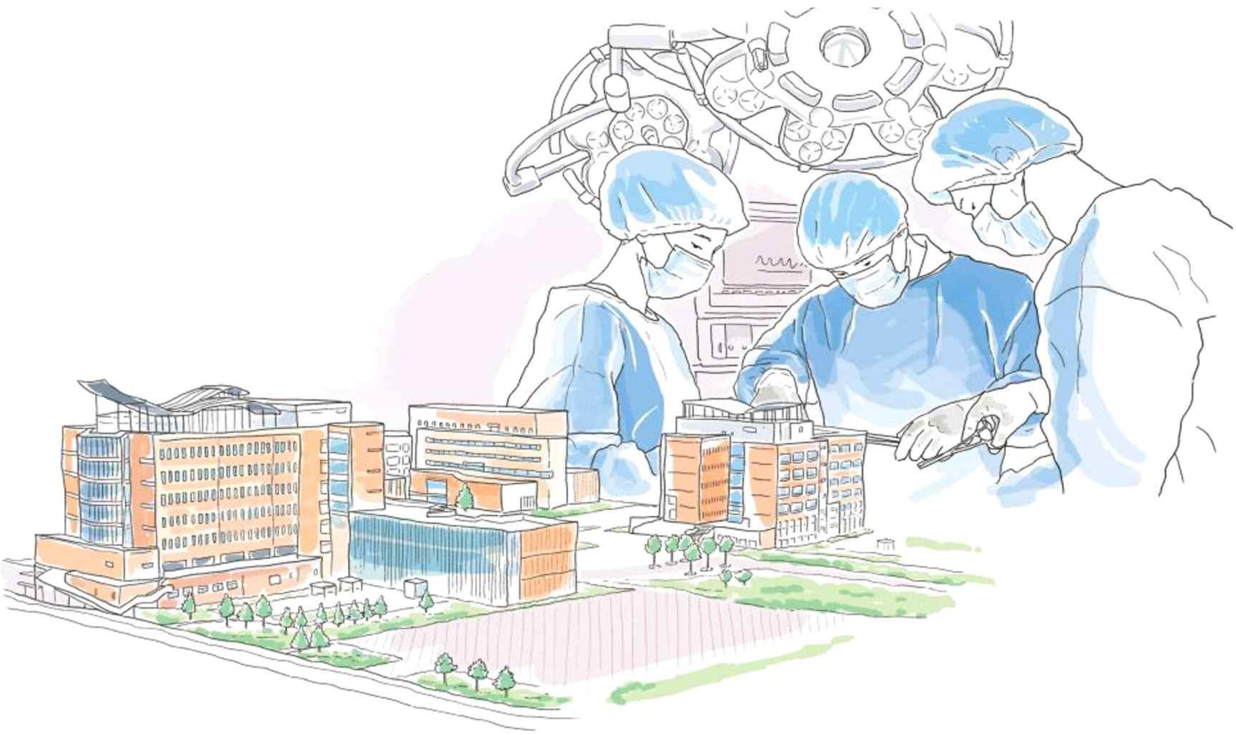
2023학년도 수시모집 논술고사

채점 기준 및 예시 답안

- 의·약학계 -



문항 번호	의·약학계 1번

• 출제 의도

본 문항에서는 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀고 근을 판별하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 설명할 수 있는지를 평가한다.

[1-1] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀어 서로 다른 실근의 개수를 판별하고 곡선과 곡선의 교점의 개수를 구하는 문항이다.

[1-2] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 이해하고 교점의 개수를 구하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 주어진 직선의 방정식, 이차함수, 원의 방정식을 연립하여 연립이차방정식을 풀고 실근을 구할 수 있는지를 평가하고, 구한 실근의 개수를 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계, 원과 직선의 위치관계 및 교점의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$0 < r < \sqrt{3}$ 일 때, $N(r) = 0$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r = \sqrt{3}$ 일 때, $N(r) = 2$ 임을 구할 수 있다.	3
	$\sqrt{3} < r < 2$ 일 때, $N(r) = 4$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r = 2$ 일 때, $N(r) = 3$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r > 2$ 일 때, $N(r) = 2$ 임을 구할 수 있다.	3
[1-2]	직선 l 과 곡선 C_1 의 교점의 개수를 k 의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	직선 l 과 곡선 C_2 의 교점의 개수를 k 의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	두 곡선 C_1, C_2 와 직선 l 이 동시에 지나는 점의 개수를 구할 수 있다.	5
	도형 C 와 직선 l 의 교점의 개수가 3 이 되는 모든 실수 k 의 값을 구할 수 있다.	5

• 예시 답안

[1-1]

두 곡선 C_1, C_2의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+k-2 & \cdots ① \\ x^2+(y-k)^2=r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\,y)$의 개수와 같다.

①을 ②에 대입하면

$$x^2+\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+k-2\right)-k\right\}^2=r^2$$

$$x^4-4x^2+16-4r^2=0 \quad \cdots ③$$

이다. ①에서 y는 x의 값에 따라 유일하게 결정되므로 $N(r)$는 ③을 만족하는 x의 개수와 같다.

$X=x^2$으로 치환하면 $X^2-4X+16-4r^2=0$이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4=4-\left(16-4r^2\right)=4\left(r^2-3\right)$$

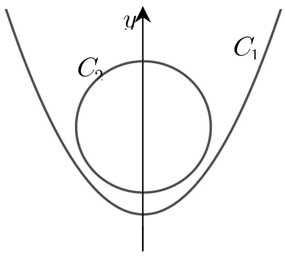
이다. 따라서

$r^2-3<0$일 때 실수 X의 값은 존재하지 않는다. ··· ⅰ)

$r^2-3=0$일 때 실수 X의 값은 오직 하나를 갖는다. ··· ⅱ)

$r^2-3>0$일 때 실수 X의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. ··· ⅲ)

ⅰ) $r^2-3<0$ 즉, $0<r<\sqrt{3}$이면 $N(r)=0$

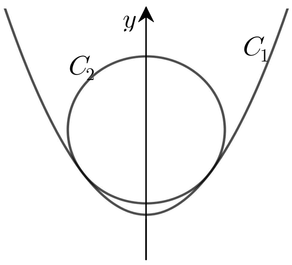


[$0<r<\sqrt{3}$ 일 때]

ⅱ) $r^2-3=0$ 즉, $r=\sqrt{3}$이면

$X^2-4X+4=(X-2)^2=0$.

따라서 $X=2$이고 이때의 $x=\pm\sqrt{2}$이므로 $N(r)=2$ ···【※】



[$r=\sqrt{3}$ 일 때]

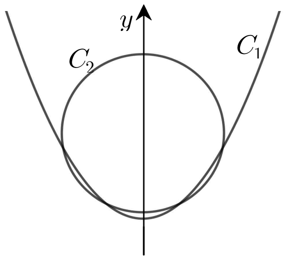
ⅲ) $r^2-3>0$ 즉, $r>\sqrt{3}$ 일 때

$x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 또는 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 이다.

① $0<r^2-3<1$ 즉, $\sqrt{3}<r<2$이면

$2-2\sqrt{r^2-3}>0$ 이 되어 이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 과 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 이 각각 서로 다른 두 개의 실수

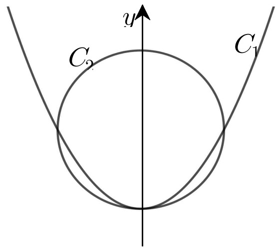
x 의 값을 가지므로 $N(r)=4$



[$\sqrt{3}<r<2$일 때]

② $r^2-3=1$ 즉, $r=2$ 이면

$x^2=4$ 또는 $x^2=0$ 이므로 $x=\pm 2$ 또는 $x=0$이다. 따라서 $N(r)=3$

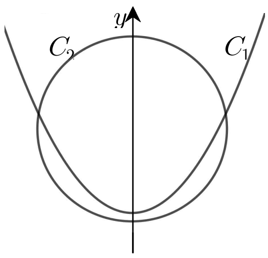


[$r=2$ 일 때]

③ $r^2-3>1$ 즉, $r>2$ 이면

$2-2\sqrt{r^2-3}<0$ 이 되어 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은 존재하지 않고,

이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 은 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=2$



[$r>2$ 일 때]

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<\sqrt{3}) \\ 2 & (r=\sqrt{3} \text{ 또는 } r>2) \\ 3 & (r=2) \\ 4 & (\sqrt{3}<r<2) \end{cases}$

[1-1 별해]

두 곡선 C_1, C_2 의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+k-2 & \cdots ① \\ x^2+(y-k)^2=r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수와 같다.

①에서 $x^2=2(y-k+2)$ 이므로 이를 ②에 대입하면

$$(y-k)^2+2(y-k+2)=r^2$$

$$y^2-2(k-1)y+k^2-2k+4-r^2=0$$

이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4=(k-1)^2-\left(k^2-2k+4-r^2\right)=r^2-3$$

이다. 따라서

$r^2-3<0$ 일 때 실수 y의 값은 존재하지 않는다. … ⅰ)

$r^2-3=0$ 일 때 실수 y의 값은 오직 하나를 갖는다. … ⅱ)

$r^2-3>0$ 일 때 실수 y의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. … ⅲ)

ⅰ) $r^2-3<0$ 즉, $0<r<\sqrt{3}$ 이면 $N(r)=0$

ⅱ) $r^2-3=0$ 즉, $r=\sqrt{3}$ 이면

$y^2-2(k-1)y+(k-1)^2=0$, $\{y-(k-1)\}^2=0$

따라서 $y=k-1$ 이고 이때의 $x=\pm\sqrt{2}$ 이므로 $N(r)=2$ …【※】

ⅲ) $r^2-3>0$ 즉, $r>\sqrt{3}$ 일 때

방정식 $y^2-2(k-1)y+k^2-2k+4-r^2=0$ 에서

$y=(k-1)\pm\sqrt{r^2-3}$ 이고 이때의 $x^2=2(y-k+2)=2\left(1\pm\sqrt{r^2-3}\right)$

① $0<r^2-3<1$ 즉, $\sqrt{3}<r<2$ 이면 $x^2>0$ 이 되어

$y=(k-1)\pm\sqrt{r^2-3}$ 일 때 각각 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=4$

② $r^2-3=1$ 즉, $r=2$ 이면

$y=k$ 일 때 $x=\pm 2$ 이고,

$y=k-2$ 일 때 $x=0$ 이므로 $N(r)=3$

③ $r^2-3>1$ 즉, $r>2$ 이면

$y=(k-1)-\sqrt{r^2-3}$ 일 때 $x^2<0$ 이므로 실수 x의 값은 존재하지 않고

$y=(k-1)+\sqrt{r^2-3}$ 일 때 $x^2>0$ 이 되어 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=2$

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<\sqrt{3}) \\ 2 & (r=\sqrt{3} \text{ 또는 } r>2) \\ 3 & (r=2) \\ 4 & (\sqrt{3}<r<2) \end{cases}$

[1-2]

직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수를 n_1,

직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수를 n_2,

두 곡선 C_1, C_2와 직선 l이 동시에 지나는 점이 개수를 n_3라 하면

도형 C와 직선 l의 교점의 개수는 $n_1+n_2-n_3$와 같다.

ⅰ) 직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+k-2 \\ y=kx+k-6 \end{cases}$ 을 동시에

만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$\frac{1}{2}x^2+k-2=kx+k-6$ 이므로 $x^2-2kx+8=0$이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4=k^2-8$ 이므로

$$n_1=\begin{cases} 2 & (k<-\sqrt{8} \text{ 또는 } k>\sqrt{8}) \\ 1 & (k=\pm\sqrt{8}) \\ 0 & (-\sqrt{8}<k<\sqrt{8}) \end{cases}$$

ⅱ) 직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases} x^2+(y-k)^2=3 \\ y=kx+k-6 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$x^2+(kx-6)^2=3$ 이므로 $(k^2+1)x^2-12kx+33=0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4=3(k^2-11)$이므로

$$n_2=\begin{cases} 2 & (k<-\sqrt{11} \text{ 또는 } k>\sqrt{11}) \\ 1 & (k=\pm\sqrt{11}) \\ 0 & (-\sqrt{11}<k<\sqrt{11}) \end{cases}$$

ⅲ) 【※】에 의해서 두 곡선 C_1, C_2는 두 점 $(\sqrt{2}, k-1)$, $(-\sqrt{2}, k-1)$에서 만난다.

이 점이 직선 $l: y=kx+k-6$을 지나면

$k-1=\pm\sqrt{2}k+k-6$

을 만족하므로 $k=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 가 되어

$$n_3=\begin{cases} 1 & \left(k=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 & \left(k\neq\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $n_1+n_2-n_3=3$ 이 되는 경우는

① $n_1=2, n_2=1, n_3=0$ 일 때 $k=\pm\sqrt{11}$

② $n_1=1, n_2=2, n_3=0$ 일 때 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

③ $n_1=2, n_2=2, n_3=1$ 일 때 $k=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

그러므로 도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되는 k의 값은 $k=\pm\sqrt{11}$, $k=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

[1-2 별해]

직선 $l: kx-y+k-6=0$과 원 C_2의 교점의 개수를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

원 C_2의 중심 $(0, k)$와 직선 l과의 거리 d는 $\frac{|k\times 0-k+(k-6)|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{k^2+1}}$이다. 따라서

$d<\sqrt{3}$ 즉, $k<-\sqrt{11}$ 또는 $k>\sqrt{11}$ 이면 $n_2=2$

$d=\sqrt{3}$ 즉, $k=\pm\sqrt{11}$ 이면 $n_2=1$

$d>\sqrt{3}$ 즉, $-\sqrt{11}<k<\sqrt{11}$ 이면 $n_2=0$

문항 번호	의·약학계 2번

• 출제 의도

본 문항에서는 한 점에서 연속이 되기 위한 조건을 알고 서로 다른 두 불연속인 함수의 곱으로 표현된 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 한 점에서 연속이 되기 위한 조건을 알고 서로 다른 두 불연속인 함수의 곱으로 표현된 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구하고, 연속함수의 정적분을 미분을 이용하여 극값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 한 점에서 연속이 되기 위한 조건을 알고 서로 다른 두 불연속인 함수의 곱으로 표현된 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한, 미분 가능한 함수의 도함수를 이용하여 극값을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	$a=1$일 때, 실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 연속이 되기 위해서 연속성이 보장되어야 하는 4개의 x값에 대한 연속성을 확인할 수 있다.	10
	$a=1$일 때, 주어진 조건을 만족하는 t값의 집합을 구할 수 있다.	2.5
	$a=\frac{3}{2}$일 때, 실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 연속이 되기 위해서 연속성이 보장되어야 하는 2개 이상의 x값에 대한 연속성을 확인할 수 있다.	5
	$a=\frac{3}{2}$일 때, 주어진 조건을 만족하는 t값의 집합을 구할 수 있다.	2.5
[2-2]	$a=2$일 때, 실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 연속이 되기 위해서 연속성이 보장되어야 하는 2개의 x값에 대한 연속성을 확인하여 주어진 명제가 참임을 보일 수 있다.	6
	$a=2, 0<t<2$일 때 $g(x)$와 그 때의 $h(t)$를 구할 수 있다.	5
	$h(t)$의 도함수를 이용하여 $h(t)$가 극대가 되는 x의 값을 구할 수 있다.	4

• 예시 답안

[2-1]

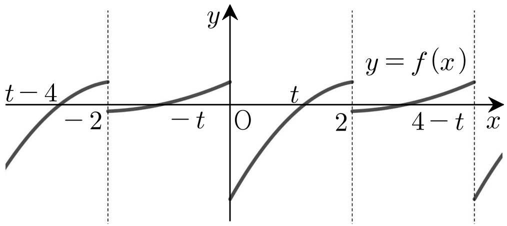
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$g(x+4)=f(x+4)f(x+4-a)=f(x)f(x-a)=g(x)$$

이다. $[-2,\,2)$에서 함수 $g(x)$가 연속이라는 것을 보이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 있다.

또한, $f(x)$는 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=\lim_{x\to t+} f(x)$이므로

$g(t)=\lim_{x\to t+} g(x)$가 되어 $x=t$에서 $g(x)$의 연속성은 $g(t)=\lim_{x\to t-} g(x)$를 보이는 것만으로 충분하다.



[i] $a=1$일 때, 함수 $g(x)=f(x)f(x-a)$는 $[-2,\,2)$에서

$f(x)$는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이고, $f(x-1)$는 $x=1$, $x=-1$ 에서만 불연속이 되므로

$g(x)$가 $x=0$, $x=-2$, $x=1$, $x=-1$에서 연속이 되면 $[-2,\,2)$에서 $g(x)$는 연속이 된다.

$x=0$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-1)=-4t(t+2)f(-1)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)f(x-1)=t(t+2)\times f(-1)$

이므로 $x=0$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$-4f(-1)=f(-1)$ 즉, $f(-1)=(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ①

$x=-2$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-3)=t(t-2)f(-3)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to -2-} g(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)f(x-1)=-4t(t-2)f(-3)$

이므로 $x=-2$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$f(-3)=-4f(-3)$ 즉, $f(-3)=f(1)=-4(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ②

$x=1$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(1)=f(1)f(0)=-4t(t+2)f(1)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)f(x-1)=t(t+2)f(1)$

이므로 $x=1$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$-4f(1)=f(1)$ 즉, $f(1)=-4(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ③

$x=-1$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(-1)=f(-1)f(-2)=t(t-2)f(-1)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to-1-} g(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)f(x-1)=-4t(t-2)f(-1)$

이므로 $x=-1$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$f(-1)=-4f(-1)$ 즉, $f(-1)=(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ④

따라서 ①, ②, ③, ④에 의해서

$a=1$일 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t의 집합은 $\{1\}$,

[ⅱ] $a=1.5$일 때, 함수 $g(x)=f(x)f(x-a)$는 $[-2, 2)$에서

$f(x)$는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이고, $f(x-1.5)$는 $x=1.5$, $x=-0.5$에서만 불연속이 되므로

$g(x)$가 $x=0, x=-2, x=1.5, x=-0.5$에서 연속이 되면 $[-2, 2)$에서 $g(x)$는 연속이 된다.

$x=0$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-1.5)=-4t(t+2)f(-1.5)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-} f(x)f(x-1.5)=t(t+2)\times f(-1.5)$

이므로 $x=0$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$-4f(-1.5)=f(-1.5)$ 즉, $f(-1.5)=(t-1.5)(t+0.5)=0$, $t=1.5$이다. … ⑤

$x=-2$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-3.5)=t(t-2)f(-3.5)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to-2-} g(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)f(x-1.5)=-4t(t-2)f(-3.5)$

이므로 $x=-2$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$f(-3.5)=-4f(-3.5)$

즉, $f(-3.5)=f(0.5)=-4(t-0.5)(t+1.5)=0$, $t=0.5$이다. … ⑥

$x=1.5$, $x=-0.5$에서 $g(x)$가 연속이 되는 조건과 상관없이

⑤, ⑥에 의해서 $a=1.5$일 때, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t는 존재하지 않는다.

그러므로

$a=1$일 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t의 집합은 $\{1\}$,

$a=1.5$일 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t의 집합은 $\varnothing$이다.

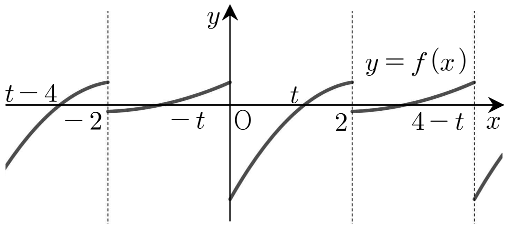
[2-1 별해]

모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+4)$ 이므로

$g(x+4)=f(x+4)f(x+4-a)=f(x)f(x-a)=g(x)$ 이다. $[-2,2)$ 에서 함수 $g(x)$ 가 연속이라는 것을 보이면 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 있다.

또한, $f(x)$ 는 모든 실수 t 에 대하여 $f(t)=\lim\limits_{x\to t+}f(x)$ 이므로

$g(t)=\lim\limits_{x\to t+}g(x)$ 가 되어 $x=t$ 에서 $g(x)$ 의 연속성은 $g(t)=\lim\limits_{x\to t-}g(x)$ 를 보이는 것만으로 충분하다.



함수 $g(x)=f(x)f(x-a)$ 는 $0<a<2$ 일 때

$[-2,2)$ 에서 $f(x)$ 는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이고, $f(x-a)$ 는 $x=a$, $x=a-2$ 에서만 불연속이 되므로

$g(x)$ 가 $x=0$, $x=-2$, $x=a$, $x=a-2$ 에서 연속이 되면 $[-2,2)$ 에서 $g(x)$ 는 연속이 된다.

$x=0$ 에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-a)=-4t(t+2)f(-a)$

2) 좌극한 $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)f(x-a)=t(t+2)\times f(-a)$

이므로 $x=0$ 에서 $g(x)$ 가 연속이 되려면

$-4f(-a)=f(-a)$ 즉, $f(-a)=0$, $-a=-t$ 이어야 한다. … ①

$x=-2$에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-2-a)=t(t-2)f(-2-a)$

2) 좌극한 $\lim\limits_{x\to -2-}g(x)=\lim\limits_{x\to -2-}f(x)f(x-a)=-4t(t-2)f(-2-a)$

이므로 $x=-2$에서 $g(x)$ 가 연속이 되려면

$f(-2-a)=-4f(-2-a)$ 즉, $f(-2-a)=f(2-a)=0$, $2-a=t$ 이어야 한다. … ②

$x=a$ 에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(a)=f(a)f(0)=-4t(t+2)f(a)$

2) 좌극한 $\lim\limits_{x\to a-}g(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)f(x-a)=t(t+2)f(a)$

이므로 $x=a$에서 $g(x)$ 가 연속이 되려면

$-4f(a)=f(a)$ 즉, $f(a)=0$, $a=t$ 이어야 한다. … ③

$x=a-2$에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(a-2)=f(a-2)f(-2)=t(t-2)f(a-2)$

2) 좌극한 $\lim\limits_{x\to (a-2)-}g(x)=\lim\limits_{x\to (a-2)-}f(x)f(x-a)=-4t(t-2)f(a-2)$

이므로 $x=a-2$ 에서 $g(x)$ 가 연속이 되려면

$f(a-2)=-4f(a-2)$ 즉, $f(a-2)=0$, $a-2=-t$ 이어야 한다. … ④

따라서 ①, ②, ③, ④에 의해서 $a=1$, $t=1$ 이면 $[-2,2)$ 에서 $g(x)$ 는 연속이다.

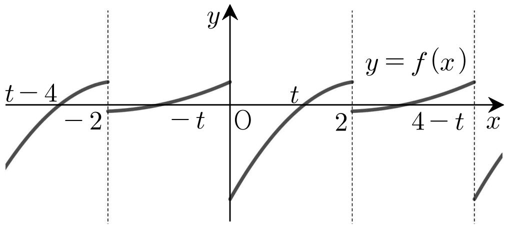
그러므로

$a=1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t 의 집합은 $\{1\}$,

$a=1.5$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t 의 집합은 $\varnothing$ 이다.

[2-2]

$a=2$ 일 때



$[-2,2)$ 에서 $f(x)$ 는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이고,

$f(x-a)$ 는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이 되므로

$g(x)$ 가 $x=0$, $x=-2$ 에서 연속이 되면 $[-2,2)$ 에서 $g(x)$ 는 연속이 된다.

$x=0$ 에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-2)=-4t^2(t+2)(t-2)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)f(x-2)=-4t^2(t+2)(t-2)$

이므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$x=-2$ 에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-4)=f(-2)f(0)=-4t^2(t+2)(t-2)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to -2-} g(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)f(x-2)=-4t^2(t+2)(t-2)$

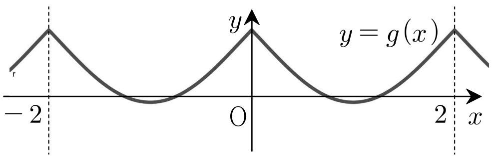
이므로 $g(x)$ 는 $x=-2$ 에서 연속이다.

따라서 $a=2$ 이면 t 의 값에 관계없이 $[-2,2)$ 에서 $g(x)$ 는 연속이다.

$a=2$, $0<t<2$ 이면 구간 $[0,2)$ 에서 $g(x)$ 는

$$\begin{aligned} g(x)=f(x)f(x-2)&=-4(x-t)(x-t-2)\times(x-2+t)(x+t) \\ &=-4(x-t)(x+t)(x-t-2)(x+t-2) \end{aligned}$$

이므로



$$\begin{aligned} h(t)=\int_0^2 g(x)\,dx&=-4\int_0^2 (x^2-t^2)(x^2-4x-t^2+4)\,dx \\ &=-4\int_0^2 \{x^4-4x^3+(4-2t^2)x^2+4t^2x+t^4-4t^2\}\,dx \end{aligned}$$

에서

$$h(t)=-4\times\left\{\frac{8}{3}(4-2t^2)+8t^2+(t^4-4t^2)\times 2-\frac{48}{5}\right\}$$

$$h'(t)=-4\times\left(8t^3-\frac{32}{3}t\right)=-32t\times\left(t^2-\frac{4}{3}\right)$$

따라서 $S(t)=\int_0^2 g(x)\,dx$ 가 극대가 되는 t 의 값은 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

문항 번호	의·약학계 선택문항 유형1 - 미적분

• 출제 의도

본 문항에서는 수열의 극한을 자연로그를 이용하여 급수로 변형하고 이를 정적분으로 표현할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다. 또한 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다.

[미적분-1] 수열의 극한을 자연로그를 이용하여 급수로 변형하고 이를 정적분으로 표현할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[미적분-2] 함수의 극댓값을 찾아 함숫값의 범위를 찾아내고 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 수열의 극한을 자연로그를 이용하여 급수로 변형하고 이를 정적분으로 표현할 수 있는지를 평가한다. 또한 주어진 함수의 극댓값을 구하고 이를 통해 함숫값의 범위를 구할 수 있어야 하고, 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	$f(x)$의 이계도함수를 구할 수 있다.	2
	$\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}$를 n에 대한 식으로 표현할 수 있다.	4
	$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}$을 정적분으로 표현할 수 있다.	7
	$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}$을 계산할 수 있다.	2
[미적분-2]	$f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	2
	$n^n e^{1-n} \le n!$임을 보일 수 있다	11
	$x^n e^{1-x} \le n!$임을 보일 수 있다	2

• 예시 답안

[미적분-1]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$f''(x) = \{n(n-1)x^{n-2} - nx^{n-1}\}e^{1-x} - (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$\qquad = x^{n-2}e^{1-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$

따라서 $f''(x) = 0$을 만족시키는 두 양의 실근 α, β는 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2n$, $\alpha\beta = n^2 - n$이다.

이때, $f(\alpha) = \alpha^n e^{1-\alpha}$, $f(\beta) = \beta^n e^{1-\beta}$ 이므로

$f(\alpha)f(\beta) = (\alpha\beta)^n e^{2-\alpha-\beta} = \{n(n-1)\}^n e^{2-2n}$ 이다.

따라서 $\left\{\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{\dfrac{4n(4n-1)\cdots(2n+1)}{n^n(n-1)^n e^{2-2n}}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$= \left\{\frac{1}{e^{2-2n}} \times \frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{n^n} \times \frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n-1)^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left\{\frac{1}{e^{2-2n}} \times \left(\frac{3n+1}{n} \times \frac{3n+2}{n} \times \cdots \times \frac{3n+n}{n}\right) \times \left(\frac{2n+1}{n-1} \times \frac{2n+2}{n-1} \times \cdots \times \frac{2n+n}{n-1}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

이고, 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left\{\ln\frac{1}{e^{2-2n}} + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{3n+k}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2n+k}{n-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{2n - 2 + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(3 + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) + n\ln\frac{n}{n-1}\right\}$$

이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) + \ln\frac{n}{n-1}\right\}$$

$$= 2 + \int_2^3 \ln x\,dx + \int_3^4 \ln x\,dx = 2 + \int_2^4 \ln x\,dx = 2 + [x\ln x - x]_2^4 = 2 + (4\ln 4 - 4) - (2\ln 2 - 2) = 6\ln 2$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^6 = 64$이다.

[미적분-1 별해]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$f''(x) = \{n(n-1)x^{n-2} - nx^{n-1}\}e^{1-x} - (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$\qquad = x^{n-2}e^{1-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$

따라서 $f''(x) = 0$을 만족시키는 두 양의 실근 α, β는 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2n$, $\alpha\beta = n^2 - n$이다.

이때, $f(\alpha) = \alpha^n e^{1-\alpha}$, $f(\beta) = \beta^n e^{1-\beta}$ 이므로

$f(\alpha)f(\beta) = (\alpha\beta)^n e^{2-\alpha-\beta} = \{n(n-1)\}^n e^{2-2n}$ 이다.

따라서 $\left\{\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\dfrac{4n(4n-1)\cdots(2n+1)}{n^n(n-1)^n e^{2-2n}}\right\}^{\frac{1}{n}}$ 이고,

양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left\{\ln\frac{1}{e^{2-2n}}+\sum_{k=1}^{2n}\ln(2n+k)-n\ln n(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(\frac{2n+k}{n}\times n\right)-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\ln\frac{2n+k}{n}+2n\ln n\right)-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{2n+k}{n}+\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3n+k}{n}\right)+2\ln n-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)\right\}+2\ln n-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$ 이다.

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)+\ln\frac{n^2}{n(n-1)}+\frac{2n-2}{n}\right\}$$

$$=\int_2^3\ln x\,dx+\int_3^4\ln x\,dx+2=\int_2^4\ln x\,dx+2=[x\ln x-x]_2^4+2=(4\ln 4-4)-(2\ln 2-2)+2=6\ln 2$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=2^6=64$ 이다.

[미적분-2]

$f'(x)=nx^{n-1}e^{1-x}-x^n e^{1-x}=(n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로

$x\ge 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$ 는 $x=n$ 에서 극댓값 $f(n)=n^n e^{1-n}$ 을 가진다.

이는 $x\ge 0$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 된다.

이제 $n^n e^{1-n}\le n!$ 임을 보이자.

(ⅰ) $n=1$ 일 때 $(\text{좌변})=1^1e^0=1$, $(\text{우변})=1!=1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n\ge 2$ 일 때

$y=\ln x$ 는 증가함수이므로 $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\ln x dx<\ln k$ 이다. (단, $k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

k 에 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 을 차례로 대입하여 더하면

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln x dx<\sum_{k=2}^{n}\ln k$ 이다.

좌변을 계산하면, $\int_1^n \ln x dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1 = \ln n^n e^{1-n}$ 이고,

우변을 계산하면, $\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$ 이다.

따라서, $\ln n^n e^{1-n} \le \ln n!$ 이다. 즉, $n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의해 $n^n e^{1-n} \le n!$ 이다. ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

즉, $x^n e^{1-x} \le n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

[미적분-2 별해1]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로

$x \ge 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$ 는 $x=n$ 에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$ 을 가진다.

이는 $x \ge 0$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 된다.

이제 $n^n e^{1-n} \le n!$ 임을 보이자.

(ⅰ) $n=1$ 일 때 $(\text{좌변}) = 1^1 e^0 = 1$, $(\text{우변}) = 1! = 1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k\,(k \ge 1)$ 일 때, $k^k e^{1-k} \le k!$ 이 성립한다고 가정하면,

$(k+1)^{k+1}e^{1-(k+1)} = (k+1)^{k+1}e^{1-k}e^{-1}$ 이고, 가정에서 $e^{1-k} \le \dfrac{k!}{k^k}$ 이므로

$(k+1)^{k+1}e^{1-k}e^{-1} \le (k+1)^{k+1}\dfrac{k!}{k^k}e^{-1} = (k+1)!\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k e^{-1} = (k+1)!\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k e^{-1}$ 이다.

$g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \ (x>0)$ 라 두고, 양변에 자연로그를 취하면,

$\ln g(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x\{\ln(x+1) - \ln x\}$ 이고 미분하면

$\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$ 이므로 $g'(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left\{\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right\}$ 이다.

$h(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1} \ (x>0)$ 이라 두면

$h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-2x-1}{x(x+1)^2} < 0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ 이므로 $h(x) > 0$ 이다.

따라서, $g'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 증가함수이고 $\lim_{x\to\infty} g(x) = e$ 이므로 $g(x) < e$ 이다.

이를 이용하면, $(k+1)^{k+1}e^{1-(k+1)} \le (k+1)!\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k e^{-1} < (k+1)!$

즉, $n=k+1$ 에서도 성립한다.

(ⅰ) 과 (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

따라서, $x^n e^{1-x} \le n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

[미적분-2 별해2]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$이므로

$x \geq 0$에서 $f(x)$의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$는 $x = n$에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$을 가진다.

이는 $x \geq 0$에 대하여 $x^n e^{1-x} \leq n^n e^{1-n}$ - (ㄱ)

이제 $n^n e^{1-n} \leq n!$임을 보이자.

(i) $n = 1$일 때 $(\text{좌변}) = 1^1 e^0 = 1$, $(\text{우변}) = 1! = 1$이므로 성립한다.

(ii) $n = k\,(k \geq 1)$일 때, $k^k e^{1-k} \leq k!$이 성립한다고 가정하면, 모든 $x \geq 0$에 대하여 (ㄱ)을 이용하면

$x^{k+1}e^{1-x} = x \cdot x^k e^{1-x} \leq x \cdot k^k e^{1-k} \leq x \cdot k!$가 성립한다. 이때 $x = k+1$을 대입하면

$(k+1)^{k+1}e^{1-(k+1)} \leq (k+1)!$가 성립한다. 즉, $n = k+1$에서도 성립한다.

(i) 과 (ii)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $n^n e^{1-n} \leq n!$이다.

따라서, $x^n e^{1-x} \leq n^n e^{1-n} \leq n!$이다.

문항 번호	의·약학계 선택문항 유형2 - 기하

• 출제 의도

본 문항에서는 정사면체의 선분의 내분점, 꼭짓점 등을 이은 선분에 대해 삼수선의 정리를 적용하여 구하는 도형을 찾아 해결할 수 있는지, 선분 위를 움직이는 점을 통해 삼각형의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 찾고 선분의 정사영의 길이 및 이면각의 크기 θ에 대해 $\sin\theta$를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[기하-1] 삼수선의 정리 및 코사인법칙을 이용해 선분의 길이를 찾고, 정사면체의 높이를 구해 삼각형의 넓이를 구하는 문항이다.

[기하-2] (1) 선분 위를 움직이는 점 X에 대해 삼각형 XEF의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 찾고, 코사인법칙, 삼각형의 성질, 정사영을 적용하여 선분 PE의 정사영의 길이를 구하는 문항이다.

(2) [기하-2] (1)의 상황에서 두 평면 PEF와 ACD가 이루는 각의 크기 θ는 삼수선의 정리를 적용하여 두 직선이 이루는 각의 크기와 같음을 파악하여 $\sin\theta$를 구하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항에서는 정사면체에서 삼수선의 정리를 통해 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지, 주어진 상황에서 삼각형의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 분석하여 선분의 평면 위로의 정사영의 길이와 이면각이 이루는 각의 크기의 $\sin$값을 구할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	코사인 법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{MF}}=\sqrt{7}$ 을 계산할 수 있다.	2
	코사인 법칙과 사인값을 이용하여 $\overline{\mathrm{GL}}=\frac{1}{\sqrt{21}}$ 을 계산할 수 있다.	3
	삼수선의 정리를 이용하여 정사면체의 높이와 $\triangle\mathrm{AGL}$ 의 넓이 S 를 찾고, $S^2=\frac{8}{63}$ 을 구할 수 있다.	2
[기하-2] (1)	$\triangle\mathrm{PEF}$ 의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 설명하고, $\cos(\angle\mathrm{FMA})=\frac{\sqrt{21}}{14}$ 을 계산할 수 있다.	4
	직각삼각형의 성질과 닮음삼각형의 성질을 통해 $\overline{\mathrm{PE}}=\frac{2\sqrt{13}}{7}$ 을 찾을 수 있다.	4
	정사면체의 높이 성질과 정사영을 이용하여 $\overline{\mathrm{PE}}$ 의 정사영의 길이 $\frac{2\sqrt{21}}{21}$ 을 구할 수 있다.	5
[기하-2] (2)	$\triangle\mathrm{PEF}$ 에서 코사인법칙을 이용하여 $\sin(\angle\mathrm{PEF})=\frac{\sqrt{339}}{2\sqrt{91}}$ 의 값을 찾을 수 있다.	3
	수선의 발을 이용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sqrt{339}}{7\sqrt{7}}$ 의 값을 계산할 수 있다.	3
	삼수선의 정리와 정사영을 이용하여 $\frac{113}{14}\sin^2\theta=\frac{64}{9}$ 를 구할 수 있다.	4

• 예시 답안

[기하-1]

$\triangle \mathrm{DMF}$ 에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{MF}}$ 는

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times \cos 60^\circ = 4+9-6=7$$

이므로 $\overline{\mathrm{MF}} = \sqrt{7}$ 이다.

$\triangle \mathrm{MCF}$ 에서 $\cos(\angle \mathrm{CMF}) = \dfrac{\overline{\mathrm{MC}}^2 + \overline{\mathrm{MF}}^2 - \overline{\mathrm{CF}}^2}{2\times \overline{\mathrm{MC}}\times \overline{\mathrm{MF}}} = \dfrac{9}{2\sqrt{21}}$ 이므로 $\sin(\angle \mathrm{CMF}) = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ 이다.

한편, 점 L 은 직선 MF 에 내린 수선의 발이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{GL}} \perp \overline{\mathrm{MF}}$ 이고,

$$\overline{\mathrm{GL}} = \overline{\mathrm{MG}}\sin(\angle \mathrm{CMF}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

이다.

점 G 는 점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발이고, 선분 AG 는 정사면체의 높이이므로

$\overline{\mathrm{AG}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ 이므로 구하는 $\triangle \mathrm{AGL}$ 의 넓이는

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{GL}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{8}{63}$$ 이다.

[기하-2]

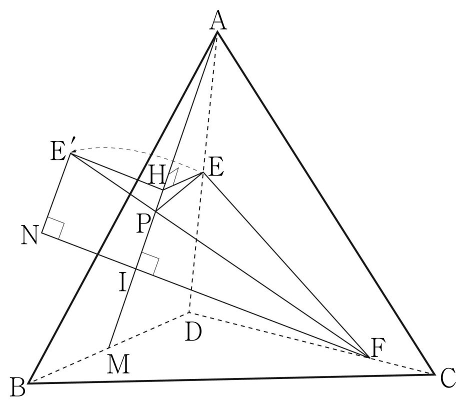
(1) $\overline{\mathrm{EF}}$ 의 값이 항상 일정하므로 $\triangle \mathrm{XEF}$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{\mathrm{EX}} + \overline{\mathrm{XF}}$ 의 값이 최소일 때 갖는다.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{XE}}$ 를 점 X 를 중심으로 하고,

$\angle \mathrm{EXA} = \angle \mathrm{E'XA}$ 가 되도록 직선 AM 을 회전축으로 하여 점 E 가 평면 AFX 위의 점 $\mathrm{E'}$ 에 오도록 하자.

그러면 $\overline{\mathrm{EX}} + \overline{\mathrm{XF}} = \overline{\mathrm{E'X}} + \overline{\mathrm{XF}} \geq \overline{\mathrm{E'F}}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{EX}} + \overline{\mathrm{XF}}$ 의 값이 최소가 되는 경우는 점 X 가 $\overline{\mathrm{E'F}}$ 위에 있는 경우이다.



점 E 에서 $\overline{\mathrm{AM}}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{\mathrm{EH}} = \overline{\mathrm{E'H}} = 1,\ \overline{\mathrm{AH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{3}$$

이다.

한편, $\triangle \mathrm{ACF}$ 에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{AF}}$ 는

$$\overline{\mathrm{AF}}^2 = 4^2 + 1^2 - 2\times 4\times 1\times\cos 60^\circ = 16+1-4=13$$

이므로 $\overline{\mathrm{AF}} = \sqrt{13}$ 이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{MF}} = \sqrt{7}$ 와 $\triangle \mathrm{AMF}$ 에서

$$\cos(\angle \mathrm{FMA}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{13})^2}{2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{7}} = \frac{12+7-13}{4\sqrt{21}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$ 이다.

점 F 에서 $\overline{\mathrm{AM}}$ 에 내린 수선의 발을 I 라 하면

$$\overline{\mathrm{MI}}=\overline{\mathrm{MF}}\times\cos(\angle\mathrm{FMA})=\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{\mathrm{FI}}=\overline{\mathrm{MF}}\times\sin(\angle\mathrm{FMA})=\sqrt{7}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}=\frac{5}{2}$$

이므로 $\overline{\mathrm{HI}}=2\sqrt{3}-\overline{\mathrm{MI}}-\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

한편, 점 E$'$ 의 직선 FI 의 수선의 발을 N 이라 하면 $\overline{\mathrm{NI}}=\overline{\mathrm{E'H}}=1$ 과 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{E'F}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$$

이다.

$\triangle\mathrm{PHE'}$ 과 $\triangle\mathrm{PIF}$ 가 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{E'H}}:\overline{\mathrm{FI}}=1:\frac{5}{2}=2:5$$

에서 $\overline{\mathrm{E'P}}=\overline{\mathrm{PE}}=\frac{2\sqrt{13}}{7}$, $\overline{\mathrm{PF}}=\frac{5\sqrt{13}}{7}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PM}}=(\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{HP}}):(\overline{\mathrm{MI}}+\overline{\mathrm{IP}})$ 이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PM}}=\left(\sqrt{3}+\frac{2}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=4:3$$

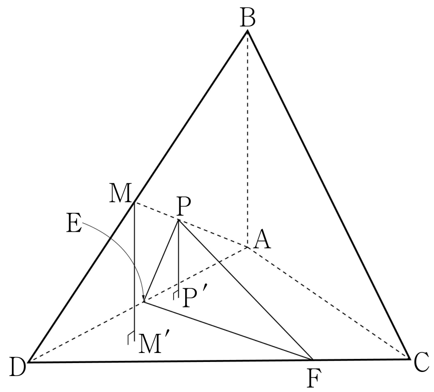
이다.

점 M, P 에서 평면 ACD 위로의 정사영을 각각 M$'$, P$'$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{MM'}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PP'}}=\frac{4}{7}\times\overline{\mathrm{MM'}}=\frac{8\sqrt{6}}{21}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PE}}$ 의 정사영인 $\overline{\mathrm{P'E}}$ 의 길이는 직각삼각형 EPP$'$ 에서

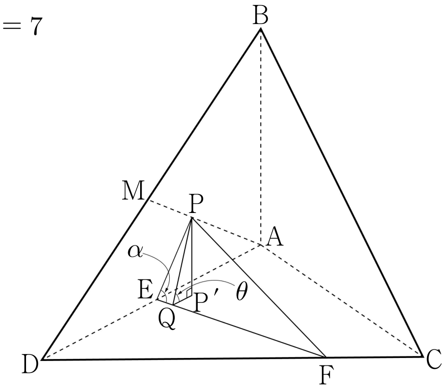
$$\overline{\mathrm{P'E}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PE}}^2-\overline{\mathrm{PP'}}^2}=\sqrt{\frac{52}{49}-\frac{128}{147}}=\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

이다.



(2) $\triangle \mathrm{DEF}$ 에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{EF}}$ 는

$$\overline{\mathrm{EF}}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times \cos 60^\circ = 4+9-6=7$$



이므로 $\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{7}$ 이다.

$\triangle \mathrm{PEF}$ 에서 $\angle \mathrm{PEF} = \alpha$ 라 하자.

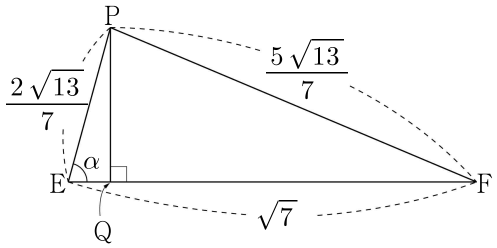
$\overline{\mathrm{PE}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{7}$, $\overline{\mathrm{PF}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{7}$, $\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{7}$ 이므로

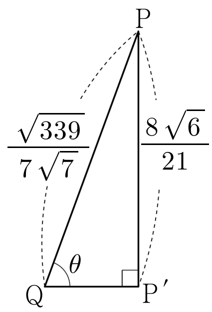
$$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{PE}}^2 + \overline{\mathrm{EF}}^2 - \overline{\mathrm{PF}}^2}{2\times \overline{\mathrm{PE}} \times \overline{\mathrm{EF}}}$$

$$= \frac{\dfrac{52}{49} + 7 - \dfrac{325}{49}}{2\times \dfrac{2\sqrt{13}}{7} \times \sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{91}}$$

이고 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{339}}{2\sqrt{91}}$ 이다.

점 P 에서 직선 EF 에 내린 수선의 발을 점 Q 라 하자.





그러면 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PE}} \times \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{7} \times \dfrac{\sqrt{339}}{2\sqrt{91}} = \dfrac{\sqrt{339}}{7\sqrt{7}}$ 이다.

한편, 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{P'Q}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$ 이고, 평면 PEF 와 평면 ACD 가 이루는 각의 크기는 직선 PQ 와 $\mathrm{P'Q}$ 가 이루는 각의 크기와 같다. 그러므로 $\angle \mathrm{PQP'} = \theta$ 이다.

$$\sin\theta = \frac{\overline{\mathrm{PP'}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \frac{\dfrac{8\sqrt{6}}{21}}{\dfrac{\sqrt{339}}{7\sqrt{7}}} = \frac{8\sqrt{42}}{3\sqrt{339}}$$ 이므로 $\dfrac{113}{14}\sin^2\theta = \dfrac{64}{9}$ 이다.