2022학년도 수시모집 논술고사 채점기준 및 예시답안(자연계)

- 공통문항 1 -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(x)$ 와 x^2+ax-1 를 x^2-x+1 로 나누었을 때 나머지가 같다는 것을 안다.	3
	x^2+ax-1 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지를 식으로 표현할 수 있다.	3
	a 와 k 를 구할 수 있다.	4
[1-2]	$f(x)$ 와 $g(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때 나머지가 같다는 것과 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누었을 때 나머지가 같다는 것을 안다.	3
	$g(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지를 식으로 표현할 수 있다.	3
	$g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누었을 때의 나머지를 식으로 표현할 수 있다.	3
	$g(x)$ 를 구할 수 있다.	8
	k 의 값에 관계없이 $g(x)$ 의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	8

2. 예시 답안

[1-1]

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로

$f(x)$ 와 x^2+ax-1 을 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지가 서로 같다.

$x^2+ax-1=(x^2-x+1)+(a+1)x-2$ 이므로

$a+1=k+1$, $-2=-k+1$

이고 연립해서 풀면

$k=3$, $a=3$ 이다.

[1-1 별해]

w 을 $x^2-x+1=0$ 의 근이라 할 때, $w^2=w-1$ 이다.

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로

$(k+1)w-k+1=f(w)=w^2+aw-1=(a+1)w-2$ 이다.

w 가 허수이므로

$a+1=k+1$, $-2=-k+1$

이고 연립해 풀면

$k=3$, $a=3$ 이다.

[1-2]

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 두자.

$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

이므로

$f(x)$ 와 $g(x)$ 를 x^2-x+1 , x^2+x+1 로 각각 나누었을 때의 나머지가 서로 같다.

$g(x)=(x^2-x+1)(ax+a+b)+(b+c)x-a-b+d$

$\quad\quad =(x^2+x+1)(ax-a+b)+(-b+c)x+a-b+d$

이므로 $b+c=k+1$, $-b+c=-k+1$, $-a-b+d=-k+1$, $a-b+d=-k+1$ 이다.

연립해서 풀면 $a=0$, $b=k$, $c=1$, $d=1$ 이 되어 $g(x)=kx^2+x+1$ 이다.

접선의 방정식을 $y=Ax+B$ 라 두면 접점의 x 좌표는 $kx^2+x+1=Ax+B$

즉, $kx^2+(1-A)x+1-B=0$ 를 만족한다.

이때, 판별식은 $(1-A)^2-4k(1-B)=0$ 이다. 따라서 $A=1$, $B=1$ 일 때, k 의 값에 관계없이 항상 접한다.

그러므로 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=x+1$ 이다.

[별해 ($g(x)$ 구하는 다른 방법)]

$g(x)$ 구하는 다른 방법

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 두자.

w 을 $x^2-x+1=0$ 의 근 w' 을 $x^2+x+1=0$ 의 근이라 할 때

$w^2=w-1$, $(w')^2=-w'-1$ 이다.

한편, w 는 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$의 근이고, w' 는 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ 의 근이므로

$w^3=-1$, $(w')^3=1$ 이다.

$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ 이므로

$(k+1)w-k+1=f(w)=g(w)=aw^3+bw^2+cw+d=(b+c)w-a-b+d$

$(-k+1)w'-k+1=f(w')=g(w')=a(w')^3+b(w')^2+cw'+d=(-b+c)w'+a-b+d$

이고, w , w' 이 허수이므로

$b+c=k+1$, $-b+c=-k+1$, $-a-b+d=-k+1$, $a-b+d=-k+1$ 이다.

연립해서 풀면 $a=0$, $b=k$, $c=1$, $d=1$ 이 되어 $g(x)=kx^2+x+1$ 이다.

- 공통문항 2 -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	곡선 C'의 방정식이 $y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a \ \left(-a+\frac{1}{a}\le x\le a+\frac{1}{a}\right)$임을 구할 수 있다.	2
	$0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 교점이 없음을 나타낼 수 있다.	3
	$a\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 교점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2a}, a-\frac{1}{4a^3}\right)$임을 구할 수 있다.	5
[2-2]	곡선이 지나간 영역의 넓이를 a의 범위에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.	5
	$0<a\le\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 두 곡선의 위치관계를 파악하고, 곡선이 지나간 영역의 넓이 S를 $S=\int_{-a}^{0}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx+\left(a\times\frac{1}{a}\right)+\int_{\frac{1}{a}}^{a+\frac{1}{a}}\left\{-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\right\}dx$로 나타낼 수 있다.	7
	$0<a\le\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $S=1+\frac{4}{3}a^2$를 구할 수 있다.	3
	$a>\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 두 곡선의 위치관계를 파악하고, 곡선이 지나간 영역의 넓이 S를 $S=1+\frac{4}{3}a^2-\int_{-a+\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2a}}\left\{-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\right\}dx-\int_{\frac{1}{2a}}^{a}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx$로 나타낼 수 있다.	7
	$a>\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $S=2-\frac{1}{12a^4}$를 구할 수 있다.	3

2. 예시 답안

[2-1]

곡선 C'는 제시문 (가)에 의하여

$$y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a \quad \left(-a+\frac{1}{a}\le x\le a+\frac{1}{a}\right)$$

의 그래프이다.

곡선 C와 C'의 교점은 a의 범위에 따라 다음과 같이 두 가지로 나뉜다.

(i) $\frac{1}{a}>2a$일 때, 즉, $0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, 교점은 없다.

(ii) $\frac{1}{a}\le 2a$일 때, 즉, $a\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때,

곡선 C와 C'의 교점의 x좌표를 구하면

$$-\frac{1}{a}x^2+a=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a \text{ 에서 } x=\frac{1}{2a}$$

이다.

따라서 교점은 $\left(\frac{1}{2a},\, a-\frac{1}{4a^3}\right)$ 이다.

[2-2]

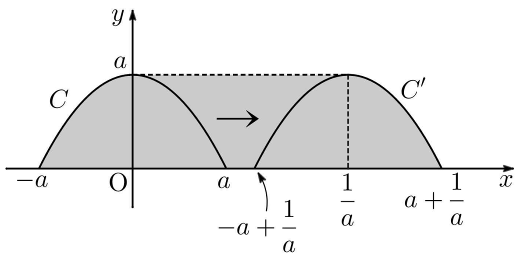
곡선 C가 지나간 영역의 넓이 S는 a의 범위에 따라 다음과 같이 두 가지로 나뉜다.

ⅰ) $\frac{1}{a}\geq 2a$ 일 때, 즉, $0<a\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때,

[2-1]에 의하여

곡선 C와 C'의 교점은 $0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 없거나 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ 이므로

곡선 C가 지나간 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 영역의 넓이 S는 닫힌구간 $[-a,0]$ 에서 $y=-\frac{1}{a}x^2+a$ 와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이,

닫힌구간 $\left[0,\frac{1}{a}\right]$ 에서 $y=a$ 와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와

닫힌구간 $\left[\frac{1}{a},a+\frac{1}{a}\right]$ 에서 곡선 $y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a$ 와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합이다.

따라서 제시문 (나)에 의하여

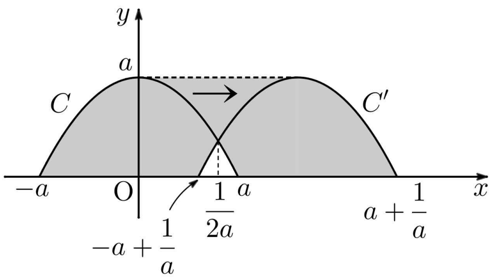
$$\begin{aligned} S&=\int_{-a}^{0}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx+\left(a\times\frac{1}{a}\right)+\int_{\frac{1}{a}}^{a+\frac{1}{a}}\left\{-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\right\}dx \\ &=1+2\int_{0}^{a}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx \\ &=1+2\left(-\frac{a^3}{3a}+a^2\right)=1+\frac{4}{3}a^2 \end{aligned}$$

이다.

ⅱ) $\frac{1}{a}<2a$ 일 때, 즉, $a>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때,

[2-1]에 의하여, 곡선 C와 C'의 교점은 $\left(\frac{1}{2a},\, a-\frac{1}{4a^3}\right)$ 이므로

곡선 C가 지나간 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 영역의 넓이 S는 ⅰ)에서 구한 넓이에서

닫힌구간 $\left[-a+\frac{1}{a}, \frac{1}{2a}\right]$ 에서 $y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와

닫힌구간 $\left[\frac{1}{2a}, a\right]$ 에서 $y=-\frac{1}{a}x^2+a$ x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 값이다.

따라서

$$\begin{aligned}
S &= 1+\frac{4}{3}a^2-\int_{-a+\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2a}}\left\{-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\right\}dx-\int_{\frac{1}{2a}}^{a}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx \\
&= 1+\frac{4}{3}a^2-2\int_{\frac{1}{2a}}^{a}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx \\
&= 1+\frac{4}{3}a^2-2\left[-\frac{1}{3a}x^3+ax\right]_{\frac{1}{2a}}^{a} \\
&= 1+\frac{4}{3}a^2-2\left(-\frac{a^2}{3}+a^2+\frac{1}{24a^4}-\frac{1}{2}\right) \\
&= 2-\frac{1}{12a^4}
\end{aligned}$$

이다.

- 선택문항 유형1(미적분) -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	$\ln f(x) = (x+\alpha)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 로 변형하여 합성함수 미분법, 곱의 미분법, 몫의 미분법을 적용할 수 있다.	3
	조건에 맞는 함수 $g(x)$ 를 정하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	2
[미적분-2]	함수 $f'(x)$ 의 부호를 확인할 때 함수 $g(x)$ 의 부호만 확인하면 된다는 사실을 알고, $g'(x)$ 를 구할 수 있다.	2
	$\alpha \le 0$ 일 때 $f'(x)$ 의 부호를 확인하고 $f(x)$ 가 증가함을 설명할 수 있다.	4
	$\alpha \ge \dfrac{1}{2}$ 일 때 $f'(x)$ 의 부호를 확인하고 $f(x)$ 가 감소함을 설명할 수 있다.	4
[미적분-3]	$\alpha = \dfrac{1}{3}$ 일 때 극댓값 $g(1) > 0$임을 설명할 수 있다.	3
	$x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않음을 판단할 수 있다.	3
	사잇값 정리를 이용하여 열린구간 $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ 에서 $g(c) = 0$ 인 c 가 존재함을 설명할 수 있다.	3
	함수 $g(x)$ 의 증가, 감소, 극한값을 바탕으로 열린구간 $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ 에서 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 $x = c$ 뿐 임을 확인 할 수 있다.	4
	함수 $f(x)$ 가 $\left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ 의 $x = c$ 에서만 극솟값을 가짐을 설명할 수 있다.	2

2.예시 답안

[미적분-1]

$f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln f(x) = (x+\alpha)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

위 식의 양변을 x 에 대해 미분하면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x+\alpha}{x^2+x}$ 이다.

$g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x+\alpha}{x^2+x}$ 라 하면 $f'(x) = f(x)g(x)$ 이고 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ 이다.

[미적분-2]

$f'(x) = f(x)g(x)$ 이고 $x > 0$ 에서 $f(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 의 부호를 확인하면 된다.

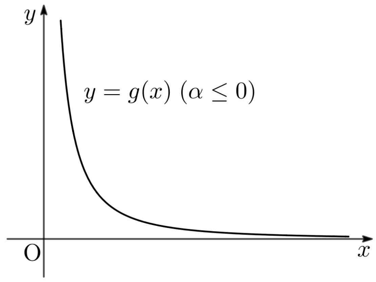
$g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x+\alpha}{x^2+x}$ 에서 $g'(x) = \dfrac{(2\alpha-1)x+\alpha}{(x^2+x)^2}$

(i) $\alpha \le 0$ 인 경우

$x > 0$ 에서 $g'(x) < 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.

이때 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x) > 0$ 이고 $f'(x) > 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

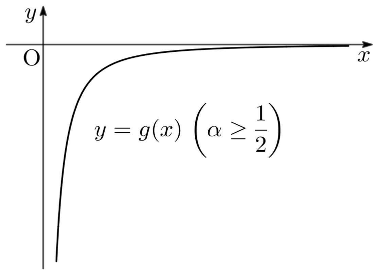


(ⅱ) $\alpha \ge \frac{1}{2}$ 인 경우

$x > 0$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x)$ 는 증가한다.

이때 $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x) < 0$ 이고 $f'(x) < 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 감소한다.



[미적분-3]

$\alpha = \frac{1}{3}$ 일 때, $g'(x) = \dfrac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{(x^2 + x)^2} = 0$ 에서 $g'(1) = 0$ 이고

$x < 1$ 에서 $g'(x) > 0$, $x > 1$ 에서 $g'(x) < 0$ 이다.

또, 함수 $g(x)$ 의 극댓값 $g(1) = \ln 2 - \frac{2}{3} > 0$ 이다.

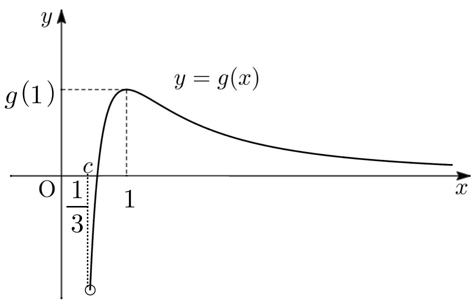
$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이고 $x > 1$ 에서 $g(x)$ 는 감소하므로 $x > 1$ 에서 $g(x) > 0$이 항상 성립한다.

따라서, 열린구간 $(1, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 열린구간 $(1, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 존재하지 않는다.

한편, $g\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 4 - \frac{3}{2} < 0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 에서 연속이므로 제시문 (나)에 의해 열린구간 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 에서 $g(c) = 0$ 인 c 가 적어도 하나 존재한다.

이때, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

그러므로, 열린구간 $\left(\frac{1}{3}, c\right)$ 에서 $g(x) < 0$ 이고 열린구간 $(c, 1)$ 에서 $g(x) > 0$이다.



즉, $f'(c) = 0\ \left(\frac{1}{3} < c < 1\right)$이고 $x = c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 유일한 극솟값 $f(c)$ 를 갖는다.

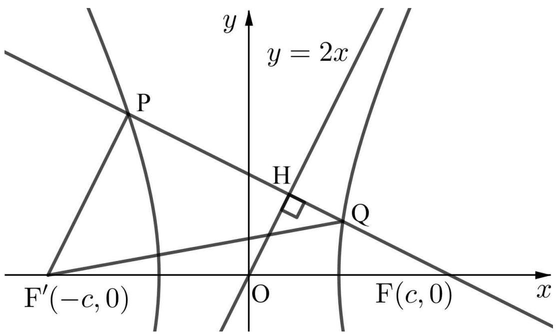
- 선택문항 유형2(기하) -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	쌍곡선의 방정식과 점근선의 방정식의 관계를 이용하여 c를 a로 나타낸 관계식을 서술한다.	5
	두 삼각형 HOF와 $\mathrm{PF'F}$의 닮음비가 $1:2$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{OH}}=2a$임을 서술한다.	5
	쌍곡선의 정의를 이용하여 직각삼각형 $\mathrm{PF'Q}$의 세 변의 길이를 한 문자로 나타내고 c의 값을 구한다.	5
[기하-2]	쌍곡선의 방정식과 점근선의 방정식의 관계를 이용하여 c를 a와 k로 나타낸 관계식을 서술한다.	3
	삼각형 HOF에서 $\angle\mathrm{PFF'}=\alpha$에 대한 $\cos\alpha=\dfrac{ak}{c}$ 임을 서술한다.	4
	쌍곡선의 정의와 코사인법칙을 이용하여 삼각형 $\mathrm{PFF'}$에서 $\cos\alpha$의 값을 표현한다.	4
	$\cos\alpha$의 값을 비교하여 점 P가 선분 FH를 $k:1$로 외분하는 점임을 서술한다.	4

2.예시 답안

[기하-1]



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0\,,\ b>0)$이라 두면

한 점근선의 방정식이 $y=2x$이므로 $\dfrac{b}{a}=2$ 즉, $b=2a$

쌍곡선의 정의에 의해서 $c^2=a^2+b^2=5a^2$ … ⅰ)

삼각형 HOF에서 $\overline{\mathrm{HO}}=t$라 두면 $\tan(\angle\mathrm{HOF})=2$이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=2t$이고,

피타고라스정리에 의해서 $c^2=t^2+(2t)^2=5t^2$

ⅰ)에 의해서 $t=a$ 즉 $\overline{\mathrm{HO}}=a\,,\ \overline{\mathrm{HF}}=2a$

삼각형 HOF와 삼각형 $\mathrm{PF'F}$는 닮음이고 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이다.

따라서 쌍곡선의 정의에 의해서

$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}$ 즉, $\overline{\mathrm{QF'}}=\frac{4}{3}+4a-2a=\frac{4}{3}+2a$

삼각형 $\mathrm{PF'Q}$ 는 직각삼각형이므로

$\left(\frac{4}{3}+2a\right)^2=(2a)^2+\left(4a-\frac{4}{3}\right)^2$

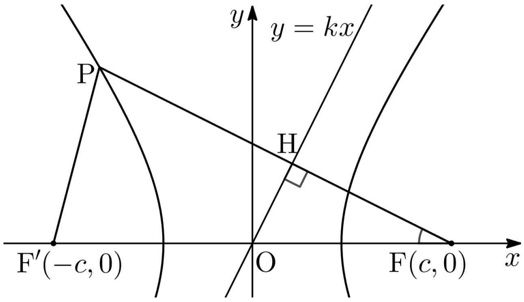
$a^2=a$

따라서 $a=1\ (a>0)$

그러므로 ⅰ)에 의해서 $c^2=5a^2=5$가 되어

$c=\sqrt{5}$ 이다.

[기하-2]



쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 이라 두면

한 점근선의 방정식이 $y=kx$ 이므로 $k=\frac{b}{a}$ 즉, $b=ak$

쌍곡선의 정의에 의해서 $c^2=a^2+b^2=a^2(1+k^2)$ … ⅱ)

원점을 O, $\angle\mathrm{PFF'}$ 을 α 라 하자.

삼각형 HOF 에서 $\overline{\mathrm{HO}}=t$ 라 두면 $\tan(\angle\mathrm{HOF})=k$ 이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=tk$이고,

피타고라스정리에 의해서 $c^2=t^2+t^2k^2=t^2(1+k^2)$

ⅱ)에 의해서 $t=a$ 즉 $\overline{\mathrm{HO}}=a$, $\overline{\mathrm{HF}}=ak$이고

$$\cos\alpha=\frac{ak}{c} \quad \cdots \text{ⅲ)}$$

삼각형 $\mathrm{PFF'}$ 에서 $\overline{\mathrm{PF}}=p$ 이면 $\overline{\mathrm{PF'}}=p-2a$이고

$$\cos\alpha=\frac{4c^2+p^2-(p-2a)^2}{2\times2c\times p} \quad \cdots \text{ⅳ)}$$

ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서

$$\frac{ak}{c}=\frac{4c^2+p^2-(p-2a)^2}{2\times2c\times p}$$

$$kp=a(1+k^2)+p-a,\ (k-1)p=ak^2$$

따라서 $p=\frac{ak^2}{k-1}$

$$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PH}}=\frac{ak^2}{k-1}:\frac{ak^2}{k-1}-ak$$
$$=ak^2:ak$$
$$=k:1$$

이므로 점 P 는 선분 FH 를 $k:1$ 로 외분하는 점이다.