# 2022학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 채점기준 및 예시답안(자연계)

## - 공통문항 1-

## 1. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [1-1] | $f(x)$를 $x^3+1$로 나눈 나머지 $R(x)$를 2차식으로 표현할 수 있다 | 3 |
| | 주어진 조건을 바탕으로 $R(x)$의 계수들에 대한 3개의 식을 얻을 수 있다. (각 3점) | 9 |
| | 나머지 $R(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ 를 구할 수 있다. | 3 |
| [1-2] | $n=1$일 때, $g^1(x)$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 나머지 $-1$을 구할 수 있다. | 6 |
| | $n=k$일 때 명제가 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때도 성립함을 증명할 수 있다. | 10 |
| | 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 $n$애 대하여 명제가 성립함을 결론내릴 수 있다. | 4 |

## 2. 예시 답안

**[1-1]**

$f(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ 라 하자. (단, $Q(x)$는 다항식이고 $a$, $b$, $c$는 상수이다.) 이때 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+(a+b)x+(-a+c).$$

$f(x)$를 $x^2-x+1$ 로 나눈 나머지는 $x-1$ 이므로

$$a+b=1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$-a+c=-1 \cdots\cdots ②$$

이다. 또한, $f(x)$를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 $-1$ 이므로

$$f(-1)=a-b+c=-1 \cdots\cdots ③$$

이다. ①, ②, ③을 연립하면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$.

그러므로 $f(x)$를 $x^3+1$ 로 나눈 나머지는 $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ 이다.

**[1-2]**

(ⅰ) $n=1$ 일 때 $g^1(x)=x^4+x-1=x(x+1)(x^2-x+1)-1$ 이므로 $g^1(x)$를 $x^2-x+1$ 으로 나눈 나머지는 $-1$ 이다.

(ⅱ) $n=k$ 일 때 $g^k(x)$를 $x^2-x+1$ 으로 나눈 나머지가 $-1$ 이라 하자.

즉, $g^k(x)=(x^2-x+1)Q_k(x)-1$ 를 만족하는 다항식 $Q_k(x)$가 존재한다.

$$g^{k+1}(x) = g(g^k(x)) = g((x^2-x+1)Q_k(x)-1)$$
$$= \{(x^2-x+1)Q_k(x)-1\}^4 + \{(x^2-x+1)Q_k(x)-1\} - 1$$
$$= (x^2-x+1)Q_{k+1}(x) + (-1)^4 + (-1) - 1$$
$$= (x^2-x+1)Q_{k+1}(x) - 1$$

를 만족하는 다항식 $Q_{k+1}(x)$가 존재한다. 그러므로 $g^{k+1}(x)$를 $x^2-x+1$으로 나눈 나머지는 $-1$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 $n$에 대하여 $g^n(x)$를 $x^2-x+1$으로 나눈 나머지는 항상 $-1$로 일정하다.

## - 공통문항 2-

## 1. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [2-1] | $g(t)$는 $y=t$와 함수 $y=-xf'(x)+f(x)$의 그래프의 교점의 개수임을 나타낼 수 있다. | 5 |
| | $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$이고, $h(x)=-xf'(x)+f(x)$라 할 때,<br>$h'(0)=h'\left(-\frac{b}{3}\right)=0$ 임을 구할 수 있다. | 5 |
| | $b=0$이면 $-xf'(x)+f(x)$는 감소함수이므로 주어진 조건을 만족하지 않음을 나타낼 수 있다. | 5 |
| | $b>0$일 때, $f(0)=5$임을 구할 수 있다. | 5 |
| | $b<0$일 때, $f(0)=-3$임을 구할 수 있다. | 5 |
| [2-2] | 함수 $f(x)$의 상수항이 $-3$임을 구할 수 있다. | 1 |
| | 함수 $f(x)$의 $x^2$의 계수가 $-6$임을 구할 수 있다. | 3 |
| | 함수 $f(x)$의 $x$의 계수가 $9$임을 구할 수 있다. | 3 |
| | 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$임을 구할 수 있다. | 3 |

## 2. 예시 답안

**[2-1]**

함수 $y=f(x)$ 그래프 위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이다.

이 접선이 점 $(0,t)$를 지나므로 $t=-af'(a)+f(a)$ 이다.

이때 실수 $t$에 대하여 $t=-af'(a)+f(a)$의 서로 다른 실근 $a$의 개수가 $g(t)$ 이다.

즉, $h(x)=-xf'(x)+f(x)$라 하면, $g(t)$는 직선 $y=t$와 함수 $y=h(x)$의 그래프의 교점의 개수이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 $1$인 삼차함수이므로 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 라 하자.

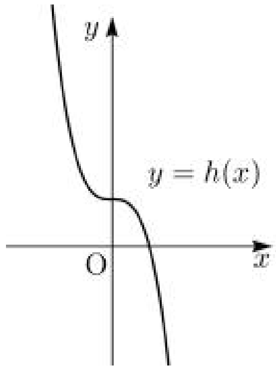
$f'(x)=3x^2+2bx+c$이므로 $h(x)=-2x^3-bx^2+d$ 이고,

$h'(x)=-6x^2-2bx=-2x(3x+b)$이므로 $h'(0)=h'\left(-\frac{b}{3}\right)=0$ 이다.

이때,

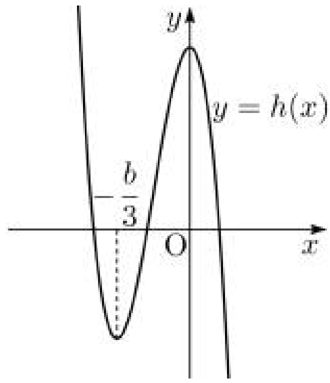
(i) $b=0$이면 :

$h'(x)=-6x^2 \le 0$ 이므로 $h(x)$는 감소함수이고,



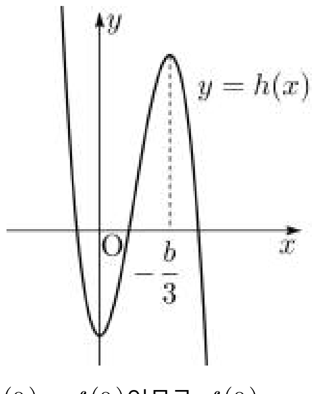

$y=t$ 의 교점의 개수는 항상 $1$개이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $b>0$이면, $h(x)$는 $x=0$과 $x=-\frac{b}{3}$에서 극값을 가지므로 다음과 같고,




주어진 조건에 의해 $g(-3)=g(5)=2$이므로, $h(0)=5$이다. $h(0)=f(0)$이므로 $f(0)=5$이다.

(iii) $b<0$이면, $h(x)$는 $x=0$과 $x=-\frac{b}{3}$에서 극값을 가지므로 다음과 같고,



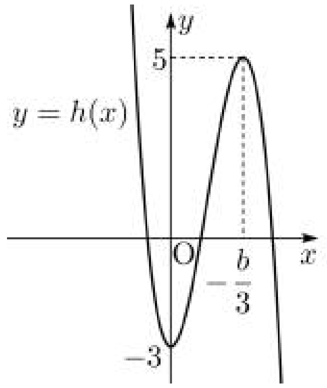

$g(-3)=g(5)=2$이므로, $h(0)=-3$이다. $h(0)=f(0)$이므로 $f(0)=-3$이다.

그러므로, $f(0)$가 될 수 있는 값은 $5$와 $-3$이다.

**[2-2]**

$f(0) < 0$이므로 [2-1]에 의해 $f(0) = -3$이다.

따라서 $h(x) = -2x^3 - bx^2 - 3$ 이고, $y = h(x)$의 그래프는 다음과 같다.




즉, $h\left(-\frac{b}{3}\right) = 5$이므로

$h\left(-\frac{b}{3}\right) = \frac{2b^3}{27} - \frac{b^3}{9} - 3 = 5$

$-\frac{b^3}{27} = 8$

$b = -6$ 이다.

이때, $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 3x^2 - 12x + c = 3(x-2)^2 + c - 12$ 이므로

$f(x)$의 접선의 기울기의 최솟값은 $c - 12$ 이다.

즉, $c - 12 = -3$

$c = 9$ 이다.

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ 이다.

## - 선택문항(미적분)-

## 1. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [미적분-1] | 곡선 $C$의 방정식을 구할 수 있다. | 6 |
| | 점 $\mathrm{P}_{10}$의 $x$좌표를 구할 수 있다. | 4 |
| [미적분-2] | 부분적분을 이용하여 $\int e^{-x}\cos 2x dx$을 구할 수 있다. | 10 |
| | $S_n$을 구할 수 있다. | 6 |
| | $\frac{S_9}{S_8}$을 구할 수 있다. | 4 |

## 2.예시 답안

**[미적분-1]**

점 $\mathrm{P}$의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하자. 그러면 $\overline{\mathrm{AP}}=e^{-x}-y$이다.

또한 $\overline{\mathrm{AB}}=e^{-x}-(-e^{-x})=2e^{-x}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}\ \sin^2 x$에서

$e^{-x}-y=2e^{-x}\sin^2 x$

$y=e^{-x}-2e^{-x}\sin^2 x=e^{-x}(1-2\sin^2 x)=e^{-x}\cos 2x$

따라서 점 $\mathrm{P}$가 나타내는 곡선 $C$의 방정식은 $y=e^{-x}\cos 2x$이다.

점 $\mathrm{P}_n$의 $x$좌표를 $x_n$이라 하면

$e^{-x_n}\cos 2x_n=0$이다. 그런데, $e^{-x_n}>0$이므로 $\cos 2x_n=0$

이 식을 만족하는 양수 $x_n$을 작은 것부터 차례로 나열하면,

$\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4},\ \frac{13\pi}{4},\ \frac{15\pi}{4},\ \frac{17\pi}{4},\ \frac{19\pi}{4},\ \cdots$이므로

구하는 점 $\mathrm{P}_{10}$의 $x$좌표 $x_{10}$은

$x_{10}=\frac{19\pi}{4}$이다.

**[미적분-2]**

$x_n<x<x_{n+1}$에 대하여 $y=e^{-x}\cos 2x$는 항상 양이거나 항상 음이다.

따라서, $S_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}}|e^{-x}\cos 2x|dx=\left|\int_{x_n}^{x_{n+1}}e^{-x}\cos 2x dx\right|$이 된다.

$\int e^{-x}\cos 2x dx=I$라 두면,

$I=\int e^{-x}\cos 2x dx=-e^{-x}\cos 2x-\int 2e^{-x}\sin 2x dx$

$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-\int 4e^{-x}\cos 2x dx=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4I$

$5I=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x$ 이므로, $\int e^{-x}\cos 2x dx=\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)$ 이다.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-x}\cos 2x dx = \left[\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)\right]_{x_n}^{x_{n+1}}$$

$=\frac{1}{5}e^{-x_{n+1}}(2\sin 2x_{n+1}-\cos 2x_{n+1})-\frac{1}{5}e^{-x_n}(2\sin 2x_n-\cos 2x_n)$ 이 되고,

$\cos 2x_n=\cos 2x_{n+1}=0$, $\begin{cases}\sin 2x_{n+1}=1\\ \sin 2x_n=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\sin 2x_{n+1}=-1\\ \sin 2x_n=1\end{cases}$ 이므로, 위 식은

$\pm\frac{2}{5}\left(e^{-x_{n+1}}+e^{-x_n}\right)$이 된다.

따라서 $S_n$ 은

$S_n=\left|\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-x}\cos 2x dx\right|=\frac{2}{5}\left(e^{-x_{n+1}}+e^{-x_n}\right)$이 된다.

$$S_9=\frac{2}{5}(e^{-x_{10}}+e^{-x_9})=\frac{2}{5}(e^{-\frac{19}{4}\pi}+e^{-\frac{17}{4}\pi})=\frac{2}{5}e^{-\frac{19}{4}\pi}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$$

$S_8=\frac{2}{5}(e^{-x_9}+e^{-x_8})=\frac{2}{5}(e^{-\frac{17}{4}\pi}+e^{-\frac{15}{4}\pi})=\frac{2}{5}e^{-\frac{17}{4}\pi}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$이므로

$\frac{S_9}{S_8}=\frac{\frac{2}{5}e^{-\frac{19}{4}\pi}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)}{\frac{2}{5}e^{-\frac{17}{4}\pi}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)}=e^{-\frac{\pi}{2}}$ 이다.

## - 선택문항(기하)-

## 1. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [기하-1] | 점 $\mathrm{P}$에서 타원 $E_1$에 그은 접선의 방정식, 점 $\mathrm{Q}$에서 타원 $E_2$에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 4 |
| | 점 $\mathrm{P}$에서 타원 $E_1$의 접선과 점 $\mathrm{Q}$에서 타원 $E_2$의 접선의 교점 $\mathrm{R}$의 좌표를 구할 수 있다. | 2 |
| | 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}, \overrightarrow{\mathrm{RH}}$를 성분으로 나타낼 수 있고 $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}}$을 구할 수 있다. | 4 |
| [기하-2] | 삼각형 $\mathrm{PQR}$의 넓이 $S_1$과 삼각형 $\mathrm{QRH}$의 넓이 $S_2$를 구할 수 있다. | 4 |
| | $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값을 구할 수 있다. | 6 |
| [기하-3] | 제시문 (나)를 이용하여 $S_1$, $S_2$를 구할 수 있다. | 4 |
| | [기하2-2]의 결과를 이용하여 $\mathrm{R}$의 좌표를 구할 수 있다. | 6 |

## 2.예시 답안

**[기하-1]**

$\mathrm{P}(t, s)$에서 타원 $E_1$에 그은 접선의 방정식은 $\frac{tx}{9}+\frac{sy}{25}=1$이고 점 $\mathrm{Q}(t, s')$이라 하면 점 $\mathrm{Q}$에서 타원 $E_2$에서 그은 접선의 방정식은 $\frac{tx}{9}+\frac{s'y}{4}=1$ 이므로 두 접선의 교점 $\mathrm{R}$의 좌표는 $\left(\frac{9}{t}, 0\right)$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(0, -s)$, $\overrightarrow{\mathrm{RH}}=\left(t-\frac{9}{t}, 0\right)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}}=0$ 이다.

**[기하-2]**

[기하-1]의 결과에로부터 선분 $\mathrm{RH}$는 두 선분 $\mathrm{PQ}, \mathrm{QH}$과 수직이므로

삼각형 $\mathrm{PQR}$의 넓이 $S_1=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{RH}$이고 삼각형 $\mathrm{QRH}$의 넓이 $S_2=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{QH}}\times\overline{RH}$이다.

따라서 $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{RH}}{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{QH}}\times\overline{RH}}=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\frac{s-s'}{s'}=\frac{\sqrt{25-\frac{25}{9}t^2}}{\sqrt{4-\frac{4}{9}t^2}}-1=\frac{\frac{5}{3}\sqrt{9-t^2}}{\frac{2}{3}\sqrt{9-t^2}}-1=\frac{3}{2}$$

**[기하-3]**

$\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{QRH}=\theta$라 하면 제시문 (다)에 의해 $S_1=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{RP}}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\sin\theta$, $S_2=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{RH}}\times\sin\theta$이다.

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$ 이므로 $\dfrac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}\,\overline{\mathrm{QR}}\sin\theta}{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{QR}}\,\overline{\mathrm{HR}}\sin\theta}=\frac{3}{2}$ 이다.

$2\overline{\mathrm{PR}}=3\overline{\mathrm{HR}}$ 이고, $4\overline{\mathrm{PR}}^2=9\overline{\mathrm{HR}}^2$ 이다.

점 $\mathrm{P}(t, s)$, $\mathrm{R}\left(\frac{9}{t}, 0\right)$, $\mathrm{H}(t, 0)$에 대하여 식으로 나타내면

(1) $4\left\{\left(\frac{9}{t}-t\right)^2+s^2\right\}=9\left(\frac{9}{t}-t\right)^2$이다.

점 $\mathrm{P}(t, s)$가 타원 $E_1$ 위의 점이므로 $s^2=25-\frac{25}{9}t^2$이고, (1)에 대입하면

$5\left(\frac{9}{t}-t\right)^2=4\left(25-\frac{25}{9}t^2\right)$ 이므로 $0<t<3$ 범위에서는 $t=\frac{9}{\sqrt{29}}$ 이다.

따라서 점 $\mathrm{R}$의 좌표는 $(\sqrt{29}, 0)$ 이다.