}=\dfrac{1}{2}$ 이다.

[미적분-3]

①의 양변을 t 에 대하여 미분하면 $\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$ 이다.

식을 정리하면 $\{p'(t)\}^2=\dfrac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$, $1-\{p'(t)\}^2=1-\dfrac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\dfrac{4\{p(t)\}^2-4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$ 이고,

$t^2\{1-\{p'(t)\}^2\}=\dfrac{4t^2\{\{p(t)\}^2-t^2\}}{1+4\{p(t)\}^2}$ 이다.

③에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}&=\lim_{t\to\infty}4t\{p(t)-t\}\frac{tp(t)+t^2}{1+\{4p(t)\}^2}\\&=\lim_{t\to\infty}4t\{p(t)-t\}\frac{\dfrac{p(t)}{t}+1}{\dfrac{1}{t^2}+4\left\{\dfrac{p(t)}{t}\right\}^2}\\&=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1+1}{4}=1\end{aligned}$$

이다.

[미적분-3 별해]

①의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$$

식을 정리하면 $\{p'(t)\}^2=\dfrac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$ 이고,

$$1-\{p'(t)\}^2=1-\frac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\frac{4\{p(t)\}^2-4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\frac{4\{p(t)+t\}\{p(t)-t\}}{1+4\{p(t)\}^2}$$

[미적분-1]의 별해에서 $p(t)-t=\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이므로 $1-\{p'(t)\}^2=\dfrac{4\{p(t)+t\}}{1+4\{p(t)\}^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2\{p(t)+t\}}{1+4\{p(t)\}^2}\frac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

우변의 분자, 분모를 $\{p(t)\}^3$ 으로 나누면

$$\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}=\lim_{t\to\infty}\frac{4\left\{\dfrac{t}{p(t)}\right\}^2\left\{1+\dfrac{t}{p(t)}\right\}}{\dfrac{1}{\{p(t)\}^2}+4}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\{p(t)\}^2}+4\left\{\dfrac{c}{p(t)}\right\}^2}}$$

이다.

한편 $t<c<p(t)$ 에서 $\dfrac{t}{p(t)}<\dfrac{c}{p(t)}<1$ 이고 ③과 제시문 (나)에 의해 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{c}{p(t)}=1$ 이다.

따라서

$$\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}=\frac{4\times1^2\times(1+1)}{4}\frac{1}{\sqrt{4\times1^2}}=1$$

이다.

문항 번호	자연계 유형2 - 기하

• 출제 의도

본 문항에서는 주어진 조건을 만족하는 공간도형에 대하여 직선과 평면의 위치 관계, 이면각 등을 활용하여 특징을 파악하고 이를 통해 특정 선분의 길이와 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[기하-1] 주어진 모양의 종이를 접어 만든 공간도형의 특징을 파악하여 특정 조건을 만족하기 위한 선분의 길이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[기하-2] 이면각의 원리와 코사인법칙을 활용하여 입체도형의 두 면을 포함하는 각각의 평면이 이루는 각을 구하고, 특정 도형의 주어진 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

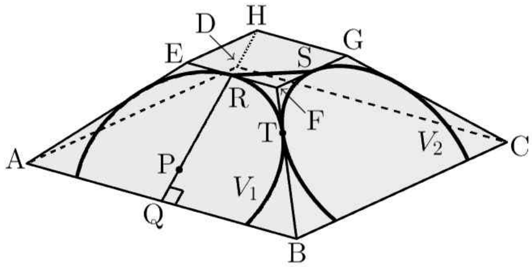
본 문항은 주어진 모양의 종이를 접어 만든 공간도형에 대하여 직선과 평면의 위치 관계, 이면각 등을 활용하여 특징을 파악하여 특정 조건을 만족하기 위한 선분의 길이를 구하고, 이면각의 원리와 코사인법칙을 활용하여 특정 도형의 주어진 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	도형 V_1과 접하는 사다리꼴 ABFE에 대하여 $\overline{\mathrm{RF}}=1$임을 나타낼 수 있다.	3
	선분 PQ의 길이를 a라 할 때, 선분 BP의 길이를 $\sqrt{a^2+9}$로 나타낼 수 있다.	2
	선분 TB의 길이를 $\sqrt{a^2+5}$로 나타낼 수 있다.	3
	직각삼각형 FUB의 각 변의 길이 사이의 관계를 $(a+2)^2+2^2=\left(1+\sqrt{a^2+5}\right)^2$으로 로 나타내고. 선분 PQ의 길이가 $\frac{2}{3}$임을 구할 수 있다.	7
[기하-2]	$\triangle\mathrm{PMN}$의 넓이가 $\frac{8\sqrt{2}}{9}$임을 구할 수 있다.	3
	평면 ABF와 평면 BCF의 이면각의 크기를 정의할 수 있다.	3
	평면 BCF위에 있는 원의 중심을 W라 할 때, 선분 PW의 길이가 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$임을 구할 수 있다.	3
	$\angle\mathrm{PTW}=\theta$라 할 때, $\cos\theta=-\frac{9}{16}$임을 구할 수 있다.	3
	도형 V_2가 포함된 평면으로의 $\triangle\mathrm{PMN}$의 정사영의 넓이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$임을 구할 수 있다.	3

- **예시 답안**

[기하-1] $\overline{AE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FB}$에 도형 V_1이 접하도록 사각뿔대 $ABCD-EFGH$를 만들면 다음과 같다.

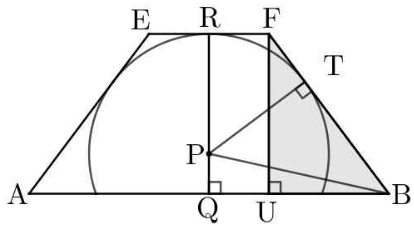


$\overline{RS}=\sqrt{2}$일 때, $\triangle RFS$는 $\angle F=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{RF}=1$이다.

도형 V_1과 도형 V_2가 만나는 점을 T라 할 때, 점 F에서 도형 V_1에 그은 접선의 길이는 같으므로 $\overline{RF}=1$이다.

이때 $\overline{PQ}=a$라 하자. 주어진 조건에 의해 $\overline{BQ}=3$이고, $\triangle PQB$는 직각삼각형이므로 $\overline{BP}=\sqrt{a^2+9}$이다.

또한 $\overline{PT}$와 $\overline{PR}$은 원의 반지름이므로 $\overline{PT}=\overline{PR}=2$이며, $\triangle PTB$는 직각삼각형이므로 $\overline{TB}=\sqrt{a^2+5}$이다.



점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 U라 하자. $\overline{FU}=\overline{RQ}=a+2$이고, $\overline{UB}=\overline{QB}-\overline{QU}=\overline{QB}-\overline{RF}=3-1=2$이며,

$\overline{FB}=\overline{FT}+\overline{TB}=1+\sqrt{a^2+5}$이다. $\triangle FUB$는 직각삼각형이므로 $(a+2)^2+2^2=\left(1+\sqrt{a^2+5}\right)^2$이다.

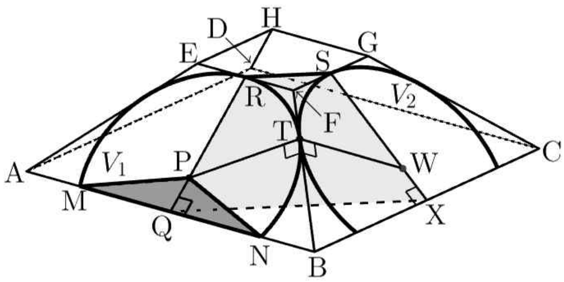
따라서 $a^2+4a+8=1+2\sqrt{a^2+5}+a^2+5$, $4a+2=2\sqrt{a^2+5}$, $(2a+1)^2=a^2+5$, $4a^2+4a+1=a^2+5$

$3a^2+4a-4=0$, $(3a-2)(a+2)=0$, $a=\dfrac{2}{3}$ 또는 $a=-2$ 이고, $a>0$이므로 $a=\dfrac{2}{3}$ 이다.

즉, 선분 PQ의 길이는 $\dfrac{2}{3}$이다.

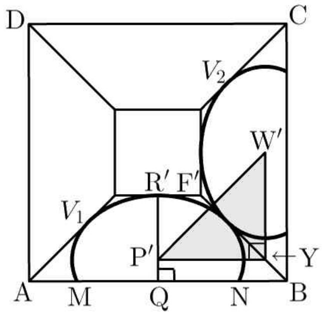
[기하-2] 도형 V_1 위에 있는 $\triangle\mathrm{PMN}$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{QN}}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서 $\triangle\mathrm{PMN}$의 넓이는 $\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{9}$이다.



도형 V_2가 포함된 평면으로의 $\triangle\mathrm{PMN}$의 정사영을 구하기 위해서는 평면 ABF와 평면 BCF가 이루는 각의 크기를 구하면 된다. 즉, 평면 BCF위에 있는 원의 중심을 W라 하면, 이면각의 정의에 의해 직선 PT와 직선 WT가 이루는 각을 구하면 된다.

점 W에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 X라 하자. 점 P, R, S, W, F의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 P', R', S', W', F'이라 하면 다음 그림과 같다.



점 P는 선분 RQ를 $3:1$로 내분하는 점이므로 점 P'은 선분 $\mathrm{R}'\mathrm{Q}$를 $3:1$로 내분하는 점이다. 이때 $\overline{\mathrm{R}'\mathrm{Q}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}=\frac{1}{2}$이다. 이때 점 P'을 지나고 선분 AB에 평행인 직선이 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{B}$와 만나는 점을 Y라 하면,

$\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Y}}=\overline{\mathrm{QB}}-\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{PW}}=\overline{\mathrm{P}'\mathrm{W}'}$이고, $\triangle\mathrm{P}'\mathrm{YW}'$은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{W}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$이므로 $\angle\mathrm{PTW}=\theta$라 하면, 코사인법칙에 의해 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{PT}}^2+\overline{\mathrm{TW}}^2-\overline{\mathrm{PW}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PT}}\times\overline{\mathrm{TW}}}=\dfrac{4+4-\frac{25}{2}}{2\times2\times2}=\dfrac{-\frac{9}{2}}{8}=-\dfrac{9}{16}$이다.

즉, $\cos\theta<0$이므로 $\theta>\frac{\pi}{2}$이고, 따라서 평면 ABF와 평면 BCG가 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이다.

그러므로 도형 V_2가 포함된 평면으로의 $\triangle\mathrm{PMN}$의 정사영의 넓이는

$\frac{8\sqrt{2}}{9}\times\cos(\pi-\theta)=\frac{8\sqrt{2}}{9}\times(-\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.