2022학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 채점기준 및 예시답안(의·약학계)

- 공통문항 1-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$a=p+q\sqrt{3}$ ($p,\ q$는 정수, $p^2-3q^2=1$)라 할 때, $\dfrac{a}{2+\sqrt{3}}=(2p-3q)+(2q-p)\sqrt{3}$ 로 표현	5
	$2p-3q,\ 2q-p$ 는 정수이고, $(2p-3q)^2-3(2q-p)^2=1$ 임을 보임으로써 $\dfrac{a}{2+\sqrt{3}}\in A$ 임을 보임	5
[1-2]	$2<m+\dfrac{1}{m}$ 임을 보임	4
	$m+\dfrac{1}{m}\le n+\dfrac{1}{n}$ 임을 보임으로써 $2<m+\dfrac{1}{m}\le n+\dfrac{1}{n}$ 임을 증명함	4
	$b=2+\sqrt{3}$ 뿐임을 보임	7
[1-3]	각 항을 $2+\sqrt{3}$ 으로 나누어서 $1<\dfrac{c}{2+\sqrt{3}}\le 2+\sqrt{3}$ 임을 보임	4
	[1-1]을 이용해서 $\dfrac{c}{2+\sqrt{3}}\in A$ 임을 보임	3
	[1-2]를 이용해서 $\dfrac{c}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ 이므로 $c=(2+\sqrt{3})^2$ 임을 보임	3

2. 예시 답안

[1-1]

$a=p+q\sqrt{3}$ ($p,\ q$는 정수, $p^2-3q^2=1$) 라 할 때,

$$\frac{a}{2+\sqrt{3}}=\frac{p+q\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(p+q\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=(2p-3q)+(2q-p)\sqrt{3}$$

$2p-3q,\ 2q-p$ 는 정수이고,

$(2p-3q)^2-3(2q-p)^2=4p^2-12pq+9q^2-12q^2+12pq-3p^2=p^2-3q^2=1$ 이므로

$\dfrac{a}{2+\sqrt{3}}$ 는 집합 A의 원소이다.

[1-2]

(1)

m이 양수이므로 $m+\frac{1}{m} \geq 2\sqrt{m\frac{1}{m}}=2$ 이고, $m \neq 1$ 이므로 $m+\frac{1}{m}>2$ 이다.

$1<m \leq n$ 이므로 $(n+\frac{1}{n})-(m+\frac{1}{m})=(n-m)+\frac{m-n}{mn}=\frac{(mn-1)(n-m)}{mn} \geq 0$ 이다.

따라서 $2<m+\frac{1}{m} \leq n+\frac{1}{n}$ 이다.

(2)

A의 원소 b에서 $1<b \leq 2+\sqrt{3}$ 을 만족하는 b를

$b=p+q\sqrt{3}$ $(p^2-3q^2=1$, p, q는 정수) 라 하면

$\frac{1}{b}=\frac{1}{p+q\sqrt{3}}=\frac{p-q\sqrt{3}}{p^2-3q^2}=p+(-q)\sqrt{3}$ 이 되어 $\frac{1}{b} \in A$ 이다.

$2<b+\frac{1}{b}=p+q\sqrt{3}+p+(-q)\sqrt{3}=2p \leq (2+\sqrt{3})+\frac{1}{(2+\sqrt{3})}=4$ 에서

$1<p \leq 2$ 이므로 $p=2$이다. $p^2-3q^2=1$에 $p=2$를 대입하면 $q=\pm 1$

$1<b \leq 2+\sqrt{3}$ 이므로 $q=1$.

따라서 $b=2+\sqrt{3}$ 이다.

[1-3]

$c \in A$ 이고, $2+\sqrt{3}<c \leq (2+\sqrt{3})^2$ 이므로,

각 항을 $2+\sqrt{3}$ 으로 나누면 $1<\frac{c}{2+\sqrt{3}} \leq 2+\sqrt{3}$

[1-1] 에서 $\frac{c}{2+\sqrt{3}} \in A$ 이고,

[1-2]의 결과를 이용하면 $\frac{c}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ 이므로 $c=(2+\sqrt{3})^2$

- 공통문항 2-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	최댓값 k_0를 구할 수 있다.	8
	주어진 적분 값이 k_0가 되는 집합 A의 원소 $f(x)$를 구할 수 있다.	7
[2-2]	함수 $g(x)$가 성질 (II)를 만족시킴을 설명할 수 있다.	10
	평균값의 정리를 사용하여 $g'(c)=\dfrac{g\left(\dfrac{a+1}{2^n}\right)-g\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}{\dfrac{a+1}{2^n}-\dfrac{a}{2^n}}$ 을 만족시키는 c의 존재성을 설명할 수 있다.	3
	성질 (I)와 (II)를 사용하여 $\lvert g'(c)\rvert \geq 1$임을 설명할 수 있다.	7

2. 예시 답안

[2-1]

$$\begin{aligned}&\left[\{f(x)\}^2-5xf(x)+5x^2\right]\left[\{f(x)\}^2-5xf(x)+7x^2\right]\\&=\left[\{f(x)\}^2-5xf(x)+6x^2-x^2\right]\left[\{f(x)\}^2-5xf(x)+6x^2+x^2\right]\\&=\left[\{f(x)\}^2-5xf(x)+6x^2\right]^2-x^4\\&=(f(x)-2x)^2(f(x)-3x)^2-x^4\\&\geq -x^4\end{aligned}$$

이므로, 제시문 (가)에 의해

$$\int_0^1\left[(f(x)-2x)^2(f(x)-3x)^2-x^4\right]dx \geq \int_0^1 -x^4\,dx$$

이다. 따라서, $f(x)=2x$이거나 $f(x)=3x$일 때, $k_0=\int_0^1 -x^4\,dx=-\dfrac{1}{5}$이다.

(i) $f(x)=2x$ 는 a가 홀수일 때, $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)=\dfrac{2a}{2^n}$ 이고 $2a$는 짝수이므로 $f(x)=2x$는 집합 A의 원소이다.

(ii) $f(x)=3x$ 는 a가 홀수일 때, $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)=\dfrac{3a}{2^n}$ 이고 $3a$는 짝수가 아니므로 $f(x)=3x$는 집합 A의 원소가 아니다.

따라서

$$\int_0^1\left[\{f(x)\}^2-5xf(x)+5x^2\right]\left[\{f(x)\}^2-5xf(x)+7x^2\right]dx=k_0$$

를 만족시키는 집합 A의 원소는 $f(x)=2x$이다.

[2-2]

집합 B의 원소 $g(x)$는 다음의 성질 (I)와 (II)를 만족시킨다.

(I) a가 홀수이면, $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{b}{2^n}$인 홀수 b가 존재한다.

(II) a가 짝수이면, $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{b}{2^n}$인 짝수 b가 존재한다.

성질 (II)를 만족시키는 이유는 다음과 같다.

a가 짝수이면, $\frac{a}{2^n}=\frac{a_0}{2^m}$를 만족시키는 $m<n$인 자연수 m과 홀수 a_0가 존재한다. 따라서, 집합 B의 조건으로부터

$$g\left(\frac{a}{2^n}\right)=g\left(\frac{a_0}{2^m}\right)=\frac{b_0}{2^m},\quad b_0\text{는 홀수},$$

이다. $b'=b_0 2^{n-m}$라 두면 b'은 짝수이고 $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{b'}{2^n}$이므로, 성질 (II)가 만족됨을 알 수 있다.

제시문 (나)에 의해

$$g'(c)=\frac{g\left(\frac{a+1}{2^n}\right)-g\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a+1}{2^n}-\frac{a}{2^n}}$$

을 만족시키는 c가 열린구간 $\left(\frac{a}{2^n},\frac{a+1}{2^n}\right)$에 적어도 하나 존재한다. 또한, 연속하는 두 자연수 $a,\,a+1$은 둘 중 하나는 홀수이고 하나는 짝수이므로 성질 (I)와 (II)로부터

$$g'(c)=\frac{g\left(\frac{a+1}{2^n}\right)-g\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a+1}{2^n}-\frac{a}{2^n}}=\frac{\frac{b'}{2^n}-\frac{b}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=b'-b$$

인 b와 b'이 존재하고 둘 중 하나는 반드시 홀수이어야 하고 다른 하나는 짝수이어야 한다.
즉, $|b'-b|\geq 1$이므로 $|g'(c)|\geq 1$이다.

- 선택문항(미적분)-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	$f(x)$의 $x=0$에서 미분가능하다는 것을 제시문으로 설명한다.	2
	$f(x)=t$인 x의 값에서의 $\sqrt{\vert f(x)-t \vert}$ 의 미분가능성을 조사하는 근거를 설명한다.	3
	t의 범위를 $t<0$, $t=0$, $0<t<2a$, $t=2a$, $t>2a$ 으로 나누어 고려한다.	5
	각각의 경우에 대하여 $h(t)$를 구할 수 있다.	10
[미적분-2]	함수 $h(t)$의 치역이 $0, 1, 2, 3$이고 $h(h(0))=0$이므로 반드시 $\alpha_1=0$임을 설명한다.	2
	a의 범위를 $0<2a<1$, $2a=1$, $1<2a<2$, $2a=2$, $2<2a<3$, $2a=3$, $2a>3$ 으로 나누어 고려한다.	3
	각각의 경우에 대하여 $h(1), h(2), h(3)$의 값을 구하여 조건을 만족하는지 판단한다.	5

2.예시 답안

[미적분-1]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$는 다음과 같다.

$$f'(x)=\begin{cases} a(x+1)^3(1-3x)e^{-3x} & (x<0) \\ \dfrac{-4a(x-1)}{(x^2-2x+2)^2} & (x>0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-}\frac{a(h+1)^4e^{-3h}-a}{h} = a\lim_{h\to 0-}\frac{(h+1)^4e^{-3h}-1}{h} \\ &= a\lim_{h\to 0-}\frac{\{(h+1)^4-1\}e^{-3h}+e^{-3h}-1}{h} \\ &= a\lim_{h\to 0-}\frac{\{(h+1)^2+1\}\{(h+1)^2-1\}e^{-3h}+e^{-3h}-1}{h} \\ &= a\lim_{h\to 0-}\left\{(h^2+2h+2)(h+2)e^{-3h}+\frac{e^{-3h}-1}{h}\right\} \\ &= a(4-3)=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-}\frac{\dfrac{2a}{h^2-2h+2}-a}{h} = a\lim_{h\to 0-}\frac{\dfrac{-h^2+2h}{h^2-2h+2}}{h} \\ &= a\lim_{h\to 0-}\frac{-h+2}{h^2-2h+2}=a\end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

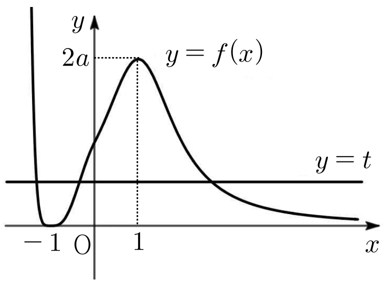
$g(x)=\sqrt{\vert f(x)-t \vert}$ 라 할 때,

제시문 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $f(x)\neq t$인 x의 값에서 미분가능하다.

이 때, $g'(x)=\begin{cases} \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}}, & (f(x)>t) \\ \dfrac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}}, & (f(x)<t) \end{cases}$ 이고, $f(x)=t$인 x의 값에서

$f'(x) \neq 0$인 경우 $g'(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않고,
$f'(x)=0$인 경우는 제시문 (가)를 이용하여 함수 $g(x)$의 미분가능성을 확인해야 한다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=t$의 위치 관계를 고려하면,



(1) $t<0$일 때, $h(t)=0$

(2) $t=0$일 때,

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{ah^4 e^{-3(-1+h)}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \sqrt{\frac{ah^4 e^{-3(-1+h)}}{h^2}} = \lim_{h \to 0+} \sqrt{ah^2 e^{-3(-1+h)}} = 0$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\sqrt{ah^4 e^{-3(-1+h)}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} -\sqrt{\frac{ah^4 e^{-3(-1+h)}}{h^2}} = \lim_{h \to 0-} -\sqrt{ah^2 e^{-3(-1+h)}} = 0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다. 따라서 $h(t)=0$이다.

(3) $0<t<2a$일 때, $h(t)=3$

(4) $t=2a$일 때, $x<0$에서 미분불가능한 점이 1개 존재한다. 또한,

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{2a\left|\frac{h^2}{h^2+1}\right|}}{h} = \sqrt{2a}$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\sqrt{2a\left|\frac{h^2}{h^2+1}\right|}}{h} = -\sqrt{2a}$$

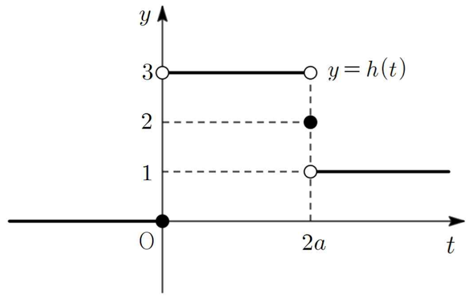
이므로, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분불가능하다. 따라서 $h(t)=2$이다.

(5) $t>2a$일 때, $h(t)=1$

따라서, 함수 $h(t)$는

(1) $t<0$일 때, $h(t)=0$ (2) $t=0$일 때, $h(t)=0$ (3) $0<t<2a$일 때, $h(t)=3$

(4) $t=2a$일 때, $h(t)=2$ (5) $t>2a$일 때, $h(t)=1$



[미적분-2]

함수 $h(t)$의 치역이 $\{0, 1, 2, 3\}$이므로 α는 $0, 1, 2, 3$만 가능하다. 또한, $h(0)=0$이므로 $h(h(0))=0$, 즉 $\alpha_1=0$이다.

① $0<2a<1$인 경우,

$h(1)=h(2)=h(3)=1$이고 $h(h(1))=h(1)=1,\ h(h(2))=h(1)=1,\ h(h(3))=h(1)=1$이므로 $m=2$이고 $\alpha_1+\alpha_2=0+1=1$이다. 즉 조건을 만족하지 못한다.

② $2a=1$인 경우,

$h(1)=2,\ h(2)=h(3)=1$이고 $h(h(1))=h(2)=1,\ h(h(2))=h(1)=2,\ h(h(3))=h(1)=2$이므로 $m=3$이고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0+1+2=3$이다. 즉 조건을 만족하지 못한다.

③ $1<2a<2$인 경우,

$h(1)=3,\ h(2)=h(3)=1$이고 $h(h(1))=h(3)=1,\ h(h(2))=h(1)=3,\ h(h(3))=h(1)=3$이므로 $m=3$이고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0+1+3=4$이다. 즉 조건을 만족하지 못한다.

④ $2a=2$인 경우,

$h(1)=3,\ h(2)=2, h(3)=1$이고 $h(h(1))=h(3)=1,\ h(h(2))=h(2)=2,\ h(h(3))=h(1)=3$이므로 $m=4$이고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0+1+2+3=6$이다. 즉 조건을 만족하지 못한다.

⑤ $2<2a<3$인 경우,

$h(1)=h(2)=3, h(3)=1$이고 $h(h(1))=h(3)=1,\ h(h(2))=h(3)=1,\ h(h(3))=h(1)=3$이므로 $m=3$이고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0+1+3=4$이다. 즉 조건을 만족하지 못한다.

⑥ $2a=3$인 경우,

$h(1)=h(2)=3, h(3)=2$이고 $h(h(1))=h(3)=2,\ h(h(2))=h(3)=2,\ h(h(3))=h(2)=3$이므로 $m=3$이고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0+2+3=5$이다. 즉 조건을 만족한다. 따라서 $a=\dfrac{3}{2}$이다.

⑦ $2a>3$인 경우,

$h(1)=h(2)=h(3)=3$이고 $h(h(1))=h(3)=3,\ h(h(2))=h(3)=3,\ h(h(3))=h(3)=3$이므로 $m=2$이고 $\alpha_1+\alpha_2=0+3=3$이다. 즉 조건을 만족하지 못한다.

① ~ ⑦에 의하여 $a=\dfrac{3}{2}$이다.

(별해)[미적분-2]

함수 $h(t)$의 치역이 $\{0, 1, 2, 3\}$이므로 α는 $0, 1, 2, 3$만 가능하다. 그런데 $\alpha=0$인 경우, $(h\circ h)(0)=0$이고 조건을 만족하므로 $\alpha_1=0$이다. 또한, m은 $1\le m\le 4$인 자연수이다.

따라서,

① $m=1$이면 $\sum_{k=1}^{1} \alpha_k = \alpha_1 = 0$ 이므로 조건을 만족하지 못한다.

② $m=2$이면 $\sum_{k=1}^{2} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 + \alpha_2 \le 3$이므로 조건을 만족하지 못한다.

③ $m=4$이면 $\sum_{k=1}^{4} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0+1+2+3 = 6$이므로 조건을 만족하지 못한다.

④ $m=3$일 때, 조건을 만족하기 위해서 $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0+2+3 = 5$ 만족해야 하므로

$h(h(1)) \ne 1$, $h(h(2)) = 2$, $h(h(3)) = 3$ 이다. 따라서 $2a = 3$ 이다. 즉, $a = \frac{3}{2}$ 이다.

① ~ ④에 의하여 $a = \frac{3}{2}$이다.

- 선택문항(기하) -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	삼각형 ABQ의 넓이가 최대인 경우는 점 Q에서의 접선의 기울기가 선분 AB의 기울기와 같은 경우라는 것을 설명할 수 있다.	2
	점 Q의 y좌표를 구하고 y_1, y_2를 이용하여 나타낼 수 있다.	4
	점 Q의 x좌표를 구하고 y_1, y_2를 이용하여 나타낼 수 있다	4
[기하-2]	점 P의 좌표를 구할 수 있다	3
	점 S의 좌표를 구할 수 있다.	2
	점 R의 좌표를 구할 수 있다.	2
	$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$로 나타낼 수 있다.	3
[기하-3]	$S_1(t)$를 구할 수 있다.	4
	$S_2(t)$를 구할 수 있다.	3
	극한값을 구할 수 있다.	3

2.예시 답안

[기하-1]

삼각형 ABQ의 넓이가 최대인 경우는 점 Q에서의 접선의 기울기가 선분 AB의 기울기와 같은 경우이다.

$x_1 \neq x_2$인 경우에, 선분 AB의 기울기는 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$이고, 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y = mx + \dfrac{p}{m}$이다. 따라서 $\left(mx + \dfrac{p}{m}\right)^2 = 4px$, $\left(mx - \dfrac{p}{m}\right)^2 = 0$, $x = \dfrac{p}{m^2}$, $y = \dfrac{2p}{m}$이다.

한편 ${y_1}^2 = 4px_1$, ${y_2}^2 = 4px_2$이므로 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4p}{y_1 + y_2}$이다.

그러므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16p}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

$x_1 = x_2$인 경우에, $y_2 = -y_1$이다. 이 선분 AB는 y축과 평행하며, 점 Q의 좌표는 원점이 된다. 그러므로, $x_1 = x_2$인 경우에도, 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16p}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

[기하-2]

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, 점 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에서의 접선의 방정식은 각각 $l : y_1 y = 2p(x + x_1)$, $m : y_2 y = 2p(x + x_2)$이다.

두 직선의 교점의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$라 두면, $\dfrac{y_1 y - 2px_1}{2p} = \dfrac{y_2 y - 2px_2}{2p}$이므로 $y = 2p \times \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$이다.

이 값을 직선 l에 대입하여 정리하면 $x = \dfrac{y_1 y_2}{4p}$이다.

따라서 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{y_1y_2}{4p}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

점 P에서 y축에 수직으로 그은 직선이 선분 AB와 만나는 점이 S이므로 점 S의 y좌표는 $\frac{y_1+y_2}{2}$이며, 이것은 점 S가 선분 AB의 중점임을 뜻한다.

그리고 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{4p}=\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{8p}$ 이므로 $\mathrm{S}\left(\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{8p}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

또한 [기하-1]의 결과에 의하여 점 Q와 점 R는 일치한다. 따라서 $\mathrm{R}\left(\frac{(y_1+y_2)^2}{16p}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

$2\times\frac{(y_1+y_2)^2}{16p}=\frac{y_1y_2}{4p}+\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{8p}$ 이므로 점 R은 선분 PS의 중점이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2}$ 이다.

[기하-3]

점 $\mathrm{C}(x,y)$라 두자. $\mathrm{T}(t,0)$이므로

$\overline{\mathrm{TC}}=\sqrt{(x-t)^2+y^2}=\sqrt{(x-t)^2+4px}=\sqrt{\{x-(t-2p)\}^2+4p(t-p)}$

$x=t-2p$에서 최솟값 $\sqrt{4p(t-p)}$를 가진다. 따라서 $S_1(t)=4p(t-p)\pi$이다.

점 $\mathrm{C}(x_3, y_3)$라 두면 $x_3=t-2p$이다.

점 C에서의 접선의 방정식은 $y_3y=2p(x+x_3)$이므로 점 E의 x좌표는 $x=-x_3=2p-t$이다.

따라서 선분 ET의 길이 $2t-2p$가 지름의 길이이므로 $S_2(t)=(t-p)^2\pi$이다.

그러므로 $\lim_{t\to\infty}\frac{t\times S_1(t)}{S_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{4pt(t-p)\pi}{(t-p)^2\pi}=4p$ 이다.